



中国古代科技名著译注丛书

# 九章算术 译注

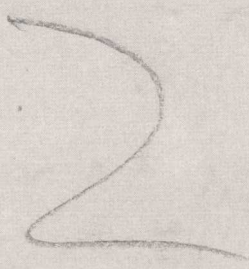
郭书春 译注

上海古籍出版社

Translation and Annotation of

*Jiuzhang Suanshu*

or the Nine Chapters on Mathematical Procedures





中国古代科技名著译注丛书

# 九章算术 译注

郭书春 译注

Translation and Annotation of

*Jiuzhang Suanshu*

or the Nine Chapters on Mathematical Procedures

上海古籍出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

九章算术译注/郭书春译注. —上海:上海古籍出版社,2009.12

(中国古代科技名著译注丛书)

ISBN 978 - 7 - 5325 - 5433 - 1

I. 九... II. 郭... III. ①数学—中国—古代  
②九章算术—译文③九章算术—注释 IV. O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 163172 号

本书出版得到国家古籍整理出版专项经费资助

中国古代科技名著译注丛书

韩寓群 徐传武 主编

九章算术译注

郭书春 译注

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行  
上海古籍出版社

(上海瑞金二路272号 邮政编码200020)

(1) 网址:[www.guji.com.cn](http://www.guji.com.cn)

(2) E-mail:[guji@guji.com.cn](mailto:guji@guji.com.cn)

(3) 易文网网址:[www.ewen.cc](http://www.ewen.cc)

新华书店上海发行所发行经销 上海展强印刷有限公司印刷

开本 890 × 1240 1/32 印张 16.75 插页 5 字数 450,000

2009年12月第1版 2009年12月第1次印刷

印数:1-2,300

ISBN 978 - 7 - 5325 - 5433 - 1

N · 10 定价:58.00元

如有质量问题,请与承印公司联系

## 出版说明

中华民族有数千年的文明历史，创造了灿烂辉煌的古代文化，尤其是中国的古代科学技术素称发达，如造纸术、印刷术、火药、指南针等，为世界文明的进步作出了巨大的贡献。英国剑桥大学凯恩斯学院院长李约瑟博士在研究世界科技史后指出，在明代中叶以前，中国的发明和发现，远远超过同时代的欧洲；中国古代科学技术长期领先于世界各国：中国在秦汉时期编写的《周髀算经》比西方早五百年提出勾股定理的特例；东汉的张衡发明了浑天仪和地动仪，比欧洲早一千七百年；南朝的祖冲之精确地算出圆周率约在 3.141 592 6—3.141 592 7 之间，这一成果比欧洲早一千多年……

为了让今天的读者能继承和发扬中华民族的优秀传统——勇于探索、善于创新、擅长发现和发明，在上世纪八十年代，我们抱着“普及古代科学技术知识，研究和继承科技方面的民族优秀文化，以鼓舞和提高民族自尊心与自豪感、培养爱国主义精神、增进群众文化素养，为建设社会主义的物质文明和精神文明服务”的宗旨，准备出版一套《中国古代科技名著译注丛书》。当时，特邀老出版家、科学史学者胡道静先生（1913—2003）为主编。在胡老的指导下，展开了选书和组稿等工作。

《中国古代科技名著译注丛书》得到许多优秀学者的支持，纷纷担纲撰写。出版后，也得到广大读者的欢迎，取得了良好的社会效益。但由于种种原因，此套丛书在上个世纪仅出版了五种，就不得不暂停。此后胡老故去，丛书的后继出版工作更是困难重重。为了重新启动这项工程，我社同山东大学合作，并得到了山东省人民政府的大力支持，特请韩寓群先生、徐传武先生任主编，在原来的基础上，重新选定书目，重新修订编撰体例，重新约请作者，继续把这项工程尽善尽美地完成。

