成人中专教学参考书

数理统计学习辅导

高书民 主编

高等教育出版社

成人中专教学参考书

数理统计学习辅导

高书民　主编

高等教育出版社

本书是国家教委成人教育司和高等教育出版社组织编写的财经类成人中专教材《数理统计》的学习辅导书。

全书按教材各章的内容，提出目的要求、重点和难点、学习辅导、典型例题分析及自测题等。

该书突出成人教育的特点，结合教学中的体会解决教材中重点和难点问题，帮助读者自学。本书可作为成人中专财经类专业的学习辅导书，也可供有关教师和其它读者参改。

成人中专教学参考书

数理统计学习辅导

高书民　主编

*

高等教育出版社 出版

新华出店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 5.125　字数 105,000

1989 年 10 月第 1 版　1989 年 10 月第 1 次印刷

印数 0001—1,600

ISBN 7-04-002477-2/O·831

定价　1.30 元

前　言

《数理统计学习辅导》是为了密切配合财经类成人中专系列教材《数理统计》而编写的。

本书的内容包括：学习各章的目的和要求、重点和难点、学习辅导、典型例题分析、自测题，书末附两份期末练习题及自测题答案或提示。

书中"学习辅导"是对各章内容进行系统归纳，对概念进行适当的说明，抓住重点和难点解决某些疑难问题，有的采用了表格形式，一目了然，便于掌握和应用。"典型例题分析"是按教材范围来选取的。既说明类型的特点，又指出易误之处，还指明教材里那些习题属于此类问题。各章的"自测题"是按教材要求的重点，以中等水平选取的自我检查题(每套自测题大约用 45 分钟时间)。"期末练习题"供学员学完后综合练习使用(大约每份用 100 分钟)。

在编写中，我们努力结合教学中的体会，竭力突出成人教育和便于自学这两个特点。我们希望通过本书，有助于加深理解教材的内容，正确掌握基本概念，抓住重点和难点，解决某些疑难问题，系统巩固基本知识，提高基本计算能力，掌握基本解题方法，并能在初步培养自学能力和分析问题、解决问题的能力方面起到一定的作用。

本书是由高书民(编第一章)、佟彩云(编第二、三、六章)、吕荣明(编第四、五章)、边云龙(编第七、八章)四人合编。高

书民负责主编。

本书经辽宁大学数学系概率教研室主任刘良和副教授全面审阅，并给予精心指导，许多地方还亲自给予修改编写。还得到本溪广播电视大学的领导和同志们的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，书上缺点和错误在所难免，恳请读者及时给予批评指正。

编　者

1988年7月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

一、学习本章的目的和要求

本章是全书的基础，使学生能够正确理解随机事件及其概率是以实际事物为背景的，能够把随机现象进行概型化，以便探讨随机现象的规律性。其具体要求是：

1．掌握随机事件、事件的概率、条件概率和事件的独立性这四个基本概念；

2．能够熟练掌握古典概型和独立试验序列概型这两种概型的特点，把随机现象概型化；

3．熟练掌握和运用概率的加法公式、乘法公式，理解全概率公式和逆概率公式，提高分析问题和解决问题的能力。

二、重点和难点

1．本章重点是理解随机事件及其概率的直观背景，能把研究的随机现象概型化；掌握四个基本概念，并学会运用概率公式进行简单事件的概率计算。

2．本章难点是正确掌握事件间的关系运算，用排列组合知识解决古典概型中较难题的事件概率计算的问题，以及会利用独立试验序列概型解决问题。

三、学习辅导

(一)基本概念

1. 随机事件

我们对随机现象进行观测或试验叫做随机试验。在一定的条件下进行的随机试验，对所观测到的每一个可能的结果称为随机事件，简称为事件。

在每次试验中都一定发生的事件叫做必然事件，记为 Ω；在每次试验中一定不发生的事件叫做不可能事件，记作 ϕ。

按教材(指《数理统计》教材，下同)的定义讲，必然事件和不可能事件不是随机事件。但为了讨论问题方便，又因其中有一定联系，我们把这两种事件作为特例，也当作随机事件看待。

