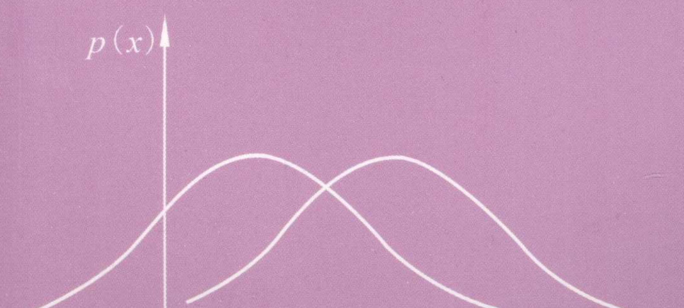
农林类高等职业院校基础课系列教材

概率论与数理统计

王志武　谢厚桂　主编



$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

中国林业出版社

农林类高等职业院校基础课系列教材

概率论与数理统计

王志武　谢厚桂　主编

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王志武，谢厚桂主编．—北京：中国林业出版社，2010.3
（农林类高等职业院校基础课系列教材）
ISBN 978-7-5038-5475-0

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①王…　②谢…　Ⅲ.①概率论—高等学校：技术学校—教材　②数理统计—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 041311 号

出版　中国林业出版社（100009　北京西城区刘海胡同 7 号）
E-mail　forestbook@163.com　电话　010-83222880
网址　www.cfph.com.cn
发行　中国林业出版社
印刷　北京林业大学印刷厂
版次　2010 年 3 月第 1 版
印次　2010 年 3 月第 1 次
开本　787mm×960mm　1/16
印张　12.75
字数　230 千字
印数　1～4000 册

定价　18.00 元

《概率论与数理统计》
编者名单

主　编　王志武　谢厚桂

副主编　张青娥　徐文智

编　者　（按姓氏笔画排序）

王　晨　王志武　马建国　闫宝英

李　钧　辛永清　张　凤　张青娥

陈丽珍　郑瑞根　郝建民　聂淑媛

徐文智　梁　颖　谢厚桂

前　　言

为了更好地满足高职、高专对数学课程的需求，根据教育部关于高职、高专的培养目标及对数学课程教学大纲所规定的教学内容的最新要求，本着数学“服务专业、必须够用”的原则，以实施素质教育，加强数学素养，培养数学应用能力及创新能力为宗旨，在原编“农林类高职高专基础课系列教材——《高等数学（上册）（第二版）》（主要内容为微积分）及《高等数学（下册）》（主要内容为线性代数、概率论与数理统计）”的基础上，经过用书单位师生的反馈意见及要求，经过多年高职、高专的课程建设经验及教学改革实践，经过各参编单位专家讨论、研究决定：重新整合编写出版这套新的“农林类高等职业院校基础课系列教材”——《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。这样，各用书单位可以根据不同专业及培养目标选择相应的教材。新教材更便于教学，使数学在高职教学中更好地发挥应有的作用。

本次出版的是继《高等数学》出版后的《概率论与数理统计》。本教材特点是：知识结构严谨、合理，内容安排恰当；重点突出基础知识、基本思想与方法；语言叙述通俗、简练，避免专门数学知识；全书理论推导从简，以彰显高职特点，注重数学知识的应用及能力培养；此外，每章都配有习题，以供学生练习、巩固知识所用，书后附有参考答案。原出版的《高等数学（上、下册）》均有配套用书——《高等数学学习指导（上、下册）》，为减轻学生负担，在本次教材编写时特别注重了习题优化，故本套教材不再出版配套用书。

本教材共十章。其中第一章为事件与概率，第二章为随机变量及其分布，第三章为随机向量及其分布，第四章为随机变量的数字特征，第五章为大数定律和中心极限定理，第六章为数理统计的基本概念，第七章为参数估计，第八章为假设检验，第九章为方差分析，第十章为回归分析。内容系统完备，较好的覆盖了概率论与数理统计的基本内容，能较好地满足高职、高专教学的需要。

