21世纪高职高专通用教材

经济数学基础

潘　新　蔡奎生　主编

苏州大学出版社

21世纪高职高专通用教材

经济数学基础

主编　潘　新　蔡奎生

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/潘新,蔡奎生主编.—苏州:苏州大学出版社,2010.7
21世纪高职高专通用教材
ISBN 978-7-81137-504-6

Ⅰ.①经… Ⅱ.①潘…②蔡… Ⅲ.①经济数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第142102号

经济数学基础
潘 新 蔡奎生 主编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号 邮编:215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路58号 邮编:214217)

开本 787 mm×1 092 mm 1/16 印张 21.25 字数 530 千
2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-504-6 定价:35.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

《经济数学基础》编委会名单

主　编	潘　新	蔡奎生		
副主编	殷建峰	顾霞芳		
编　委	潘　新	蔡奎生	顾霞芳	魏彦睿
	殷建峰	殷冬琴	顾莹燕	顾振华

编写说明

教育改革在不断地深入与发展，为了满足新形势下高等职业教育对于数学这一基础学科的要求，我们结合当前高职高专院校对于经济数学教材的使用情况，取长补短，集思广益，编写了这本经济数学教材．在编写时，我们对过去一些传统的观念进行了力度较大的改革，力求简化理论的叙述、推导和证明，力求直观，注重实际应用．

我们本着“必需、够用”的原则，对于必备的基础理论知识等方面的内容，主要给出概念的定义，有关定理的条件和结论，一般不进行严格的推导和证明，仅在必要时给出直观、形象的解释和说明，把重点放在实际计算和应用等方面，以强化学生解决实际问题的能力．

本教材的主要内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、线性代数初步、概率论基础及数理统计初步．另外，在每节配备了一定量的习题，在每章配备了小结和自测题．书后对于上述题目均给出了答案或提示，以便于学生及时对所学知识进行检验．

本书主编为潘新、蔡奎生，副主编为殷建峰、顾霞芳，参加编写的有魏彦睿、殷冬琴、顾莹燕 、顾振华．唐哲人、李鹏祥对本书进行了校对和整理．

本教材的构思、企划得到了同行、专家和兄弟院校的大力支持，在此表示衷心的感谢．在编写过程中，我们力求完善，但错误和不当之处在所难免，还望各位同行、专家多加批评和指正．

《经济数学基础》编写组

CONTENTS 目录

第一章　函数、极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　导数的应用

第四章 不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章 行列式

第七章　矩　阵

第八章　向量组与线性方程组

第九章　概率论基础

第十章　数理统计初步

第一章

函数、极限与连续

函数是对现实世界中各种度量之间相互关系的一种抽象，是微积分学的主要研究对象，函数极限是微积分学的理论基础，函数的连续性是函数的重要性质之一. 本章将在复习和加深函数相关知识的基础上，学习函数的极限、连续及其有关性质，为后续内容的学习奠定基础.

§1-1　初等函数

一、函数概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 内的每一个值 x，都有 y 与之对应，则这个对应法则 f 称为定义在集合 D 上的一个函数，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数值**，D 称为**定义域**，集合 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为**值域**.

说明　(1) 在函数的定义中，如果对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数. 如果对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，这样定义的函数则称为多值函数. 例如，由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的以 x 为自变量的函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 是一个多值函数，而它的每一个分支 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$ 都是单值函数. 以后若无特别说明，所说的函数都是指单值函数.

(2) 构成函数的两要素是定义域 D 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(3) 函数的表示方法主要有三种：表格法(列表法)、图形法(图象法)、解析法(公式法).

2. 几个特殊的函数

(1) 分段函数.

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如，
$$y=\begin{cases}2x-1, & -1<x\leqslant 2,\\ x^2+1, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$$

分段函数的定义域是各段定义区间的并集.

(2) 隐函数.

变量之间的关系是由一个方程来确定的函数，称为隐函数. 例如，由方程 $x^2+y^2=1$ 确

定的函数.

