



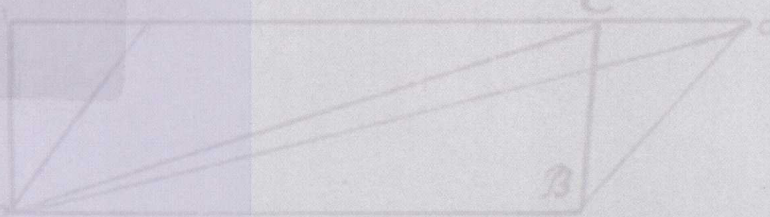
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

概率论与数理统计及其应用

第二版

浙江大学 盛 骤 谢式千 编

*Compleantur utraq $\Delta\Delta$ in \square , Bafis
utroq communis, c. altitudo equalis, ergo
triangula, cum sint fuoru parallel. dimo
erunt inter se quoq equalia. vid. de h
in hystoria
Lema*



 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

概率论与数理统计及其应用

Gailülun yu Shuli Tongji jiqi Yingyong

第二版

浙江大学 盛骤 谢式千 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是在2004年出版的教材《概率论与数理统计及其应用》的基础上增订而成。

第一版包括9章,内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析,还有概率论与数理统计的一些应用(可靠性、单服务台排队模型、质量控制等)。本次修订新增的内容有 bootstrap 方法、在数理统计中应用 Excel 软件、假设检验问题的 p 值法、描述统计、正态性的样本相关系数检验、列联表的独立性检验等。新增内容与第一版内容相对独立,使用本教材时可视学时的多少作选择和安排。

本书可作为高等学校工科、理科(非数学专业)各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供各类有关专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计及其应用/盛骤,谢式千编.—2版.
—北京:高等教育出版社,2010.7
ISBN 978-7-04-029458-3

I. ①概… II. ①盛…②谢… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 082559 号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 蒋青 封面设计 张志 责任绘图 郝林
版式设计 马敬茹 责任校对 王效珍 责任印制 毛斯璐

| | | | |
|------|--------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn |
| 经 销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | 网上订购 | http://www.landaco.com http://www.landaco.com.cn |
| 印 刷 | 唐山市润丰印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开 本 | 787×960 1/16 | 版 次 | 2004年7月第1版 2010年7月第2版 |
| 印 张 | 21.5 | 印 次 | 2010年7月第1次印刷 |
| 字 数 | 390 000 | 定 价 | 27.10元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29458-00

第二版前言

教材应该力求与时俱进,本版新增了以下内容。

(1) 本版简单介绍了用 bootstrap 方法求参数的点估计和区间估计的具体做法。bootstrap 方法是近代统计中用于数据处理的重要的实用方法。

(2) 新增了在数理统计中应用 Excel 软件一章,介绍了 Excel 软件及其在数理统计中的应用,举例介绍了应用 VBA 语言编写“宏”求解具体的数理统计问题。

(3) 新增了茎叶图、箱线图。新增了假设检验问题的 p 值检验法、 $Q-Q$ 图、正态性的相关系数检验以及列联表独立性检验。

在例题和习题的选择上扩大了涉及的范围(例如,农业、医学、商业、体育等)。

新增内容与第一版内容相对独立,使用本教材时可视学时的多少作选择和安排。

本版中新增的有关在数理统计中应用 Excel 软件的内容由浙江大学于渤教授编写。

诚恳地希望读者批评、指正。

盛骤 谢式千
2010年2月

第一版总序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要,满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求,探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系,全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上,组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校,进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索,在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果,并在高等教育出版社的支持和配合下,推出了一批适合应用型人才培养需要的立体化教材,冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月,教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项,为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台,整体设计立项研究计划,明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式,分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现,组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后,教研中心组织了首批课题立项申报,有63所高校申报了近450项课题。2003年1月,在黑龙江工程学院进行了项目评审,经过课题领导小组严格的把关,确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月,各子课题相继召开了工作会议,交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题,确定了项目分工,并全面开始研究工作。计划先集中力量,用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在做研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是,“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才探索与实践成果基础上,紧密结合经济全球化时代高校应用型人才工作的实际需要,努力实践,大胆创新,采取边研究、边探索、边实践的方式,推进高校应用

