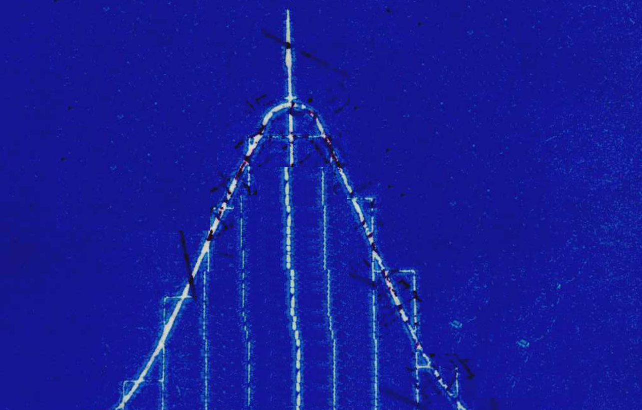
报考硕士研究生

高等数学函授教材

第 五 册

1985年研究生高等数学入学试题汇解



安徽大学数学系函授部

一九八五年七月

目　录

1　中国科学院（85）（Ⅲ）

一、（10分）设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & \text{当}x\neq 2y\text{时}\\ 0, & \text{当}x=2y\text{时}\end{cases}$

求函数$z=f(x, y)$的间断点。

【间断点集为$\{(x,y)\}|x-2y=0, x\neq 0\}$

二、（10分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x-\int_0^x e^{t^2}dt)/(x^2\sin 2x)$

(e为自然对数之底)

【原式$=\lim\limits_{x\to 0}(x-\int_0^x e^{t^2}dt)/(2x^3)=\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{x^2})/6x^2$

$=-1/6$

三、（10分）设A为实对称阵，若$A^2=0$，则$A=0$。

【由实对称阵的性质知存在正交阵T，使得$TAT'=\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，故$TA^2T'=\operatorname{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2)=0$，因此$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，即$TAT'=0$，所以$A=0$

四、（10分）某人掷不均匀钱币，出现反面的概率为P，$0<P<1$，求两次出现反面之间出现正面次数的概率分布和数学期望。

【以ξ记在两次出现反面之间出现正面的次数，则

$P\{\xi=K\}=(1-P)^K P, K=0, 1, 2, \cdots$。$E\xi=\sum\limits_{k=0}^{\infty}K(1-P)^K P=(1-P)/P$

五、（10分）求常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -2x_2 \end{cases}$$

的通解。

【设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$。由 $\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$。$(\lambda + 2)$得特征根为 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 4$，相应的特征向量为 $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，故其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

六、（12分）求曲线积分 $\oint_C \dfrac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2}$ 之值，其中C为单位圆周正向。

【令 $x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$，$0 < \theta \leqslant 2\pi$，则

$$原式 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\sin^2\theta} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{3\sin\theta\cos\theta}{1 + 3\sin^2\theta} d\theta = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{1 + 3\sin^2\theta} = 2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + tg^2\theta}{1 + 4tg^2\theta} d\theta$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+4x^2} = \operatorname{arc\,tg}2x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$I_2 = 0$，$I = \pi$

七、(10分)设$f(x)$是可微函数,$f'(0)<0$,$f'(1)>0$，求证存在点$C\in(0,1)$使$f'(C)=0$。

〖由$f'(0)<0$，所以存在x_1使$f(x_1)<f(0)$，$0<x_1<1$。同样由$f'(1)>0$，存在x_2使$f(x_2)<f(1)$,$0<x_2<1$。故$f(x)$的最小值点不是区间端点)必在内点C取到,这时由$f(x)$可导即得$f'(C)=0$。(此时最小值点必为极小值点)。

八、(12分)已知$\operatorname{arctg}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(|x|<1)$，求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}(|x|\leqslant1)$之和。

〖$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}\right)(-1)^n x^{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^n}{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=-x\ln(1+x^2)-2\operatorname{arc\,tg}x+2x$$

九、(16分)设$f(x)=(x^2-1)^n$，n为正整数

(1)证明：当k为小于n的正整数时$f^{(k)}(1)=$
$=f^{(k)}(-1)=0$,且$f^{(n)}(1)=2^n n!$，$f^{(n)}(-1)$
$=(-2)^n n!$