在征求各方意见后，并考虑到现在读者的阅读要求与十余

年前已有了明显的提高，因此，对该丛书体例作了如下修改：

一、继承和保持原体例的特点，重点放在古代科技的专有术语、名词、概念、命题的解释；在此基础上，要求作者运用现代科学的原理来解释我国古代的科技理论，尽可能达到反映学术界的现有水平，从而展示出我国古代科技的成就及在世界文明史上的地位，也实事求是地指出所存在的不足。为了达到这个新的要求，对于已出版的五种著作，此次重版也全部修订，改正了有关的注释。希望读者谅解的是，整理古代科技典籍在我国学术界还是一个较年轻、较薄弱的一门学科，中国古代科技典籍中的许多经验性的记载，若要用现代科学原理来彻底解释清楚，目前还有许多困难，只能随着学术研究的进步而逐步完成。

二、鉴于今天的读者已不满足于看今译，而要阅读原文，因此新版把译文、注释和原文排列在一起，而不像旧版那样把原文仅作为附录。

三、为了方便外国友人了解古老的中国文化，我们将书名全部采用中英文对照。

四、版面重新设计，插图在尊重原著的前提下重新制作，从而以新的面貌，让读者能愉快地阅读。

五、对原来的选目作了适当的调整，并增加了新的著作。

《中国古代科技名著译注丛书》的重新启动，得到了许多老作者的支持，特别是潘吉星先生，不仅提出修订体例、提供选题、推荐作者等建议，还慨然应允承担此套丛书的英文书名的审核。另外，本丛书在人力和财力上都得到了山东省人民政府和山东大学的大力支持。在此，我们向所有关心、支持这项文化工程的单位和朋友们表示衷心的感谢；同时希望热爱“中国古代科技名著译注丛书”的老读者能一如既往地支持我们的工作，也期望能得到更多的新读者的欢迎。

上海古籍出版社  
二〇〇七年十一月

# 前 言

## 一、《九章算术》及刘徽注、李淳风等注

《九章算术》九卷，《算经十书》<sup>①</sup>之一，是中国传统数学最重要的著作，历来被尊为算经之首。它奠定了中国传统数学的基本框架，不仅是数学成为中国古代最为发达的基础科学学科之一的代表作，而且深刻影响了此后二千余年间中国和东方的数学发展。它的成书既标志着中国（还有后来的印度和阿拉伯地区）取代地中海沿岸的古希腊成为世界数学研究的中心，也标志着以研究数量关系为主、以归纳逻辑与演绎逻辑相结合

---

<sup>①</sup> 《算经十书》，中国传统数学奠基时期数学著作的总集。《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《缀术》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》在唐初称为“十部算经”。唐中叶之后，《夏侯阳算经》、《缀术》亡佚。北宋元丰七年（1084）秘书省刊刻十部算经，以唐中叶一部实用算术书充任《夏侯阳算经》，对《缀术》则付之阙如。秘书省刻本今皆不存。1200—1213年南宋天算学家鲍澣之翻刻了北宋秘书省刻本，同时还刊刻了《数术记遗》，世称南宋本。到清初南宋本仅存《周髀算经》、《九章算术》（半部）、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《缉古算经》和《数术记遗》、《夏侯阳算经》等七部半。1684年汲古阁主人毛扆影钞了这七部半算经，世称汲古阁本。后来汲古阁本流入清宫，藏天禄琳琅阁。1932年，北平故宫博物院影印，收入《天禄琳琅丛书》，原本现藏台北“故宫博物院”。清中叶南宋本《缉古算经》、《夏侯阳算经》不知流落何处。1980年北京中华书局影印了尚存的南宋本算经，称为《宋刻算经六种》。明初修《永乐大典》，将此前算书分类抄入，现仅存卷16343，16344。清乾隆年间修《四库全书》，戴震从《永乐大典》辑录出《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《五经算术》和《夏侯阳算经》七部算经，并加校勘（其中《周髀算经》以明刻本为底本，以辑录本参校）。先后收入《武英殿聚珍版丛书》和《四库全书》。1776—1777年戴震分别以汲古阁本和辑录本为底本校勘汉唐算经，由孔继涵刊刻，始称《算经十书》，世称微波榭本。钱宝琮以微波榭本为底本校点《算经十书》，1963年由中华书局出版，世称钱校本。郭书春等点校《算经十书》，其中《周髀算经》等以南宋本或汲古阁本为底本，《海岛算经》、《五经算术》以《永乐大典》的戴震辑录本为底本，1998年由辽宁教育出版社出版，2001年台湾九章出版社出版了其修订本。

