名师点金丛书

线性代数辅导

同济·第四版

同济大学 李伟 主编

内容归纳 方法提炼
题型集萃 同步自测
教材习题全解 考研试题精选

中央民族大学出版社

名师点金

线性代数辅导

同济·第四版

同济大学 李伟 主编

中央民族大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导/《线性代数辅导》编写组编. -北京:中央民族大学出版社,2005.8
(名师点金丛书)
ISBN 7-81108-079-6
Ⅰ.线.. Ⅱ.线... Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试—自学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 097171 号

名师点金丛书

主　　编　《线性代数辅导》编写组
责任编辑　小　路
封面设计　于　是
出 版 者　中央民族大学出版社
北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编:100081
电话:68472815(发行部)　　传真:68932751(发行部)
68932218(总编室)　　68932447(办公室)
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 者　**香河县新华印刷有限公司**
开　　本　850×1168(毫米)　1/32
印　　张　235
字　　数　3500 千字
版　　次　2006 年 7 月第 1 版　　2006 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-81108-079-6/H·101
定　　价　310.00 元

前　言

数学家常形象地把几何比作“女性”，细腻而舒展；将代数比作“男性”，有力而坚定。代数就是有效地运用运算律解决各类数学问题的学科。

线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题。线性关系即数学对象之间的关系是以一次形式来表示的，含有n个未知量的一次方程称为线性方程。线性关系问题简称线性问题，解线性方程组的问题是最简单的线性问题。其实，线性运算是十分朴素的，即

$$f(a+b)=f(a)+(b),\ f(\lambda a)=\lambda f(a).$$

它其实就是我们小学学过的分配律 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 的推广。因此从广义上讲，线性代数可称为“满足分配律的代数”。

在编写此书之前，我们先向大家介绍几种提高线性代数学习效率的方法：

一、纠正“学习线性代数无用”的错误认知。

学习不能只限于知识与方法，更重要的是要了解其中蕴涵的深刻思想，从而以不变应万变。线性代数的含义随着数学的发展而不断扩大，其思想与方法已经渗透到数学的许多分支，因此，我们不仅要研究单变量之间的关系，还要进一步研究多个变量之间的关系（向量的引入，形成了向量空间的概念。凡是线性问题都可以用向量空间的观点进行讨论。因此，向量空间及其线性变换，以及与此相联系的矩阵理论构成线性代数的中心内容），各种实际问题在大多数情况下可以线性化。因此，线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用。同时，它的计算思想与方法是计算数学的一个重要内容。

二、克服“线性代数难学”的恐惧心理。

任何一门课的学习首先要把握这门课的思想精髓和知识结构，其次要精心学好重点内容，最后才能做到融会贯通、举一反三。

三、消除“不喜欢繁杂计算”的懒惰情绪。

其实，只有在繁杂的计算中我们才能悟出运算的真谛和各种技巧的合理性，才能磨练坚强的毅力。我们知道，几乎所有重大的发现，都离不开潜心的钻研和反复推理。线性代数中最重要的内容就是行列式和矩阵。因此，熟悉各种运算技巧也相当重要。

结合以上所述的方法，我们编写了这本能体现我们的学习理念并帮助大学生学好线性代数的辅导书。

本书按照同济大学应用数学系《工程数学——线性代数》（第四版）的章节编排，不仅归纳了线性代数的基本思想与学习方法，而且配备了相应的同步自测题，还精选了历年考研真题，真正做到了一举多得。

我们相信：尽管数学之神是狡猾的，但是他不怀恶意。

编者

目　录

第一章　行列式

一、大纲要求

1. 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.

2. 掌握 n 阶行列式的定义及性质.

3. 了解代数余子式的定义及性质.

4. 会利用行列式的性质及按行（列）展开计算简单的 n 阶行列式.

5. 掌握克拉默法则.

二、主要内容总结

1. 全排列及其逆序数的定义

(1) 全排列：把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列.