在随机事件中，有些事件可以看作由某些更简单一些的事件复合组成的。但是，并不是所有的事件都具有这种复合性。我们把那种不可能再分解的事件称为基本事件，而把具有复合性的事件称为复合事件。

基本事件的全体叫做基本事件组。显然，基本事件组把它作为一个事件来看，其本身也就是一个必然事件，仍记为 Ω。

有时，需要研究两个以上事件的关系和运算。为使问题变得更加直观、容易理解，经常把事件用点集的概念和图示的方法来表示。

对事件的关系，要明确包含、相等、和、积、差、互不相容及对立等概念。

2. 概率

(1) 概率就是在一次试验中表示某个事件发生的可能性大小的量，是个数量化指标。

在"一定的条件下"随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，表现出不确定性；另一方面，当在同样条件之下进行大量的试验时，其发生情况又会呈现出明显的规律性(即所谓统计规律性)。在具体问题中，随机事件的统计规律性给出了定量的客观描述，并且在一定的条件下，也给出这个随机事件发生的可能性到底有多大，这就是需要知道的概率。

这里所说的"一定的条件下"，我们常用"条件组 S 下"这一说法来代替。

有一个随机事件，就有其概率与之对应。要掌握随机现象的规律，就必须研究事件及其概率。对复杂事件的概率，却需要利用事件的关系来求出。没有这种认识是不能掌握随机现象的规律。

(2) 概率的统计定义：在条件组 S 下，重复进行 n 次试验，在 n 次试验中事件 A 发生的次数为 m。当试验次数 n 很大时，如果事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定在某一常数 p 附近，并且这种摆动的幅度会随着试验次数的增加而逐渐减少，则称数值 p 为随机事件 A 的概率。记作

$$P(A)=p$$

其中，p 就是试验中事件 A 发生的可能性大小的数量描述。

由于任何随机事件的频率都是介于0与1之间的一个

数，则显然有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

$$P(\Omega)=1, \quad P(\phi)=0。$$

从直观上也很容易理解，必然事件在每次试验中是肯定要发生的，其发生的频率是百分之百，所以它的概率是1；而不可能事件在每次试验中一定不会发生，其发生的频率是零，所以它的概率是0。

(3) 古典概型中概率定义：若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个等概基本事件组(此时，基本事件的总数为 n，n 为有限数)，事件 A 由其中 m 个基本事件组成(或者说只有 m 个基本事件有利于 A)，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

从这个公式看出，只要弄清楚基本事件的总数 n 及事件 A 所包含的基本事件个数 m，就立即得到事件 A 的概率。这就把求概率的问题转化为计数问题，也正因为如此，排列组合才成为古典概型中的重要工具。

对于古典概型中求某事件的概率问题，只需利用人们在实践中积累的经验去认识问题的某些性质，利用有些事件归结出的模型，并且根据模型本身所具有的特点去分析问题，找出基本事件总数 n 和事件 A 包含的基本事件个数 m 来计算，而不必通过大量试验以频率代替概率。这是与概率的统计定义的不同点。

3．条件概率

设 A、B 是同一试验下的两个事件。在事件 B 已经发生

的条件下事件 A 发生的概率，称为 A 对于 B 的条件概率，记作 $P(A|B)$。

从这个定义可以看出，在条件组 S 下，事件 A 发生的概率为 $P(A)$，但是，当事件 B 发生后，条件组就不再是"条件组 S"了，而是"条件组 S" 附加上"B 已经发生"。这时 A 的概率一般说来不再是 $P(A)$，而应是 $P(A|B)$。其计算公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}。$$