的算法倾向取代以研究空间形式为主、以演绎逻辑的公理化倾向，成为世界数学发展的主流。

《九章算术》共分九章：(1) 方田——刘徽说“以御田畴界域”，有各种面积公式，还有世界上最早的分数四则运算法则；(2) 粟米——刘徽说“以御交质变易”，是以今有术为主体的比例算法；(3) 衰分——刘徽说“以御贵贱禀税”，是比例分配算法，以及若干异乘同除问题；(4) 少广——刘徽说“以御积幂方圆”，是面积与体积的逆运算，最重要的是提出了世界上最早的开平方与开立方程序；(5) 商功——刘徽说“以御功程积实”，是各种体积公式和土方工程工作量的分配算法；(6) 均输——刘徽说“以御远近劳费”，是赋税的合理负担算法，及各种算术难题；(7) 盈不足——刘徽说“以御隐杂互见”，是盈亏类问题的算法及其在其他算术问题中的应用；(8) 方程——刘徽说“以御错糅正负”，是现今之线性方程组解法与正负数加减法则；(9) 勾股——刘徽说“以御高深广远”，是勾股定理、解勾股形、勾股容方、勾股容圆以及简单的测望问题。它含有近百条十分抽象的术文即公式、解法，以及 246 个例题。其中分数理论，比例和比例分配、盈不足、开方等算法，线性方程组解法，正负数加减法则及解勾股形方法等，都超前其他文化传统几百年甚至千余年，是具有世界意义的重大成就。

《九章算术》成书之后，中国传统数学著述基本上采取两种方式，一是以《九章算术》为楷模撰著新的著作，一是为《九章算术》作注，两者都取得了杰出的成就<sup>①</sup>。历史上到底出现过多少种注释《九章算术》的著作，已不可考。目前学术界公认最重要的并且在不同程度上传世的有魏景元四年（263）的刘徽注，7 世纪初的李淳风等的注释，11 世纪上半叶北宋贾宪的

---

<sup>①</sup> 郭书春《我国古代数学名著〈九章算术〉》，《科技日报》，1987 年 10 月 7 日。

《黄帝九章算经细草》<sup>①</sup>，以及南宋景定二年（1261）杨辉的《详解九章算法》。前二者与《九章算术》一体行世。因此，人们常说的《九章算术》，有狭义和广义两种涵义。狭义地说，仅指西汉张苍（？—前152）、耿寿昌（前1世纪）等编纂的《九章算术》本文。广义地说，还包括刘徽注与李淳风等的注释。一般说来，言《九章算术》的编纂、成就、特点等，常用狭义的涵义，而言《九章算术》的版本、校勘等，则常用广义的涵义。

刘徽注是现存最早，成绩最大的《九章算术注》。刘徽以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的算法，奠定了中国传统数学的理论基础，他还在世界数学史上首次在数学证明中引入极限思想和无穷小分割方法。刘徽注的完成标志着中国传统数学发展到一个新的阶段。

李淳风等注释是李淳风与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒等共同撰写的。除了均输章“负笼”问的注释有点新意，及少广章开立圆术的注释引用祖暅之开立圆术，保存了祖暅之原理及祖暅之解决球体积的方法，极为宝贵外，其他注释多是重复刘徽注，几无新意。更奇怪的是，李淳风等注释多次指责刘徽。事实证明，所有这些地方，错误的不是刘徽，而是李淳

