

96.3.17

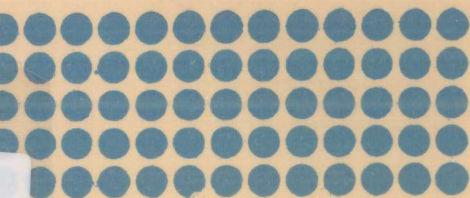


信财经丛书

XIN
CAIJING
CONGSHU

财会数学

蔡 芷 ● 编写



立信会计图书用品社

财会数学

蔡 芷 编写

立信会计图书用品社

(沪)新登字 304 号

封面设计：范一辛

立信财经丛书

财 会 数 学

蔡 芷 编写

立信会计图书用品社出版发行

(上海中山西路 2280 号)

新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.625 插页 2 字数 206,000

1982 年 12 月第 1 版

1987 年 8 月新一版 1992 年 10 月第 7 次印刷

印数 391,001—416,000

ISBN 7-5429-0016-1/F·0016

定价：3.80 元

编写说明

为了提高财经管理工作的水平，实现管理工作现代化，需要培养管理人材，掌握、运用科学方法。数学是科学管理的主要方法和有效工具。本书介绍普通的数学内容及其在财经工作中的通常应用。

本书包括初等代数、线性代数二章。全书注意数学的系统性，循序渐进。可以作为财经中等专业学校教学用书。同时也考虑到应用性，介绍了在资金、成本、利润、费用、生产、销售、运输、储存等各个方面的应用，联系实际，可供具有中学程度的财经工作者自学参考之用。

本书的着重点在于普及与应用，所以取材浅显平易，叙述通俗明白，介绍简捷方法和列举例题都比较多。书中所用的数学公式只作简单的推导与说明。对于应用部分如“利息与年金”、“投入产出分析”等另列专节作较详细的介绍。书中每节之后附有习题与答案，供读者练习参考之用。

由于编者学识疏浅，书中的错误与缺点在所难免，希望得到读者的批评和指正。

编 者

1981年12月

目 录

第一章 初等代数	(1)
第一节 和式	(1)
1.1 写成和式	(1)
1.2 展开和式	(2)
1.3 双重和式	(3)
1.4 和式的性质	(3)
1.5 和式的运算	(6)
1.6 应用	(8)
第二节 阶乘与连乘	(13)
2.1 阶乘的概念	(13)
2.2 阶乘的运算	(14)
2.3 连乘的概念	(15)
2.4 连乘的性质	(16)
2.5 应用	(18)
第三节 近似计算	(21)
3.1 基本概念	(22)
3.2 近似数的加减法	(23)
3.3 近似数的乘除法	(24)
3.4 尾数的取舍方法	(25)
3.5 近似公式	(26)
3.6 应用	(28)
第四节 比与比率	(29)
4.1 比的概念	(30)

4.2	比的性质	(31)
4.3	比的注意点	(32)
4.4	比率的概念	(33)
4.5	比率的注意点	(33)
4.6	常用的比率	(35)
4.7	应用	(37)
第五节	比例	(40)
5.1	比例的概念	(40)
5.2	比例的性质	(41)
5.3	正比例	(43)
5.4	反比例	(44)
5.5	应用	(45)
第六节	指数与根式	(56)
6.1	基本概念	(56)
6.2	指数的运算法则	(57)
6.3	指数的推广	(59)
6.4	根式的运算	(61)
6.5	应用	(63)
第七节	对数	(67)
7.1	基本概念	(67)
7.2	性质与法则	(67)
7.3	重要公式	(70)
7.4	常用对数	(71)
7.5	自然对数	(75)
7.6	应用	(76)
第八节	代数方程	(82)
8.1	方程的概念	(82)
8.2	方程的性质	(83)

8.3	一元一次方程	(85)
8.4	二元一次方程组	(86)
8.5	一元二次方程	(89)
8.6	分式方程	(91)
8.7	无理方程	(93)
8.8	应用	(95)
第九节	不等式	(98)
9.1	不等式的概念	(98)
9.2	不等式的性质	(99)
9.3	一元一次不等式	(101)
9.4	一元一次不等式组	(102)
9.5	一元二次不等式	(104)
9.6	分式不等式	(106)
9.7	应用	(109)
第十节	等差数列	(111)
10.1	基本概念	(111)
10.2	基本公式	(113)
10.3	元素公式、中项公式	(115)
10.4	应用	(116)
第十一节	等比数列	(124)
11.1	基本概念	(124)
11.2	基本公式	(126)
11.3	元素公式、中项公式	(127)
11.4	应用	(128)
第十二节	利息与年金	(135)
12.1	单利基本公式	(136)
12.2	单利年金终值	(137)
12.3	单利年金现值	(140)