(3) 由参数方程所确定的函数.

若参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,其中 t 为参数)确定 y 与 x 之间的函数关系,则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

3. 函数的定义域

在实际问题中,函数的定义域要根据实际问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义时,定义域就是使得函数解析式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下,一般的用解析式表达的函数可简记为"$y=f(x)$". 常见解析式的定义域的求法有:

(1) 分母不能为零;

(2) 偶次根号下非负;

(3) 对数式中的真数恒为正;

(4) 分段函数的定义域应取各分段区间定义域的并集.

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$;　　(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x^2-4}$;

(3) $y=\begin{cases}\sin x, & -1\leqslant x<2,\\ \ln x, & 2\leqslant x<3.\end{cases}$

解 (1) 要使函数有意义,必须 $x\neq 0$,且 $x+2\geqslant 0$,解得 $x\geqslant -2$.

所以函数的定义域为$\{x|x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0\}$或 $D=[-2,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,必须$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}>0,\\ x^2-4\geqslant 0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x>1,\\ x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2,\end{cases}$即 $x\geqslant 2$.

所以函数的定义域为$\{x|x\geqslant 2\}$或 $D=[2,+\infty)$.

(3) 函数为分段函数,所以函数的定义域为 $D=[-1,2)\cup[2,3)=[-1,3)$.

4. 函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性.

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称:

若对于任一 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;

若对于任一 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

补充:如果函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点不对称,则函数为非奇非偶函数,无需进一步计算作判断.

(2) 函数的单调性.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时:

若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的;

若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

（3）函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在数 $M>0$，使对任一 $x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界；如果这样的 M 不存在，即对任意数 M，总存在 $x_0\in D$，使

$$|f(x_0)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内无界.

（4）函数的周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，$x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

二、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数：$y=c$（c 为常数）.

幂函数：$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）.

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

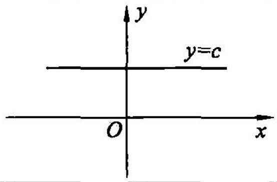
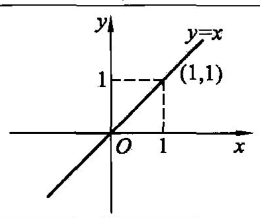
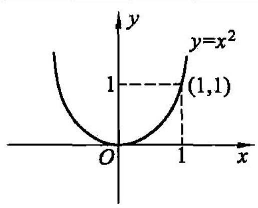
三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot}\, x$.

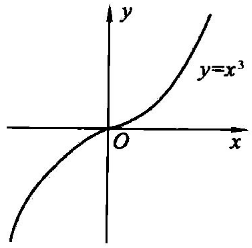
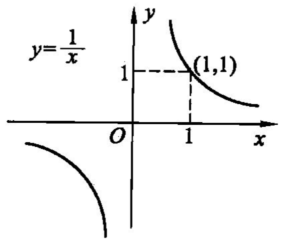
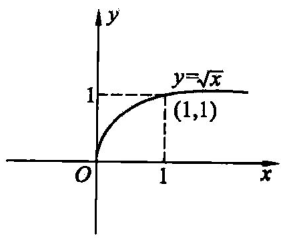
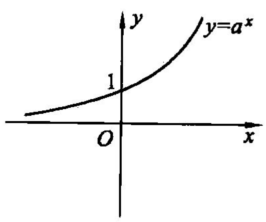
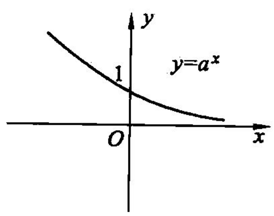
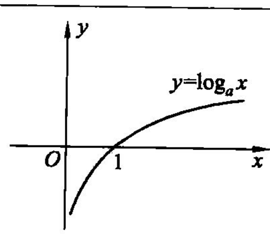
以上六类函数统称为**基本初等函数**.

为了方便，我们通常把多项式 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 也看做基本初等函数.