---

① 北宋贾宪《黄帝九章算经细草》九卷，是宋元数学高潮的奠基性著作。贾宪总结刘徽、《孙子算经》等对《九章算术》开方法的改进，提出“立成释锁法”，将传统开方法推广到开任意高次方，并首创“开方作法本源”作为其“立成”。“开方作法本源”今称贾宪三角，阿拉伯地区和欧洲都晚出几百年，西方称为帕斯卡三角。他又创造增乘开方法，是以随乘随加代替一次使用贾宪三角的系数，更加简捷的开方法，阿拉伯和西方也晚出数百年。贾宪还进一步抽象了《九章算术》的算法。自1842年清郁松年刊刻《宜稼堂丛书》本《详解九章算法》以后140余年间，学术界都认为贾宪《黄帝九章算经细草》已佚，仅某些片段被《详解九章算法》抄录，《详解九章算法》仅含有西汉《九章算术》本文、魏刘徽注、唐李淳风等注释和杨辉详解四种内容。实际上，《详解九章算法》卷三十一系为贾宪《黄帝九章算经细草》作详解，除以上四种内容外还抄录了贾宪的细草。因此，贾宪的“细草”与杨辉的“详解”一样，今存衰分章后半章、少广章（《永乐大典算书》，见郭书春主编《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册。河南教育出版社，1993年版）、商功章（约半章）、均输章、盈不足章、方程章、勾股章（《详解九章算法》，见郭书春主编《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册），因而二者都存约三分之二。见郭书春《贾宪〈黄帝九章算经细草〉初探》，《自然科学史研究》第8卷（1988），第3期。



风等。李淳风等对刘徽的指责，徒然表明李淳风等无法理解刘徽注的理论贡献及刘徽提出的新方法的重大意义，反映了李淳风等数学水平的低下。这是隋唐时期中国数学比魏晋南北朝落后的一个侧面。

## 二、《九章算术》的体例与编纂

### (一)《九章算术》的体例

《九章算术》之名在现存资料中最先见之于东汉灵帝光和二年(179)的大司农斛、权的铭文中：

依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，用齐七政，令海内都同<sup>①</sup>。

这丝毫不意味着它在东汉才成书。事实上，它在公元2世纪已成为制造度量衡器的经典，因此，它的编纂成书要早得多。

为了解决《九章算术》的编纂问题，首先要分析它的体例。

许多人说《九章算术》是一部应用问题集。一般说来，“应用问题集”的提法没有多少问题。但是，如果这一提法会引起误解，那就另当别论了。一个明显的事实是，许多没有读过《九章算术》或者读过而不求甚解的人便从“《九章算术》是一部应用问题集”的提法出发想当然地得出《九章算术》都是一题、一答、一术，而且“术”都是应用问题的具体解法，因而没有数学理论的看法。这根本不符合《九章算术》的实际情况，因而是十分错误的。

关于《九章算术》的术文与题目的关系，大体说来有以下几种情形<sup>②</sup>：

<sup>①</sup> 国家计量总局编《中国古代度量衡图集》，第97页。文物出版社，1984年版。

<sup>②</sup> 郭书春《关于中国传统数学的“术”》，见李文林等主编《数学与数学机械化》。山东教育出版社，2001年版，第441—456页。此文在郭书春《古代世界数学泰斗刘徽》（山东科学技术出版社，1992年版。台北明文书局，1995年修订版。）的有关论述基础上作了某些修正。

### 1. 一类问题的抽象性术文统率若干例题

这类内容往往是一术多题或一术一题。这是《九章算术》的主体部分所采取的形式。这里又有不同的情形：

(1) 给出一个或几个例题，然后给出一条或几条抽象性术文；例题中只有题目、答案，没有具体演算的术文。比如方田章列出 3 个例题后给出了合分术（见本书第 20—21 页），此术是这 3 个例题共有的，而不是哪个例题特有的。有的著述从《九章算术》都是“一题、一答、一术”的偏见出发，把合分术说成是方田章第九题的术文，显然是不恰当的。《九章算术》的方田章的全部，粟米章的 2 条经率术、其率术、反其率术，少广章的开方术、开圆术、开立方术、开立圆术，商功章除城、垣、堤、沟、塹、渠术与刍童、曲池、盘池、冥谷术之外的内容，均输章的均输粟术、均输卒术、均赋粟术等四术，盈不足章的盈不足、两盈两不足术、盈适足不足适足术等 5 术，勾股章的勾股术、勾股容方、勾股容圆、测邑 5 术等，都属于这类情形，共有 73 术，106 个例题（商功章还有 6 术及其例题附于其他题目之后，未计在内）。