12.4	复利基本公式	(142)
12.5	复利年金终值	(143)
12.6	复利年金现值	(145)
12.7	变额年金	(148)
12.8	永久年金	(151)
12.9	展延年金	(152)
12.10	投资决策	(154)
12.11	分期付款	(157)
12.12	银行贴现	(160)
第二章	线性代数	(165)
第一节	行列式	(165)
1.1	二阶行列式	(165)
1.2	三阶行列式	(167)
1.3	高阶行列式	(170)
1.4	子行列式	(173)
1.5	行列式的性质	(176)
1.6	克莱姆法则	(179)
1.7	应用	(181)
第二节	矩阵	(187)
2.1	矩阵的概念	(187)
2.2	矩阵的运算	(189)
2.3	特殊矩阵	(194)
2.4	矩阵的初等变换	(196)
2.5	逆矩阵	(198)
2.6	线性方程组的矩阵解法	(208)
2.7	应用	(213)
第三节	线性方程组	(223)
3.1	基本问题	(223)

3.2	解的判别法则.....	(226)
3.3	线性方程组的解法.....	(230)
3.4	解的结构.....	(233)
3.5	应用.....	(234)
第四节	投入产出分析.....	(237)
4.1	投入产出表.....	(237)
4.2	投入系数表.....	(242)
4.3	逆系数矩阵.....	(246)
4.4	对外贸易.....	(249)
4.5	劳动就业.....	(251)
4.6	物价.....	(254)

第一章 初等代数

初等代数是初等数学中的基本部分，也是学习数学所应掌握的基础知识，它的内容较为丰富，应用比较广泛。本章只选取主要内容，一方面作为复习，一方面介绍一些应用。

第一节 和 式

数学计算中最简单的方法是加法。当有若干个数字相加时，为了使文字表达简洁，数学运算方便，常采用和式记号“ Σ ”（希腊字母）。例如，

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \quad \text{记作} \quad \sum_{i=1}^n x_i$$

和式“ Σ ”只是一种表达记号，它的计算方法仍是加法，在以后的有关章节中常常使用和式记号，在经济分析中也常采用和式记号。

1.1 写成和式

和式 $\sum_{i=1}^n x_i$ 可以分成三部分：和式记号 Σ ，变量 x_i ，变量的上下标 $1, n$ 。其中 i 称做变量的足标，表示变量的序号，常采用非负整数。下标可以从 0 开始，也可从其它自然数开始。

例1 把 $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ 写成和式。

解
$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \sum_{i=4}^9 i$$

也可写成
$$\sum_{i=0}^5 (4 + i), \text{ 或 } \sum_{i=1}^6 (3 + i).$$

例2 把自然数中 100 以内的奇数之和，写成和式。

解 $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = \sum_{i=0}^{49} (2i+1)$

也可写成 $\sum_{i=1}^{50} (2i-1)$ 。

和式的项数等于它的上标数与下标数之差再加1。

本例的项数是

$$49 - 0 + 1 = 50$$

或

$$50 - 1 + 1 = 50$$

例3 把 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ 写成和式。

解

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{128}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^7} = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{2^i}$$

1.2 展开和式

和式的展开是将变量按序号写成加法形式，必要时求出和式的数值。

例4 把 $\sum_{i=1}^{10} (i+b)$ 展开 (b 是常量)。

解

$$\sum_{i=1}^{10} (i+b) = (1+b) + (2+b) + \cdots + (10+b)$$

$$= (1+2+\cdots+10) + 10b = 55 + 10b$$

例5 把 $\sum_{n=1}^5 \frac{2^n}{n}$ 展开，并求值。

解

$$\sum_{n=1}^5 \frac{2^n}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5}$$

$$= 2 + 2 + \frac{8}{3} + 4 + \frac{32}{5} = 17\frac{1}{15}$$

1.3 双重和式

二个和式记号连写成 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 的形式叫做双重和式。它表示

变量 a_{ij} 先按右边和式 $\sum_{j=1}^n$ 的足标 j , 从 1 到 n 求和, 然后再按左边

和式 $\sum_{i=1}^m$ 的足标 i , 从 1 到 m 求和。

例6 把 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ij}$ 展开。

解 先按 j 展开, i 不变。

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ij} = \sum_{i=1}^3 (a_{i1} + a_{i2})$$

再按 i 展开:

$$\sum_{i=1}^3 (a_{i1} + a_{i2}) = a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + a_{22} + a_{32}$$

所以 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ij} = a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{12} + a_{22} + a_{32}$

例7 把 $a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25}$ 写成和式。

解 $a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25}$

$$= \sum_{j=2}^5 a_{1j} + \sum_{j=2}^5 a_{2j} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^5 a_{ij}$$

1.4 和式的性质

性质一 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

证

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

性质二 $\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + nc$ (c 是常数)