本教材可作为农林类及综合类高职院校、成人高校、高等专科学校及普通本科院校下设的职业技术学院等的教学用书，也可作为专升本及自学高等数学、农林业科技人员的参考用书。

本教材由王志武、谢厚桂主编。参加编写的有：山东农业大学谢厚桂、梁颖（第一、二章）；山东农业大学王志武、郝建民（第三、四、五章）；河南科技大学林业职业学院张青娥、马建国、聂淑媛（第六、七章）；甘肃林业职业技术学院徐文智、辛永清、王晨（第八、九章）；山东农业大学李钧、张凤，福建林业职业技术学院郑瑞根（第十章）。另外山东农业大学陈丽珍、张凤，山东农业管理干部学院闫宝英也参加了部分章节的编写。全书最后由王志武、谢厚桂统筹、定稿。

本教材在编写过程中参考了同行专家的有关著作和研究成果，并得到各参编单位领导和有关专家的大力支持，特别是山东农业大学信息科学与工程学院信息与计算科学系的领导和老师们的大力支持，更得益于中国林业出版社的精心策划及鼎立合作。在此一并表示衷心的感谢。

本教材尽管经过多次补充、修改、完善，但由于水平所限，尚有不当之处，还有待进一步完善，敬请不吝赐教。

编　者

2010 年 1 月

目　　录

第一章　事件与概率

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象。一类是可事前预言的，即在一定条件下必然发生(或必然不发生)，这类现象称为确定性现象或必然现象。例如在标准大气压下，水加热到 100℃时必然会沸腾；水稻的生长从播种到收割，总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段；同性电荷必不相互吸引；等等。以前我们所学过的各门数学课程基本上都是用以处理和研究这类确定性现象的。另一类是事前不可预言的，即在一组条件的一次实现之前，虽然可以知道它将发生的所有可能结果，却不能肯定其中哪一个一定发生，其结果呈现出不确定性。但是，大量地重复实现这组条件，结果又遵循某种规律，这种规律称之为统计规律，这种现象叫做随机现象或偶然现象。例如某地区的年降雨量；同样耕作条件下各块地的亩产量；过马路交叉口时可能遇上交通指挥灯的颜色等。

人们往往通过“试验”的方法来区分确定性现象和随机现象。这里的“试验”是指在一组条件的实现下，对自然界和社会现象的观察或实验。条件每实现一次就是一次试验，观察到的结果就是试验的结果。确定性现象在相同的条件下，每次试验都能得到同样的结果；随机现象则表现为每次试验的结果有多种可能。

概率论与数理统计是从数量方面研究和提示随机现象统计规律性的一门数学学科。由于随机现象的普遍性，使概率论与数量统计的理论与方法在工业、农业、经济、军事、教育及科学技术等领域中均有广泛的应用，并与其相应的学科结合形成新的边缘学科。对于各类高职院校来说，设置概率论与数理统计课程，既为专业基础课和专业课打下必要的基础，也是科技人员必须掌握的基础知识和方法。

§1.1　随机事件及其运算

一、随机试验

在概率论中，我们把研究随机现象的试验称为随机试验，简称为试验，通常用字母 E 来表示。下面举几个例子来说明：

E_1　抛掷一枚硬币，观察正面 H(有花的一面)，反面 T 出现的情况。

E_2 取 100 粒种子进行发芽试验，观察种子的发芽数。

E_3 一袋中有 m 个红球，n 个白球，从中任取一球观察其颜色。

E_4 一批灯泡，从中任取一只，测试它的寿命。

由以上四例不难看出，随机试验具有三个共同的特点：

(1)可以在相同的条件下重复地进行。

(2)每次试验的可能结果不止一个，且能事先明确试验的所有可能结果。

(3)进行一次试验以前不能确定哪一个结果会出现。

二、随机事件

随机试验的每一个可能的结果，称为基本事件，记为 ω。因为随机试验的所有结果是明确的，所以所有的基本事件也是明确的，它们的全体的集合构成样本空间，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$。有时也把基本事件称为样本点。对一个具体的随机试验来说，根据试验的内容明确它的样本空间是至关重要的。

例 1 设 Ω_k 表示前面各试验 E_k 的样本空间($k=1,2,3,4$)。则

$\Omega_1=\{H,T\}$

$\Omega_2=\{0,1,2,\cdots,100\}$

$\Omega_3=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中 $\omega_1=\{$取得红球$\}$，$\omega_2=\{$取得白球$\}$