(2) 先给出抽象的术文，再列出几个例题；例题只有题目、答案，亦没有演算术文。商功章城、垣、堤、沟、塹、渠术及其例题（见本书第 168—175 页），刍童、曲池、盘池、冥谷术及其 4 个例题（见本书第 208—216 页），都属于这种情形。共 2 术，10 例题。

(3) 先给出抽象性的总术，再给出若干例题；例题包含了题目、答案、术文三项，其中的术文是总术的应用。粟米章今有术及 31 个粟米互换题目，衰分章的衰分术、返衰术及其 9 个例题，少广章少广术及其 11 个例题，盈不足章使用盈不足术解决的 11 个一般算术问题，以及方程章方程术、正负术、损益术及其 18 个例题，共 7 术（盈不足术等 5 术不再计算在内），80 个例题。

这三种情形共 82 术，196 道题目，约占全书的 80%。在这里，术文是中心，是主体，题目是作为例题出现的，是依附于

术文的，而不是相反。术文都是非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序。因此，我们将之称为术文统率例题的形式。

## 2. 应用问题集的形式

这类内容往往是一题一术。其术文的抽象程度也有所不同：

(1) 关于一种问题的抽象性术文。比如均输章“凫雁”问，其术文（见本书第 276 页）虽未离开日数这种对象，但没有具体数字的运算，可以离开题目而独立存在，将凫、雁换成其他的鸟类或运动的器物，将南海、北海换成其他的地点，将七、九换成其他数字，都可以应用这条术文。就是说，它对同一种问题都是适应的。在均输章此问之下，长安至齐、牝牡二瓦、矫矢、假田、程耕、五渠共池等的术文，勾股章的持竿出户等问也都是这类性质的术文。此外，粟米章今有术的 31 个例题，衰分章衰分术、返衰术的 9 个例题的术文，也都有一定的抽象性。

(2) 具体问题的算草。《九章算术》中衰分章的非衰分题目，均输章的非均输类的大部分题目，勾股章的解勾股形题目及“立四表望远”等 4 个题目都是如此，所有术文都以题目的具体数字入算，它是不能离开题目而独立存在的。

《九章算术》采取应用问题集形式的部分共有 50 个题目（今有术、衰分术、返衰术所属的 40 个例题当然不计在内），全部是衰分章的非衰分类问题，均输章的非典型均输类问题，以及勾股章的解勾股形和立四表望远等问题。显然，这些内容都是以题目为中心的，术文只是所依附的题目的解法甚至演算细草，计算程序是正确的，尽管第（1）种的术文，对某一种问题具有普适性，不具有《九章算术》大多数术文那样高度的抽象性、广泛的普适性等特点。

不言而喻，不宜将《九章算术》笼统地归结为“应用问题集”，更不能说它都是“一题、一答、一术”。“一题、一答、一术”反映了《孙子算经》的情况，而不符合《九章算术》的实际。我们认为，数学史上起码存在过三种不同体例的著作，一

是像欧几里得《几何原本》那样，形成一个公理化体系；一是像丢番图的《算术》那样的应用问题集，正如德国数学史家汉克尔所说的，研究了丢番图的 100 个问题后，去解第 101 个问题，仍然感到困难，中国的《孙子算经》等著作也是如此；显然，《九章算术》的主体部分，既不像欧几里得的《几何原本》，也不像丢番图的《算术》和《孙子算经》，而是第三种体例，即以算法（术）为中心，算法统率例题的形式。