证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i + c) &= (a_1 + c) + (a_2 + c) + \cdots + (a_n + c) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + nc = \sum_{i=1}^n a_i + nc\end{aligned}$$

性质三 $\sum_{i=1}^n c = nc$ (c 是常数)

证 由性质一

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n c$$

由性质二

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + nc$$

所以

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

性质四 $\sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i$ (k 是常数)

证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n ka_i &= ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n \\ &= k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k \sum_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$

性质五 $\sum_{i=1}^n (ka_i + c) = k \sum_{i=1}^n a_i + nc$ (k, c 是常数)

证

$$\sum_{i=1}^n (ka_i + c) = \sum_{i=1}^n ka_i + \sum_{i=1}^n c = k \sum_{i=1}^n a_i + nc$$

这一条性质包括了性质二、三、四。

性质六

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

证

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} &= \sum_{i=1}^m (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) \\ &= a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} \\ &\quad + a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{m2} \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn} \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} &= \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) \\ &= a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ &\quad + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

这条性质说明双重和式的两个和式记号可以交换顺序。

性质七

$$\sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

证 原式的左边可以看作两个和式的乘积，先分别展开，再求其积。即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j &= \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

原式的左边也可以看作双重和式，先按 j 展开，再按 i 展开。即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j &= \sum_{i=1}^m a_i (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \sum_{i=1}^m a_i \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \end{aligned}$$

原式右边按双重和式的定义展开:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j &= \sum_{i=1}^m (a_i b_1 + a_i b_2 + \cdots + a_i b_n) \\
 &= \sum_{i=1}^m a_i (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
 &= a_1 (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2 (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
 &\quad + \cdots + a_m (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
 &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)
 \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

此性质说明两个标号变量不同的和式之积可并成双重和式。

例8 求 $\sum_{n=1}^{10} (3n+4)$ 的值。

解 根据性质

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{10} (3n+4) &= 3 \sum_{n=1}^{10} n + 10 \times 4 = 3 \times (1+2+\cdots+10) + 40 \\
 &= 3 \times 55 + 40 = 205
 \end{aligned}$$

例9 展开 $\sum_{n=1}^5 (n+n^2)k$ 。

解 根据性质

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^5 (n+n^2)k &= k \sum_{n=1}^5 (n+n^2) \\
 &= k \sum_{n=1}^5 n + k \sum_{n=1}^5 n^2 \\
 &= k(1+2+\cdots+5) + k(1+4+\cdots+25) \\
 &= 15k + 55k = 70k
 \end{aligned}$$

1.5 和式的运算

(1) 和式之和

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$$

(2) 和式之积

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{i=1}^n b_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

(3) 和式之商

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

(4) 和式之乘方

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$$

(5) 积之和式

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

(6) 商之和式

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$$

(7) 两项式积之和式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b)(c_i + d) &= \sum_{i=1}^n (a_i c_i + b c_i + d a_i + b d) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i c_i + b \sum_{i=1}^n c_i + d \sum_{i=1}^n a_i + n b d \end{aligned}$$

(8) 两项式平方之和式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b)^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2b a_i + b^2) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n a_i + n b^2 \end{aligned}$$

例10 求 $\sum_{n=1}^5 (n+3)(2n+1)$ 的值。

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^5 (n+3)(2n+1) &= \sum_{n=1}^5 (2n^2 + 7n + 3) \\ &= 2 \sum_{n=1}^5 n^2 + 7 \sum_{n=1}^5 n + 5 \times 3 \\ &= 2 \times (1 + 4 + \cdots + 25) \\ &\quad + 7 \times (1 + 2 + \cdots + 5) + 15 \\ &= 2 \times 55 + 7 \times 15 + 15 = 230\end{aligned}$$

例11 求 $\sum_{n=1}^5 (n+3) \times \sum_{n=1}^5 (2n+1)$ 。

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^5 (n+3) \times \sum_{n=1}^5 (2n+1) \\ = (4 + 5 + \cdots + 8) \times (3 + 5 + \cdots + 11) = 30 \times 35 = 1050\end{aligned}$$

1.6 应用

(一)和式能使表达简洁

例12 全车间有工人100名，每人的日产量分别为： x_1 、 x_2 、 $\cdots$ 、 x_{100} ，写出全车间的日产量。

解 设全车间的日产量为 X ，则

$$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{100} x_i$$

例13 某商店有三个柜组，它们各季度的销售额分别为 a_{ij} （这里 a 代表销售额； $i=1, 2, 3$ ，表示柜组； $j=1, 2, 3, 4$ ，表示季度）写出每个柜组的年销售额，每个季度商店的销售额，商店的全年销售额。

解 a_{ij} 表示第 i 组第 j 季度的销售额。例如 a_{23} 表示第2组第3季度的销售额。

第一组全年销售额：