(2) 逆序和逆序数：在一个排列（$i_1, i_2, \cdots i_s, \cdots i_n$）中，若 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，记作 $t(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，若 t 为奇数，则称（$i_1, i_2 \cdots, i_n$）为奇排列，若 t 为偶数，则称此排列为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

(1) 定义：n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中,$(p_1,p_2\cdots p_n)$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有排列 $(p_1,p_2\cdots p_n)$ 求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素,位于第 i 行第 j 列的元素 a_{aj} 叫做 D 的 (i,j) 元.

(2) 二阶和三阶行列式适用对角线法则

(3) 由 n 阶行列式的定义可得到一些特殊行列式:

(ⅰ) 上、下三角行列式等于主对角线上的元素之积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(ⅱ) 对角行列式等于对角线元素之积,即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(ⅲ) 对角行列式(次对角)为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

3. 对换

(1) 定义:在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的手续叫做对换,将相邻两个元素对换,叫做相邻对换.

(2) 定理 1:一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定理 2:n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^T a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots\cdots a_{p_n n}$$

其中 T 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数

4. 行列式的性质

(1) 性质 1:行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2) 性质 2:互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 性质 3:行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推 论:行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 性质 4:行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

(5) 性质 5:若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 性质 6:把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数,然后加到另一列(行)对应的元素上去一,行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 $c_i + kc_j$),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i + kc_j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j)$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$)

5. 行列式按行(列)展开

(1) 代数余子式：把 n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij} 为 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 引理：一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都是零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$

(3) 定理 3：行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即为行列式按行(列)展开法则，有

按第 i 行展开 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1、2\cdots, n)$

按第 j 列展开 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1、2\cdots, n)$

(4) 推论：行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，

即 $$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j$$

或 $$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ i \neq j$$

(5) 范德蒙行列式

n 阶范德蒙行列式的形式和结果为

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i\geqslant j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

6. 克拉默法则

克拉默法则：考虑含有 n 个方程的 n 元线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

当 $b_1,b_2\cdots b_n$ 全为零时，称为齐次线性方程组，否则，称为非齐次线性方程组.

（ⅰ）如果上述方程组的系数行列式 $D\neq 0$，那么，它有唯一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots n)$，其中 $D_i(i=1,2,\cdots n)$ 是把 D 中第 i 列元素用方程组的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

（ⅱ）如果线性方程组无解或有两个不同的解，那么，其系数行列式 $D=0$

（ⅲ）如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，那么，它只有零解，如果齐次线性方程组有非零解，那么，它的系数行列式必定等到于零.

三、典型题型与解题方法

题型1　排列逆序数的计算

【解题方法】 逆序和计算有两种方法：(1)$\tau(i_1i_2\cdots i_n)i_1$后边比 i_1 小的数的个数 $+\ i_2$ 后边比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+\ i_{n-1}$ 后边比 i_{n-1}小的数的个数；(2)$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2大的数的个数 $+\ i_3$前面比 i_3 大的数的个数 $i+\cdots+i_n$前面比 i_n大的数的个数.

【例 1】 求下列排列的逆序数,并确定其奇偶性

(1)21736854　　　　(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

解: (1) **解法一:**2 的后有 1 小于 2,故 2 的逆序数为 1,1 的后面没有小于 1 的数,1 的逆序数为 0,7 的后面有 3,6,5,4 小于 7,故 7 的逆序数 4,依此方法逐个计算,知排列逆序数为:

$$(21736854)=1+0+4+0+2+2+1+0=10,$$

偶排列.

解法二:1 的前面比 1 大的数有 1 个 2,故 1 的逆序数为 1,2 排在首位没有逆序,3 的前面有一个 7 比 3 大,逆序数为 1,依此计算可得:

$$\tau(21736854)=1+0+1+4+3+1+0+0=10$$

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,

由于$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性由 n 而定,故讨论如下:

当 $n=4k$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数

当 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数

当 $n=4k+2$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数

当 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数

综上,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,为偶排列,当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时此排列为奇排列,k 为任意非负整数.