由上面的分析不难看出，《九章算术》的术不是一个层次的。它起码可以分成三个不同的层次：

第一个层次是一类问题的术，尽管其表达方式有差异，却有几个共同特点：术文是中心，是主体，题目依附于术文，作为例题出现；作为中心的术文非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序。

第二个层次是一种问题的比较抽象的术。

第三个层次是具体问题的算草。

这些抽象的和比较抽象的术文，当然是数学理论的体现。有的著述笼统地说《九章算术》共有多少多少术，不作具体分析，不仅没有什么意义，而且会误导读者。

## （二）《九章算术》的编纂

关于《九章算术》的编纂，不仅涉及《九章算术》本身，而且涉及某些历史人物的定位，还关系到对先秦数学的认识，是中国数学史研究中的重大问题。

### 1. 《九章算术》编纂诸说

关于《九章算术》的编纂与成书年代，历代学者说法不一，在 20 世纪还一直争论不休，归纳起来，主要有以下几种说法：

（1）刘徽的西汉张苍、耿寿昌在先秦遗文基础上删补而成说。刘徽《九章算术注序》说：

周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司

农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

这就是说，“九数”在先秦发展成《九章算术》，因暴秦焚书而散坏，西汉张苍、耿寿昌收集遗文，先后删补而成为现在的《九章算术》。在现存资料中，这是关于《九章算术》编纂的最早记载。

(2) 西周初周公所作。

唐初王孝通《上缉古算经表》说：“昔周公制礼而有九数之名，窃寻九数即《九章算术》是也。”<sup>①</sup>南宋鲍澹之、清屈曾发等亦持这种看法。显然，这种看法是将刘徽的“九数之流，则《九章》是矣”修正成“九数”就是《九章算术》而得出的看法。

(3) 黄帝、隶首所作。

唐贗本《夏侯阳算经》说：“黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》。”<sup>②</sup>北宋贾宪著《黄帝九章算经细草》，其书名冠以“黄帝”，当然亦认为《九章算术》系黄帝或隶首所作。南宋荣棨、元莫若等皆持此说。

(4) 否定张苍删补《九章算术》，西汉中叶之后成书诸说。

清戴震说：“今考书内有长安、上林之名。上林苑在武帝时，苍在汉初，何缘预载？知述是书者，在西汉中叶后矣。”<sup>③</sup>戴震此说一出，张苍未参与删补《九章算术》，似成定论。尽管钱宝琮发现汉高祖时已有上林苑<sup>④</sup>，然而他并未由此推翻戴震的

① 唐王孝通《缉古算经》（郭书春点校），载郭书春等点校《算经十书》，辽宁教育出版社（简体字本）1998年版；台北九章出版社（繁体字本）2001年版。

② 唐贗本《夏侯阳算经》（郭书春点校），载郭书春等点校《算经十书》，辽宁教育出版社（简体字本）1998年版；台北九章出版社（繁体字本）2001年版。

③ 清戴震《九章算术提要》，载《武英殿聚珍版丛书》本《九章算术》。见郭书春主编《中国科学技术典籍通汇·数学卷》，第1册，第95页。河南教育出版社，1993年版。又，郭书春汇校《九章算术》（增补版）附录二。辽宁教育出版社、台湾九章出版社，2004年版。

④ 实际上，秦始皇时便有上林苑。见《史记·秦始皇本纪》（中华书局，1959年版）。

看法，反而将《九章算术》的成书时代更向后推，定在公元1世纪下半叶<sup>①</sup>。此后论者多在西汉中叶至东汉中叶之间各抒己见。有西汉中叶齐人所作说，有公元前一世纪成书说，有公元元年前后新莽时刘歆完成说，有公元一世纪下半叶成书说，也有马续编纂《九章算术》说。其中影响比较大的是钱宝琮的看法与近年李迪提出的刘歆完成说<sup>②</sup>。