$\Omega_4=\{t|t\geqslant 0\}$，其中 $t=\{$灯泡的寿命$\}$

在随机试验中，有时需要研究带有某些特征的基本事件是否发生。如在 E_2 中，我们研究

$A=\{95$ 粒种子发芽$\}=\{95\}$

$B=\{$种子发芽粒数不低于 85 粒$\}=\{85,86,\cdots,100\}$

$C=\{$种子发芽粒数不超过 60 粒$\}=\{0,1,2,\cdots,60\}$

这些结果是否发生. 显然 A 是一个基本事件，而 B 和 C 由多个基本事件组成。相对于基本事件，称这种由两个或两个以上的基本事件组成的事件为复合事件。无论是基本事件还是复合事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性。所以都叫做随机事件或者简称为事件。习惯上常用大写字母 A、B、C 等表示。在试验中，我们说事件 A 发生，就是指当且仅当 A 中的某一基本事件 ω 发生，记作 $\omega\in A$。例如在前述事件中，若试验的结果为“95 粒种子发芽”，即事件 A 发生，显然事件 A 是 B 的一个基本事件，于是就可以说事件 B 发生了。

总之，基本事件是随机试验的不可再分割的简单事件，随机事件是由具有某些特征的基本事件所组成的。样本空间是所有基本事件的集合。从集合论的观点来看，一个随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集而已。

在试验中必然发生的事件叫做必然事件，用 Ω 表示。这是因为在任一次试

验中必然有 Ω 中的某一基本事件发生，即 Ω 必然发生，所以 Ω 又是一个必然事件。在试验中必然不发生的事件叫做不可能事件，记作 Φ。在例 1 中，“发芽粒数不多于 100 粒”是必然事件，“发芽粒数多于 100 粒”是不可能事件。必然事件和不可能事件本质上不是随机事件，因其发生与否已失去了“随机性”，但我们还是把它们看成随机事件，这对今后讨论问题是方便的。

例 2 E 将一枚硬币抛两次，观察正面(H)，反面(T)出现的情况。试写出 E 的样本空间以及事件 $A=\{$两次都出现正面$\}$，$B=\{$两次出现同一面$\}$，$C=\{$出现正面$\}$包含的基本事件。

解 该试验有四个基本事件：(H,H)，(H,T)，(T,H)，(T,T)。于是

$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$，$A=\{(H,H)\}$，$B=\{(H,H),(T,T)\}$，$C=\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$

三、事件的运算

概率论的任务之一，是研究随机事件的规律，而随机事件往往不是孤立的，相互之间常常存在着一定的关系。我们希望通过对较简单事件规律的研究去揭示更复杂事件的规律。为此，需要研究事件的关系及运算。

设试验 E 的样本空间为 Ω，A、B、$A_k(k=1,2,\cdots)$是 E 的事件。

1. 事件的包含　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，或**事件 A 包含于事件 B**，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。在 E_4 中，如果 $A=\{t|10<t<100\}$，$B=\{t|5<t<500\}$，则 $A\subset B$。对于任一事件 A，有 $A\subset\Omega$，$\Phi\subset A$；若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

2. 事件的相等　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 **A 与 B 相等**，记为 $A=B$。

3. 事件的和　事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$。例如 $A=\{t|10<t<100\}$，$B=\{t|50<t<500\}$，则 $A\cup B=\{t|10<t<500\}$。又如一穴中种两粒玉米种子，若 A：“两粒都出苗”，B：“只有一粒出苗”，则 $A\cup B$ 表示事件“至少有一粒出苗”。

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记为 $A_1\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$；事件 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 中至少一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。

4. 事件的积　事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB。如例 2 中，$B\cap C=\{(H,H)\}$。类似地将 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$的积事件及 $A_k(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$的积事件，分别记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \cdots A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

5. 事件的差　事件 A 发生而事件 B 不发生，这样的事件称为事件 **A 与 B 的差**，记为 $A-B$。如例 2 中，$C-A=\{(H,T),(T,H)\}$。

6. 互不相容的事件　若 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 **A 与** B 是**互不相容**的或**互斥**的。如基本事件是互不相容的。又如在 E_2 中，若 $A=\{$发芽粒数多于 85 粒$\}$，$B=\{$发芽粒数不超过 60 粒$\}$，因 $AB=\Phi$，所以事件 A 与 B 是互不相容的。

7. 对立事件　若事件 A 与 B 不能同时发生，但二者必发生其一，即事件 A 与 B 满足条件

$$AB=\Phi \qquad A \cup B=\Omega$$

则称事件 A 与事件 B **互逆**，又称 A 是 B 的**对立事件**（或 B 是 A 的对立事件）记为 $A=\overline{B}$（或 $B=\overline{A}$）。如在例 2 中，$\overline{A}$ 表示“出现反面”。