【例 2】 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数为 k,问 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

解: 若排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_1 有 m_1 个逆序,则有$(n-1)-m$ 个顺序,即在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中关于 x_1 有$(n-1)-m_1$ 个逆序,若关于 x_2 有 m_2 个逆序,则有$(n-2)-m_2$个顺序,依此类推,关于 x_n 有 m_n 个逆序,则有$(n-n)-m_n$ 个顺序,而 $m_1+m_2+\cdots+m_n=k$,故

$x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数为 $\tau(x_n x_{n-1} \cdots x_1) = [(n-n)-m_n] + \cdots + [(n-2)-m_2] + [(n-1)-m_1] = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-k = \frac{1}{2}n(n-1)-k$.

【例 3】 选择 i 和 k，使(1)$1i25k4897$ 成为奇排列

(2)$1274i56k9$ 成偶排列

思路与提示： 此类问题，通常取小数在先，大数在后，如果符合要求，即为所求，否则另一种情况符合要求.

解： (1) 由题意 i,k 只有两种选择 $i=3,k=6$ 或 $i=6,k=3$，在第一种情况中 $\tau(132564897)=5$，即为所求.

(2) 由题意 i,k 可能选择 $i=3,k=8$ 或 $i=8,k=3$，在第一种情况中 $\tau(127435689)=5$，则第二种情况符合，从而有 127485639 成偶排列.

题型 2　n 阶行列式的概念

【解题方法】 对于 n 阶行列式的概念要注意以下几点：

(1) 每一项的构成是不同行、不同列的几个元素相乘，n 阶排列总数是 $n!$，所有排列求和，共有 $n!$ 项.

(2) 每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定符号.

(3) 行列式的值最终是一个具体的数.

【例 4】 写出 4 阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的项

思路与提示： 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和，含 $a_{11}a_{23}$ 的项应当有形式 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$，由此分析 j_3,j_4 的取值及该项所带的正负号.

解： 因为含 $a_{11}a_{23}$ 的项可写成 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$，其中 $13j_3j_4$ 是 1 至 4 的排列，所以 j_3,j_4 取自 2 和 4，可见共有两项含 $a_{11}a_{23}$，

若 $j_3=2,j_4=4$，则 $\tau(1324)=1$，为奇排列，故该项带负号为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

若 $j_3=4,j_4=2$，利用对换改变排列的奇偶性可知，$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 带正号，即 4 阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【例 5】 对于行列式 $f(x)$，

若 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数是多少？

思路与提示： 四阶行列式，每个元素都有 x，首先想到 $f(x)$ 是 4 次多项式，由于组成 x 的四次幂的项有若干个，则它们的和有可能为零，可将行列式进行化简.

解： 由于原行列式第 2,3,4 行各元素中 x 前的系数均是第一行各元素中 x 系数的倍数，将第一行的 $-i$ 倍加到第 i 行（$i=2,3,4$）可得：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

由行列式定义知，$f(x)$ 是一个二次多项式，故 $f(x)$ 只能有两个根.

【例 6】 写出 5 阶行列式 $D_5=|a_{ij}|_{5\times5}$ 中包含 a_{13}，a_{25} 并带正号的项.

解： D_5 中包含 a_{13} 及 a_{25} 的所有项数为 5 级排列 $35j_3j_4j_5$ 的个数，这里 j_3，j_4，j_5 只能取 1,2,4 三个数，共有 6 个排列：124；142；214；241；412；421，因而 $35j_3j_4j_5$ 能组成 6 个 5 级排列：35124；35142；35214；35412；35421，相应的项分别为

$$(-1)^{T(35124)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}=-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54};$$

$$(-1)^{T(35142)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}=a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52};$$