第(2)、(3)种说法是不必认真对待的，值得重视的是第(1)、(4)种说法。

我们认为刘徽的说法最为可靠。第(4)种说法的各种见解尽管有不同程度的考证，但都不足以推翻刘徽的论断；相反我们有充分证据说明刘徽的话是言之有据的。

为了正确解决这个问题，有一个态度问题必须首先解决。这就是，今天的研究者不能将刘徽关于《九章算术》编纂的论述与近人、今人关于《九章算术》成书的一些猜测放在同等的地位上来考察。只有首先驳倒刘徽，才能再考虑其他的说法。因为刘徽的话是在《九章算术》成书二三百多年后，而戴震等人的话则在二千多年之后。刘徽去古未远，他不仅能师承前贤关于《九章算术》编纂的可靠说法，而且能看到比近人、今人多得多的资料。如果找不到刘徽的话与历史事实有矛盾之处，就只能相信刘徽的话，其他的说法都是无稽之谈。为了彻底解决这个问题我们着重分析“九数”与《九章算术》的关系，以及《九章算术》所反映的物价所处的时代。

## 2. “九数”与《九章算术》

### (1) “九数”本事

不管人们对《九章算术》编纂的看法多么相左，但都不否认《九章算术》与“九数”有联系。“九数”见之于《周礼》。

<sup>①</sup> 钱宝琮《戴震算学天文著作考》，载《浙江大学科学报告》，第1卷第1期，1934年。郭书春、刘钝主编《李俨钱宝琮科学史全集》，第9册。河南教育出版社，1998年版，第159—160页。

<sup>②</sup> 李迪《中国数学通史·上古到五代卷》，江苏教育出版社，1997年版。

《周礼·地官·司徒》云：

保氏掌谏王恶而养国子以道，乃教之六艺。一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。

东汉郑玄（127—200）引郑众（？—83）《周礼注》曰：

九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、夕桀、勾股也<sup>①</sup>。

唐陆德明认为“夕桀”系衍文。郑众认为方田至旁要是先秦固有的数学门类，重差、勾股是汉代发展起来的。

## （2）先秦典籍与“九数”

从春秋战国之交起，铁器在手工业和农业中的使用越来越普遍，大大促进了生产力的发展。王权衰微，整个社会经历着大变革，经济关系和政治结构也不断在改革。商、西周普遍实行的井田制开始解体。齐桓公时实行按亩征收租税，鲁在宣公十五年（前594）宣布实行“初税田”，履亩而税的实物租税制逐步取代力役租税制。这就需要准确测算耕地面积，当然会促进面积计算方法的进步，同时，比例和比例分配方法也会因此而发展。战国时代，农业、手工业和商业得到更大发展。与此相适应，春秋战国时期的思想文化和学术也发生了变革。春秋时期“学在官府”的局面被打破，学术下移，畴人四散，私学兴起。到战国时，思想界出现了百家争鸣的繁荣局面。诸子互相辩诘，促进了学术的发展，提高了人们的抽象思维能力。这些都直接或间接刺激了数学的发展。西周初年的“九数”发展到春秋战国，从内容到方法，都发生了大的飞跃，成为二郑所说的九个分支。而且九个分支所属的算法大都是抽象性比较高的，是先秦人们抽象思维能力较强的反映。《左传》有两次筑城

<sup>①</sup> 《周礼注》，载《十三经注疏》，中华书局，1980年版。本书凡引用《周礼》文字，均据此。

的记载，一次是宣公十一年（前 598），“令尹芳艾猎城沂，使封人虑事，以授司徒。量功命日，分财用，平板干，称畚筑，程土物，议远迹，略基趾，具饟粮，度有司。事三旬而成，不愆于素。”一次是昭公三十二年（前 510），“己丑，士弥牟营成周，计丈数，揣高卑，度厚薄，仞沟洫，物土方，议远迹，量事期，计徒庸，虑财用，书饟粮，以令役于诸侯。属役赋丈，书以授帅，而效诸刘子。韩简子临之，以为成命。”<sup>①</sup>其中“具饟粮”、“书饟粮”涉及粟米问题，“分财用”、“虑财用”要用到衰分方法，“程土物”、“物土方”、“仞沟洫”要用到商功类的体积计算方法甚至是测望方法，而“议远迹”、“计徒庸”、“量功命日”还要用到包括均输在内的其他数学方法。中国传统数学与生俱来的密切联系实际的特点在这两次筑城中也得到充分的体现。