显然，$\overline{A} \cup A=\Omega$，$\overline{A} \cap A=\Phi$，因此 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，即 $\overline{\overline{A}}=A$。

由定义不难看出，相互对立的事件一定是互不相容事件，反之，一般并不成立。

熟悉集合论的读者一定会发现，事件间的关系及运算与集合论中集合间的关系及运算是完全相似的。因此，在许多场合，采用集合论的表达方式，这样，既显得简练易理解，又可以把对事件的分析转化为对集合的分析。不过，我们应该注意一点，就是要学会用概率论的语言来解释集合间的关系和运算。

有时用平面图形来表示事件间的关系及运算较为直观，事件 $A \cap B$，$A \cup B$，$A-B$，$\overline{A}$ 在图 1-1 中分别以阴影表出。

例 3　设 A、B、C 三个事件，则

(1)只有 A 发生可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}$。

(2)A、B、C 中恰有一个发生可表示为 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$。

(3)A、B、C 中至少有一个发生可以表示为 $A \cup B \cup C$。

或 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$。

(4)A、B、C 中恰有两个发生可以表示为 $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$。

(5)A、B、C 中不多于一个发生可以表示为 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$。

(6)A、B、C 中 A 发生，B、C 至少有一个不发生可以表示为 $A(\overline{B} \cup \overline{C})$ 或 $A\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C}$。

事件的运算满足下述规则（证明略）

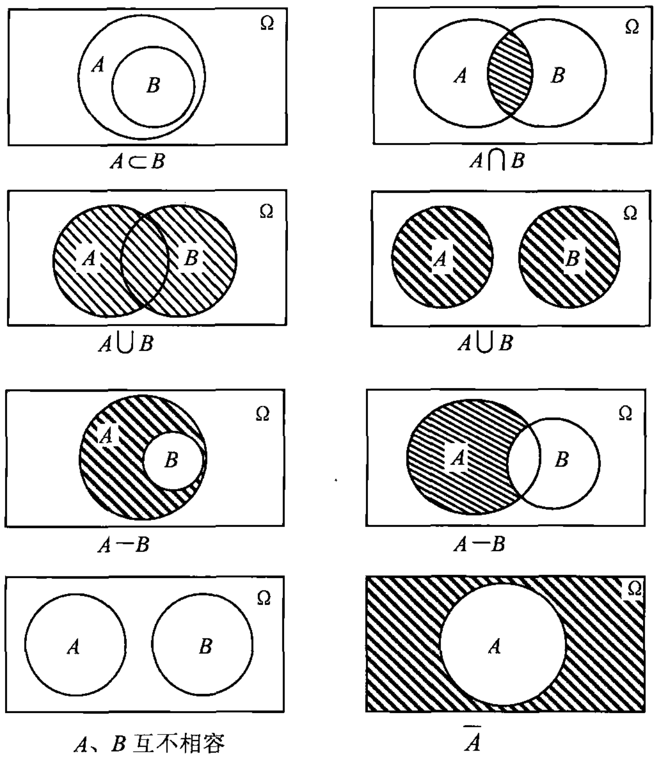


图 1-1

1. 交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$
2. 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$
3. 分配律 $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC, (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
4. 德摩根(DeMorgan)定理(对偶原则)

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

对于 n 个事件,甚至于对于可列个事件,德摩根定理也成立。

§1.2 概率的定义

随机事件就个别试验而言,其发生与否难以预料,但是在大量重复试验中,其发生的可能性的大小是可以度量的。我们把度量随机事件 A 发生可能性大小的数值称为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$。