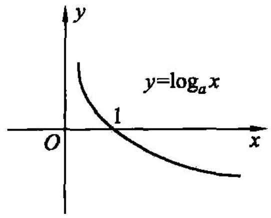
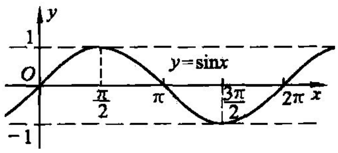
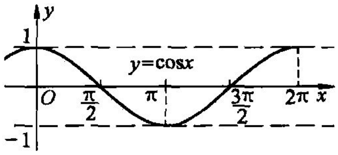
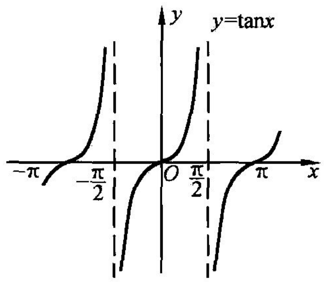
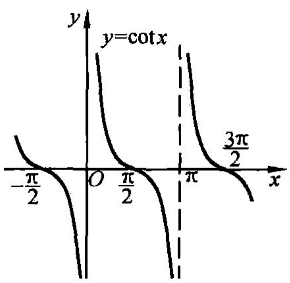
现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域和函数特性列表说明如下：

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
常数函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		偶函数 有界
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；在 $(-\infty,0)$ 内单调减少

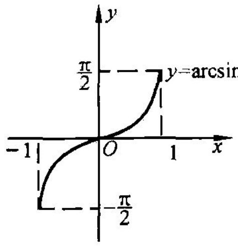
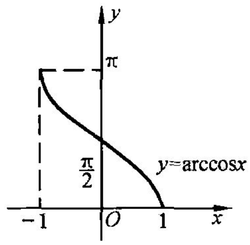
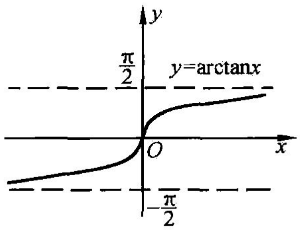
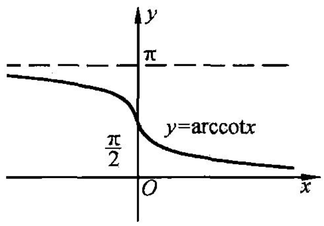
续表

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=\frac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加； 在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 有界 周期为2π
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$上单调减少；在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 偶函数 有界 周期为2π
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$(k\pi,k\pi+\pi)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π

续表

函数类型	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

先看这么一个例子：考查具有同样高度 H 的圆柱体的体积 V，显然其体积的不同取决于它的底面积 S 的大小，即由公式 $V=SH$（H 为常数）确定. 而底面积 S 的大小又由其半径 r 确定，即公式 $S=\pi r^2$. V 是 S 的函数，S 是 r 的函数，V 与 r 之间通过 S 建立了函数关系式 $V=SH=\pi r^2\cdot H$. 它是由函数 $V=SH$ 与 $S=\pi r^2$ 复合而成的，简单地说 V 是 r 的复合函数.

定义 2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空，那么 y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

注意　(1) 并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数.

(2) 学习复合函数有两方面要求：一方面，会把有限个作为中间变量的函数复合成一个函数；另一方面，会把一个复合函数分解为有限个较简单的函数.

(3) 分解复合函数时应自外向内逐层分解并把各层函数分解到基本初等函数经有限次四则运算所构成的函数为止.

例 2　将 $y=\sin u, u=1+x^2$ 复合成一个函数.

解　$y=\sin u=\sin(1+x^2)$.

例 3　将 $y=\ln u, u=\cos v, v=2^x$ 复合成一个函数.

解　$y=\ln u=\ln\cos v=\ln\cos 2^x$.

从例 2、例 3 可以看出复合的过程实际上是把中间变量依次代入的过程，而且由例 3 得出中间变量可以不限于一个.