实际上，先秦典籍和出土文物中还有若干九数内容的蛛丝马迹。比如《管子·问篇》云“人之开田而耕者几何家”<sup>②</sup>，《商君书·算地》说“今世主欲辟地治民而不审数，臣欲尽其事而不立术，故国有不服之民，生有不令之臣”<sup>③</sup>，都要用到“方田”计算各种形状的田地的方法。《管子·小匡》载管仲答桓公云“相地相衰其政，则民不移矣”，按不同田地的好坏分等收税自然是衰分问题。井田制虽然瓦解，但以正方形来衡量田地的面积是最直观的。当土地不是正方形时，则要截长补短化为正方形。如《墨子·非攻》载墨子说古者汤封于亳，文王封于歧周，都是“绝长继短，方地百里”<sup>④</sup>，《孟子·滕文公上》云“今滕绝长补短，将五十里也”<sup>⑤</sup>。这是少广术的内容，并进而讨论乘方的逆运算——开方法。《管子·度地》谈到水土工程时，说春分

① 《春秋左氏传》，载《十三经注疏》。中华书局，1980年版。

② 颜昌峣《管子校释》，岳麓书社，1992年版。本前言凡引用《管子》原文，均据此。

③ 蒋礼鸿《〈商君书〉锥指》，中华书局，1986年版。

④ 孙诒让《墨子间诂》，上海书店，1991年。本前言凡引用《墨子》原文，均据此。

⑤ 《孟子》，载《十三经注疏》。中华书局，1982年版。本书凡引用《孟子》文字，均据此。



之后，“夜日益短，昼日益长，利于作土功之事”，所以人们要区分四季的“程功”。“均输”并不是汉武帝太初元年开始实行的，《周礼》“均人掌均地政、均地守、均地职、均人民牛马车犂之力政”，显然是均输的思想。《管子》云“上下相命，若望参表，则邪者可知也”，应是旁要的方法。

学术界公认，《算数书》的绝大多数问题是秦和先秦的<sup>①</sup>，其中有方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足等类型的问题，还使用了“正算”和“负算”等概念说明医生治病的问题。岳麓书院所藏秦简《数书》也有类似的内容<sup>②</sup>。

### (3) “九数”与《九章算术》

先秦“九数”与《九章算术》的章名相比较，只有差分、赢不足、旁要三项有异，后者分别作衰分、盈不足、勾股。其中前两者含义无疑是一样的：“衰”和“差”（cī）都是不同差别等级之义，“赢”和“盈”都是多余的意思，它们可以分别互训。“旁要”和“勾股”的名称差异较大，但据北宋贾宪的提示，旁要包括勾股术、勾股容方、容圆和简单的测望问题（主要是测邑方诸问）等内容<sup>③</sup>。

前面关于《九章算术》体例的分析说明，其中采取术文统率例题形式的三种情形共 82 术，196 问，覆盖了方田、粟米、少广、商功、盈不足、方程等六章的全部，和衰分、均输章的衰分、均输问题，以及勾股章的勾股术、勾股容方、勾股容圆、测邑亦即所谓“旁要”问题。而采取应用问题集形式的内容是余下的衰分章的非衰分类问题、均输章中的非均输类问题，以及勾股章解勾股形和立四表望远等问题。这部分内容不仅体例、风格与术文统率例题的部分完全不同，而且衰分章、均输章中这些题目的性质与所在章的篇名也不协调，不伦不类，有明显

① 彭浩《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001 年版。

② 陈松长《岳麓书院所藏秦简综述》，载《文物》，2009 年第 3 期。

③ 郭书春《古代世界数学泰斗刘徽》，台北明文书局，1995 年繁体字修订版。