(2)求$\int_{-1}^{1}f(x)dx$和$\int_{-1}^{1}[f^{(n)}(x)]^2dx$之值。

【（1）由莱布尼兹公式

$$f^{(s)}(x)=\sum_{m=0}^{s}C_s^m[(x-1)^n]^{(m)}[(x+1)^n]^{(s-m)}$$

$$=\sum_{m=0}^{s}C_s^m m!(s-m)!(x-1)^{n-m}(x+1)^{n+m-s}$$

令S分别取n和k得

$$f^{(n)}(1)=\sum_{m=0}^{n}C_s^m m!(n-m)!(1-1)^{n-m}(2)^{n+m-n}$$

$$=C_n^n n!2^n=2^n n!$$

$$f^{(n)}(-1)=C_n^0 n!(-1-1)^n=(-2)^n n!$$

$f^{(k)}(1)=f^{(k)}(-1)=0$（因$n-m\geqslant n-k\geqslant 1$，$n+m-S\geqslant n-k\geqslant 1$）。

（2）$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\cdot d\sin x=I_{2n+1}$。

分部积分得$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}$，递推可得

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=(-1)^n\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2$$

$$\int_{-1}^{1}[f^{(n)}(x)]^2dx=\int_{-1}^{1}f^{(n)}(x)df^{(n-1)}(x)$$

$$=-\int_{-1}^{1}f^{(n-1)}(x)f^{(n+1)}(x)dx$$

$$=\cdots\cdots=(-1)^n\int_{-1}^{1}f(x)f^{(2n)}(x)dx$$

$$=(2n)!(-1)^n\int_{-1}^{1}f(x)dx=(2n)!\frac{2n}{2n+1}\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 2$$

$$=2\cdot\frac{(2^n n!)^2}{2n+1}$$

2 中国科技大学（85）（甲）

一、填空题（每小题 5 分，共20分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}[\ln(1+2x)]/x, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$

则常数a＝　时，函数f（x）在x＝0处连续

【a＝2时。

2、设a、b是常数，$u=x\sin(ax-byz)$，则 grad u ＝

$[\mathrm{grad}\,u=[\sin(ax-byz)+ax\cos(ax-byz)]\vec{i}-$

$bxz\cos(ax-byz)\vec{j}-bxy\cos(ax-byz)\vec{k}$

3、设 $w=\sqrt{z}$ 确定在以正虚轴为支割线割开的Z平面上，且 $w(1)=-1$，则在支割右岸的i点，w（i）＝

【$w(i)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)$。

4、设 $f(x)=\begin{cases}(\sin x)/x, & x\neq 0\\ 1\ ,\end{cases}$ 则 $f^{(50)}(0)=$

【$f^{(50)}(0)=-1/51$

二、（共26分）1、已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛。

【因 $\left|\dfrac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}(\dfrac{1}{n^2}+a_n{}^2)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛

2、求曲线$x=4t/3$，$y=t^2$，$z=t^3$上的点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，使在该点处曲线的切线平行于平面$x+2y+z=6$。

【所给曲线的切向量$\{x', y', z'\}=\{4/3, 2t, 3t^2\}$

依题意有 $1\cdot 4/3+2\cdot 2t_0+1\cdot 3t_0{}^2=0$，得 $t_0=-2/3$。

故所求点为$(-8/9, 4/9, -8/27)$。

3、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，问A能否相似于对角阵，为何？

【由 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$ 解得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，即A的三个特征根不同，故A相似于实对角阵。

4、试将复函数$f(z)=1/(z^2-3z+2)$在点$z=0$展开为Taylor级数，并求其收敛域。

$$【f(z)=1/(1-z)-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$$

收敛域为$|z|<1$.

三（10分）设物体的密度$\rho(x, y, z)=\rho_0\exp(-k\sqrt{x^2+y^2+z^2})$（其中$\rho_0>0$，$k>0$为常数），求占有无限域$x^2+y^2+z^2\geqslant 1$的物体的质量。

$$【所求质量为M=\rho_0\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\exp(-k\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot$$

$\cdot dxdydz$（其中$\exp(x)=e^x$）

作变换：$x=r\cos\theta\cos\varphi$，$y=r\cos\theta\sin\varphi$，$z=r\sin\theta$。

$$则M=\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_1^{\infty}e^{-kr}r^2dr$$

$$=4\pi\rho_0 e^{-k}(k^2+2k+2)/k^3.$$

四、（10分）设A是n阶正交且正定矩阵，证明A必是单位矩阵。

【因$A'A=E$，$A'=A$（A对称），故$A^2=E$，所以A的特征根为±1，又A正定，特征根均大于0，故特征根全为1，从而存在正交阵T使

$$A=T'\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}T=E,$$ 即A为单位矩阵。

五、（10分）问分式线性变换$w=(2z-i)/(2iz-1)$把Z平面上的区域$Imz<0$映射成w平面上的什么区域（要说明理由）？

【$w=(2z-i)/(2iz-1)=-i(z-\frac{1}{2}i)/(z+\frac{1}{2}i)$ 将$z=0$，1，∞分别变成$w=i$，$\frac{1}{5}(-4-3i)$，$-i$，故把z平面上实轴变为W面上单位圆，又将$z=-\frac{1}{2}i$变为∞，根据线性变换保对称点的性质知，它把Z平面上$Imz<0$保形变换成W平面上单位圆的外部$|w|>1$。