例 4　指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\tan(3x-1)$；　　　　(2) $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

解　(1) $y=\tan(3x-1)$是由 $y=\tan u$ 和 $u=3x-1$ 复合而成的.

(2) $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$是由 $y=\arccos u, u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$和 $v=x^2+2$ 复合而成的.

例 5　设 $y=f(u)$的定义域为$[1,5]$，求函数 $y=f(2x-1)$的定义域.

解　由复合函数的定义域知 $1\leqslant 2x-1\leqslant 5$，即 $1\leqslant x\leqslant 3$，所以所求函数的定义域为$[1,3]$.

3. 初等函数

定义 3　由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算所构成的并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 否则称为**非初等函数**.

例如，$y=\ln\sqrt{1-x^2}+\sin^2 x$，$y=\dfrac{\tan x}{x^3}-1$，$y=\cos(3x-\sqrt{e^x}+1)+\sin 2x-3$ 等都是初等函数，而大部分分段函数是非初等函数.

4. 点的邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，为了讨论函数在一点附近的某些形态，在此我们引入数轴上一点邻域的概念.

定义 4　设 $x_0,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，集合$\{x\in\mathbf{R}\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即数轴上到点 x_0 的距离小于 δ 的点的全体，称为**点 x_0 的 δ 邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0,δ 分别称为该邻域的中心和半径. 集合$\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$称为**点 x_0 的 δ 空心邻域**，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$.

补充：平面上点 P_0 的某邻域是指以 P_0 为中心，以任意小的正数 δ 为半径的邻域，$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$，记为 $U(P_0,\delta)$；点 P_0 的某空心邻域是指以 P_0 为中心，以任意小的正数为半径的空心邻域，记为$\mathring{U}(P_0,\delta)$.

习题 1-1(A)

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域即为 $u=\varphi(x)$的定义域；

(2) 函数 $y=\lg x^2$ 与函数 $y=2\lg x$ 相同；

(3) 设 $y=\ln u, u=-x^2-1$，则这两个函数可以复合成一个函数 $y=\ln(-x^2-1)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\lg(x+1)$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\begin{cases}x-1, & 1<x<3,\\ 3x, & 3\leqslant x<6;\end{cases}$　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{1-|x|}$.

3. 下列函数中，哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；　　(2) $y=x^5-\sin x$；

(3) $y=\sqrt{x}$；　　(4) $y=x^2\cos x+[f(x)+f(-x)]$.

4. 求下列由所给函数复合而成的函数：

(1) $y=e^u$，$u=\sin x$；　　(2) $y=\tan u, u=v^2, v=x+3$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x^3-1}$；　　(2) $y=\sin^2 2x$；

(3) $y=\ln\tan 3x$；　　(4) $y=2^{\cos(x-1)}$.

习题 1-1(B)

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{3-x}}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2-x-6}}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}-\dfrac{3x}{x-5}$；　　(4) $y=\ln(\ln x)$；

(5) $y=f(x-1)+f(x+1)$，$f(u)$的定义域为$(0,3)$.

2. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{x\sin x}{3+x^2}$；　　(2) $y=x^2+2^x-1$；

(3) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y=\tan(\sin x)$.

3. 求下列函数的函数值：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 0,\\ 2^x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(0), f(3)$；

(2) 设 $f(x)=x\cdot 4^{x-1}$，求 $f(-1), f(t^2), f\left(\dfrac{1}{t}\right)$；

(3) 设 $f(x)=2x-1$，求 $f(a^2), f[f(a)], [f(a)]^2$.

4. 将下列函数复合成一个函数：

(1) $y=\tan u, u=\ln v, v=3x$；　　(2) $y=\sqrt{u}, u=\sin v, v=2^x$.

5. 将下列复合函数进行分解：

(1) $y=\sin\sqrt{x-1}$；　　(2) $y=(1+2x^2)^5$；

(3) $y=\cos^3(2x+3)$；　　(4) $y=e^{\tan x}$；

(5) $y=\sqrt{\tan(x-1)}$；　　(6) $y=\cos[\cos(x^2-1)]$；