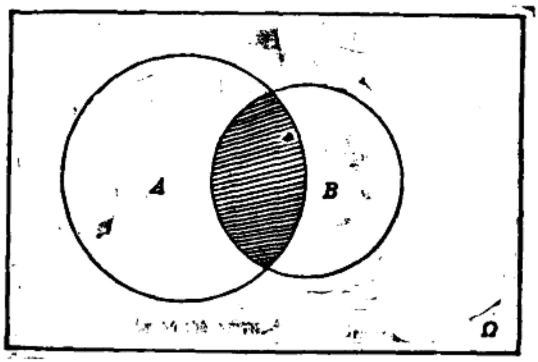

图 1.1

这个公式从直观上容易接受(见图1.1)。

因为 B 已发生，所考虑的范围相应减少，当然可能会引起 A 的概率发生变化。

乘法公式：$P(AB)=P(B)P(A|B)$，就是通过条件概率来给出计算积事件概率的公式。

条件概率也是概率。它是在给定事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率。不是只看事件 A 是否受 B 发生的影响，

而应着重看其概率的变化。

4．事件的独立性

两事件 A 与 B 相互独立，就是一个事件的发生并不影响另一个事件发生的概率。则有

$$P(A|B)=P(A) \quad (P(B)>0)$$

$$P(B|A)=P(B) \quad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad (P(A)>0,\ P(B)>0)$$

独立性是概率论中的重要概念之一，也是概率论特有的概念。

一般说来，事件 A 的条件概率 $P(A|B)$ 与事件 A 的概率 $P(A)$ 是不同的。但是，若事件 A 与 B 相互独立，那么在事件 B 发生的条件下，对于事件 A 发生的概率就没有影响，因而其条件概率 $P(A|B)$ 就等于 $P(A)$，即

$$P(A|B)=P(A)。$$

（二）两种概型

1．古典概型

古典概型是解决一类特殊而又简单随机现象的概率模型。它专指在某种试验中只有 n 个（n 有限）不同结果 A_1，A_2，…，A_n，而且任何两个事件发生的可能性是相等的，这 n 个事件构成一个等可能完备事件组（或叫做等概基本事件组）。

在解决这类问题时，要认真分析每个试验的条件，定出总的基本事件个数 n，还要仔细地定准事件 A 中所包含的基本事件个数 m，否则容易出错。

古典概型问题中重要的一条是基本事件的等可能性。缺

少这一条，是不行的。否则等可能基本事件组就变成完备事件组。

2．独立试验序列概型

独立试验序列概型是解决另一类特殊随机现象的概率模型。它专指在单次试验中，某事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，求在 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率 $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$.

在这类问题中"n 次独立重复试验"是一个重要的前提，它指的是这 n 次试验中的各次试验，其条件组是完全相同的，而且每次试验的结果又是互不影响，即独立的。所以，在具体应用中要注意这一点。

独立试验序列概型中，基本事件的概率可由公式直接计算出来，但这些基本事件的概率却不一定都是相等的。如三次独立重复试验中，基本事件共有 2^3 个，而基本事件 $AA\bar{A}$ 与 AAA 的概率分别为 $p\cdot p(1-p)$ 与 p^3。当 $p\neq\frac{1}{2}$ 时，是不相等的。

在实际问题中，真正完全重复的现象并不常见，常见的只是近似的重复。尽管如此，我们还是可以利用独立试验序列概型的方法，对这类问题去作近似处理。

（三）五个主要公式

1．加法公式

对任意事件 A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)。$$

特别当 $AB=\phi$ 时，

$$P(A+B)=P(A)+P(B)。$$

2．乘法公式

对任意事件 A、B，有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)。$$

特别当 A、B 相互独立时，则

$$P(AB)=P(A)P(B)。$$

条件概率公式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad(P(B)>0)$$

3．全概率公式

当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是完备事件组，对任一事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)。$$

其意义为如果一个事件 B 与完备事件组中组成事件之一同时发生，则事件 B 的概率可通过全概率公式来计算。如果把 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 看成是事件 B 发生的前提（原因），而 $P(A_i)$ 就称为先验概率（$i=1, 2, \cdots, n$）。

4．逆概率公式

当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是完备事件组，且 $P(B)>0$，则

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$(j=1, 2, \cdots, n)$$

公式的意义为已知事件 B 与完备事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一同时发生，如果事件 B 发生了，求它是由第 j 个“原因”引起而发生的概率 $P(A_j|B)$。它有时称为后验概率。