六、（14分）解定解问题 $\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}-2hu_t,\ 0<x<\pi,\ h\text{为常数},\ 0<h<2,\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0\\ u(0,x)=x(\pi-x),\ u_t(0,x)=0\end{cases}$

【设$u(t,x)=T(t)X(x)$，那么$T(t)$，$X(x)$满足

$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$ （1）

$T''(t)-2hT'(t)+4\lambda^2T(t)=0$ （2）

方程（1）满足$X(0)=X(\pi)=0$的特征值$\lambda_n=n$，特征函数为

$X_n(x)=\sin nx$，$n=1,2,\cdots$

方程（2）的解为$T_n(t)=A_ne^{ht}\sin\sqrt{4n^2-h^2}\,t+B_ne^{ht}\cdot\cos\sqrt{4n^2-h^2}\,t$，所以原方程的形式解为：$u(x,t)=$

$$=e^{ht}\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\sin\sqrt{4n^2-h^2}\,t+B_n\cos\sqrt{4n^2-h^2}\,t]\sin nx,$$

由$u(0,\ x)=x(\pi-x)$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\sin nx=x(\pi-x)$，故

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin nx dx=4[1+(-1)^{n-1}]/n^3\pi$$

又由$u_t(0,\ x)=0$ 得

$$h\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sqrt{4n^2-h^2}\sin nx=0$$

于是$A_n=-hB_n/\sqrt{4n^2-h^2}$，最后得原问题的解为

$$u(t,\ x)=\frac{4}{\pi}e^{ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^3}\Big[\sin\sqrt{4n^2-h^2}\,t-\frac{h}{\sqrt{4n^2-h^2}}\cos\sqrt{4n^2-h^2}\,t\Big]\sin nx.$$

七、（10分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

1、证明$n\geqslant3$时，$A^n=A^{n-2}+A^2-E$（E为三阶单位 阵）

2、求A^{100}。

【1、A的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda^2-1)(\lambda-1)$

从而 $f(A)=(A^2-E)(A-E)=0$，因 $n\geqslant3$时

$$\lambda^n-\lambda^{n-2}-\lambda^2+1=f(\lambda)g_n(\lambda)$$

故 $A^n-A^{n-2}-A^2+E=f(A)g_n(A)=0$，

即$A^n=A^{n-2}+A^2-E$。

2、由1递推得$A^{100}=50A^2-49E=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$

八、（10分）设$f(z)$在圆域：$|z|<R$内解析，且$f(z)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$，C_n为复常数。

1、证明：$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2 r^{2n}$，$(r<R)$

2、设$\max\limits_{|z|=r}|f(z)|=M(r)$，证明

$$|C_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}$$

解 1、因$|f(re^{i\varphi})|^2=\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{C_n} r^n e^{-in\varphi}$

$$=\sum_{j,k=0}^{\infty} C_j\overline{C_k} r^{j+k} e^{i(j-k)\varphi}$$

当$j\neq k$时$\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)\varphi}d\varphi=0$，而$r<R$时上面级数绝对收敛可逐项积分

故$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\overline{C_n} r^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2 r^{2n}$

2、由柯西不等式$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!M(r)}{r^n}$，而$C_n=\frac{f^{(n)}(n)}{n!}$

故 $|C_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}$

九、（10分）用Laplace变换方法解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & t>0,\ x>0\\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0 \\ u(t,0)=f(t) \end{cases}$$

【把X看成参变量，作u(t, x)关于t的Laplace变换：

$$L(u, t, x) = \overline{u}(p, x) = \int_0^{\infty} u(t, x)e^{-pt}dt,$$

于是原问题化为，

$$\begin{cases} p^2\overline{u} = a^2\overline{u}'' \\ \overline{u}(p, 0) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = L(f) \end{cases}$$

通解为$\overline{u} = C_1e^{-px/a} + C_2e^{px/a}$，要求解有界，故 $C_2 = 0$

于是 $\overline{u} = L(f)e^{-px/a}$，由卷积公式知

$$u(t, x) = e^{-tx/a}\int_0^t f(u)e^{xu/a}du.$$

3　中国科技大学（85）（乙）

1、（12分）研究函数

$$f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)/x & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \int_0^{x^2}\cos t^2dt/x & x>0 \end{cases}$$

在点x＝0的连续性和可微性。

【由洛必达法则得：

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sin x = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2x\cos x^4 = 0 = f(0),$$