在概率论的发展历史上,人们曾针对不同的问题,从不同的角度给出了概率的定义及计算概率的方法。现在,我们先研究概率的统计定义。

一、频率与概率

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率，记为 $f_n(A)$。

例 1 考察种子的发芽率。从一大批种子中分别抽取若干粒种子做发芽试验，其结果见表 1-1。

表 1-1

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.913	0.893	0.903	0.905

从表 1-1 中看出，种子发芽粒数的多少具有偶然性，但随着抽取种子粒数的增多，抽取种子次数的增加则可发现发芽率在 0.9 附近摆动。

例 2 历史上有不少人做过抛一枚硬币的试验来观察“正面向上”这一事件发生的规律，其结果见表 1-2。从表中看出“正面向上”的频率在 0.5 附近摆动。

表 1-2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
蒲　丰	4040	2048	0.5070
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述两例的统计结果看，在多次重复试验中，同一事件发生的频率虽不尽相同，但却在一固定的数值附近摆动，并随着试验次数的增加，逐渐稳定于这个固定的数值，称此为频率的稳定性。显然，频率稳定于较小值的事件发生的可能性较小，频率稳定于较大值的事件发生的可能性就较大。可见频率揭示了随机事件的统计规律性，据此给出概率的统计定义。

定义 1 在不变的一组条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生了 n_A 次。当 n 很大时，频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 稳定地在某一固定数值 p 附近摆动。且这种摆动幅度随着试验次数的增多愈来愈小，我们就称数值 p 为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$。

上述定义还提供了求某事件概率的一种手段，即当 n 足够大时，用它的频率作为概率的近似值，如一射手射击 500 次，中靶 200 次，我们就说他中靶的概率为 $\frac{2}{5}$。

易知频率具有下列性质：

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；　(2)$f_n(\Omega)=1$

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} f_n(A_k)$$

这三条性质的证明是很直观的，因为

(1)$0\leqslant n_A\leqslant n$，所以 $0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant 1$，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

(2)Ω 是必然事件，所以 $n_\Omega=n$，故 $f_n(\Omega)=1$。

(3)事件 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 发生就意味着 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生一个；又因为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，就是说它们不能两两同时发生，所以事件 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 在 n 次试验中发生的次数必定是各事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 发生的次数之和 $\sum_{k=1}^{n}n_{A_k}$，于是

$$f_n(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\frac{\sum_{k=1}^{n}n_{A_k}}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n_{A_k}}{n}=\sum_{k=1}^{n} f_n(A_k)$$

二、概率的一般定义

概率的统计定义虽然能直观地一定程度地反映事件 A 发生的可能性的大小，但有缺点，一是试验次数 n 要很大，我们不知道 n 多大才行；另外如果 n 很大，我们不一定能保证每次试验的条件都完全一样，难免有随机波动性。不过毕竟说明了刻划事件 A 发生可能性大小的数是客观存在的，并且有上述性质，我们就根据这些性质建立概率的一般定义。

定义 2　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 对应于一个实数 $P(A)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。如果 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2)$P(\Omega)=1$

(3)对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\tag{1.1}$$

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\tag{1.2}$$

以上三个条件分别称为概率的非负性、规范性及可加性。

三、概率的基本性质

利用概率的定义可以推出概率的一些重要性质。

性质 1 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$ (1.3)

事实上，由于 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\Phi$，由(1.1)式知 $P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$

由定义 2 有 $P(\Omega)=1$，于是 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

性质 2 $P(\Phi)=0$

事实上，只要在性质 1 中，令 $A=\Phi$，则 $\overline{A}=\Omega$，立刻得 $P(\Phi)=1-P(\Omega)=0$。

性质 3 设 A、B 为二事件，若 $A\subset B$，则

$P(B-A)=P(B)-P(A)$。 (1.4)

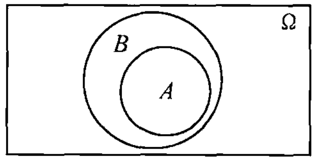


图 1-2

证明 由图 1-2 可知

$B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\Phi$

由(1.1)式得 $P(B)=p(A)+P(B-A)$

于是 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

由概率的非负性立即得下述推论。

推论 若 $A\subset B$，则 $P(B)\geqslant P(A)$。

性质 4 设任意两个事件 A、B，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (1.5)

证明 由图 1-3 可知

$A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且

$A(B-AB)=\Phi, AB\subset B$

由概率可加性及(1.4)式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

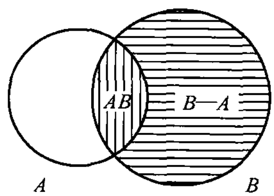


图 1-3

称(1.5)式为概率的加法公式，类似地有概率的一般加法公式。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个随机事件，用数学归纳法可以证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} p(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \quad (1.6)$$

当 A、B 互不相容时，(1.5)式可化为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

推论 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

例 3 求证 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$

证明 由图 1-4 知

$A\overline{B}=A-B=A-AB$