5. 独立试验序列概型公式

在 n 次重复试验中，事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，则

$$P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)。$$

四、典型例题分析

例 1. 投掷两颗均匀的骰子，考虑出现点数之和这一试验。

解：掷两颗骰子的全部试验结果为：

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(2, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

共有 36 个基本试验结果。每个结果都是一个随机事件。全部试验结果总数 36，也可理解为：每颗骰子共有 6 种不同点数，而两颗骰子在各自出现一个点数时，就组成一个试验结果，则共有 6^2 个不同的试验结果。

若将两颗骰子出现“点数之和”看成是一个结果时，其结果有

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$$

这 11 种。当然，这每一个结果也是一个随机事件。但是它与上面的 36 个随机事件有所不同。例如，事件 $A=\{$出现点数之和为 8$\}$，它是由(2, 6)、(3, 5)、(4, 4)、(5, 3)、(6, 2)这 5

个随机事件组成。则事件 A 是复合事件，而(2, 6)、(3, 5)等是基本事件。

要注意，这里必须是掷两颗骰子各出现一个点数时才能构成一个基本事件。若仅仅是一颗骰子出现的点数它就不是这个试验的基本事件。

试验条件的变化，必然引起事件性质的改变。例如事件 $B=\{$出现点数小于等于 6$\}$，在投掷一颗骰子时为必然事件；在掷两颗骰子时为随机事件；当掷七颗或多于七颗骰子时，就为不可能事件。可见，必然事件、随机事件、不可能事件都是相对于一定的试验条件而言的。条件变化，事件的性质就可能发生质的变化。

习题一中第 1 题可类似理解。

例 2．从 1 到 100，这 100 个自然数中随机抽取一个数。设 A 表示取出的数能被 5 整除的事件；B 表示取出的数是小于 50 的事件；C 表示取出的数是大于 30 的事件。求

(1) AB，(2) AC，(3) ABC，(4) $B+C$，(5) $B-C$，(6) $(A+C)B$。

解：根据题意有

$$A=\{5, 10, 15, \cdots, 100\},$$
$$B=\{1, 2, 3, \cdots, 49\},$$
$$C=\{31, 32, \cdots, 100\}$$

则

(1) $AB=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$

取出的数是这 9 个数中的任一个。

(2) $AC=\{35, 40, 45, \cdots, 100\}$

取出的数是这 14 个数中的任一个。

(3) $ABC=\{35, 40, 45\}$

取出的数是这 3 个数中的任一个。

(4) $B+C=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$

取出的数是这 100 个数中的任一个。

(5) $B-C=\{1, 2, \cdots, 30\}$

取出的数是这 30 个数中的任一个。

(6) $(A+C)B=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 31, 32, \cdots, 49\}$

取出的数是这 25 个数中的任一个。

习题一中第 2、3、4 题可类似理解去做。

例 3. 某箱中盛有 100 个球，其中 60 个黑球，40 个白球。从箱中每次任取一个，共抽取三次得 3 个球。在下面两种抽样方式下，分别计算如下事件的概率：

(1) "抽出的 3 个球都是黑球"；

(2) "取出的 3 个球恰有 2 个白球"。

第一种抽样方式：返回抽样。即任取一球分清黑白后，放回箱内。然后再去进行下一次的抽取。

第二种抽样方式：不返回抽样。即从箱中任取一个，不再放回，分清黑白球。然后再从箱中剩下的球中进行抽取。

解：(1) 设 $A=\{$从箱中 100 个球中，任取 3 个，这 3 个都是黑球$\}$的事件。

在第一种返回抽样的方式下，第一次抽一个，是从这 100 个球中抽一个，故有 100 种不同的抽法。将抽出的这个球放回箱内，再进行第二次、第三次抽取，每次抽完后均放回。当然也都是从这 100 个球中抽一个。由于这种试验是抽取 3 个