故f（x）在x＝0连续。

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2x\cos x^4}{2x}=1$$

故$f(x)$在$x=0$不可微。

2、(10分)已知函数$f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求$f^{(n)}(0)$。

【当$|x|<1$，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，比较两幂级数对应项的系数有$f(0)=0,f'(0)=0$，

$f^{(n)}(0)=n!$，$(n=2k)$，$f^{(n)}(0)=0$ $(n=2k+1)$ $(k\geqslant 1)$

3、(12分)设$u=u(x,y)$有连续的二阶偏微商，且$x=e^s\cos t$，$y=e^s\sin t$，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。

【$\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}=e^s\cos t\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^s\sin t\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=e^s\cos t\frac{\partial u}{\partial x}+e^{2s}\cos^2 t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2e^{2s}\sin t\cos t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$
$$+e^s\sin t\frac{\partial u}{\partial y}+e^{2s}\sin^2 t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-e^s\sin t\frac{\partial u}{\partial x}+e^s\cos t\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-e^s\cos t\frac{\partial u}{\partial x}+e^{2s}\sin^2 t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2e^{2s}\sin t\cos t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-$$
$$-e^s\sin t\frac{\partial u}{\partial y}+e^{2s}\cos^2 t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

故$\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{2s}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$。

4、（12分）在区间〔0，2〕上展开函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1 \\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$$

为余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和，

【$a_k=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{2k\pi}{2}xdx=\int_0^1 x\cos k\pi xdx+$

$+\int_1^2(2-x)\cos k\pi xdx=\frac{2}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]$，$k\geqslant 1$

$a_0=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx=1$

$b_k=0$，$k\geqslant 1$

从而f（x）的余弦级数为$\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]\cos k\pi x$

$=\frac{1}{2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi x$。

令 $x=0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\pi^2/8$

故由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2/6$

5、（10分）计算积分 $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx$。

【令 $\operatorname{tg}x=t^2$，则 $I=2\int_0^{\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt=2\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$

$=\sqrt{2}\pi/2$.

6、(10分)计算曲线积分 $\oint_c x^2ydx+y^2xdy$

其中C为依 反时针方向通过闭路 $|x|+|y|=1$

【由格林公式 $I=\iint\limits_D(y^2-x^2)dxdy$

(其中D为区域: $|x|+|y|\leqslant 1$)

$$=\iint\limits_D y^2dxdy-\iint\limits_D x^2dxdy$$

由D的对称性 知 $\iint\limits_D y^2dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$

故 $I=0$

7、(10分)求由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=2z$ 和 $x^2+y^2=z^2(z\geqslant 0)$ 所围成的立体体积。

【作变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$,

则 $V_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(r^2\sin\varphi\text{-}1)dr=\frac{1}{3}(\sqrt{2}+1)\pi$

8、(12分)设均匀薄壳的形状为抛物面

$z=\frac{3}{4}-(x^2+y^2)$ $(x^2+y^2\leqslant 3/4)$

试求这壳的重心

【由对称性可知,重心在z轴上,因壳是均匀的,不妨设密度 $\rho=1$,则重心的z坐标为

$$\bar{z} = \iint_S z ds \Big/ \iint_S ds = \left(\iint_{x^2+y^2 \leqslant \frac{3}{4}} (\tfrac{3}{4} - (x^2+y^2)) \cdot \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dxdy \right) \Big/ \iint_{x^2+y^2 \leqslant \frac{3}{4}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$= \frac{47}{120}\pi \Big/ \frac{7\pi}{6} = \frac{47}{140}$$

故重心坐标为（0，0，1/4）

9．（12分）求二阶方程$2(2+y)y'' = 1+y'^2$的通解。

解 原方程化为$y'^2 - 2yy'' - 4y'' = -1$　　　　（1）

两边求导得$(y+2)y''' = 0$，显然$y=-2$不是原方程 的解，舍去。

则$y''' = 0$，于是$y = C_1 + C_2x + C_3x^2$，C_1，C_2，C_3 为任意常数。将此代入（1)式得C_1，C_2，C_3满足$C_2^2 = 1+4C_1C_3 + 8C_3$

故通解为$y = C_1 + C_2x + C_3x^2$，其中C_1，C_2，C_3 为任意常数但满足

$C_2^2 = 1+4C_1C_3 + 8C_3$。

或设$y' = p$，将y看作自变量，原方程为$\dfrac{2pdp}{1+p^2} = \dfrac{dy}{2+y}$求解。

4　上海交大　天津大学　华中工学院　华南工学院　西安交大　浙江大学　南京大学　哈尔滨工大（85）（I）