型人才培养工作,突出重点目标,并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础,作为体现教学内容和教学方法的知识载体,在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此,在课题研究过程中,各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果,并和教学实际结合起来,认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革,组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师,编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案,以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信,随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施,具有示范性和适合应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003年4月

第一版前言

本书是按照教育部现时使用的《概率论与数理统计课程基本要求》所规定内容的广度和深度编写的,可作为高等学校工科各专业、理科(非数学专业)各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供各类有关专业技术人员参考。

本书共分9章,第1章—第4章是概率论部分,内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布。第5章—第8章是数理统计部分,内容有样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。第9章为概率论与数理统计的一些应用,分为4节,内容有可靠性、单服务台排队模型、蒙特卡罗模拟、质量控制。

本书致力于内容安排紧凑、讲述深入浅出、思路清晰、说理清楚、简洁明了,努力做到便于教师教学和学生学习。本书在引入基本概念时注意揭示其直观背景和实际意义,在叙述基本概念和基本方法时注意阐明其概率和统计意义。在选配例题和习题时,着力使学生加深理解基本理论和基本方法的内容实质以及了解基本理论和基本方法是怎样用于解决实际问题的。

概率论与数理统计是一门应用性很强、很广泛的学科,本书试图从两个方面来反映它的应用。一是贯穿在全书的应用性例题和习题中。概率统计课程的实际背景是十分丰富和广泛的,读者将会看到有些题目虽然只是一个简单的题目,但它却能显示出概率统计在某一类生产技术和生活等方面的应用。二是专门有一章“概率论与数理统计的一些应用”,这一章中的4节内容实际上分别是4个应用学科的基本知识。读者将会看到这些学科所用到的数学基础就是概率论或(与)数理统计。当读者遇到有关问题时,或是可以初步应用,或是可以以本书提供的基本知识作为一个“起跑点”去进一步学习,以解决问题。学习这本书,可以将所学的知识与广泛的应用连接起来,希望读者在今后的学习和工作中遇到有关问题时,会想到“我是否能用概率论与数理统计的方法来解决呢?”

本书在内容的表达和例题、习题的选配上,注意引起读者的兴趣。希望读者喜欢学习这一课程,希望读者能感到这是一门不难学好的课程。

书中有两处标有“*”的内容,视学时情况可以少讲或不讲,供学生参阅。

浙江大学范大茵教授详细审阅了本书的全部书稿,并提出了许多宝贵的意见。谨表示衷心的感谢。

张忠明同志承担了全部输入和排版工作,并绘制了全部插图,我们表示衷心的感谢。

诚恳地希望广大读者批评指正。

盛 骤 谢式千

2004年4月

目 录

| | |
|------------------------------|----|
| 第 1 章 随机事件及其概率 | 1 |
| 1.1 随机试验、样本空间 | 1 |
| 1.2 随机事件 | 2 |
| 1.3 随机事件的概率 | 5 |
| 1.4 古典概率模型 | 10 |
| 1.5 条件概率 | 14 |
| 1.6 事件的独立性 | 20 |
| 习题 | 23 |
| 第 2 章 随机变量及其分布 | 26 |
| 2.1 随机变量 | 26 |
| 2.2 离散型随机变量及其分布律 | 28 |
| 2.3 连续型随机变量及其概率密度 | 34 |
| 2.4 分布函数 | 41 |
| 2.5 二维随机变量 | 45 |
| 2.6 边缘分布 | 49 |
| 2.7 条件分布 | 53 |
| 2.8 相互独立的随机变量 | 60 |
| 2.9 随机变量函数的分布 | 63 |
| 习题 | 70 |
| 第 3 章 随机变量的数字特征 | 75 |
| 3.1 数学期望 | 75 |
| 3.2 方差 | 82 |
| 3.3 协方差与相关系数 | 86 |
| 3.4 随机变量的另几个数字特征 | 89 |
| 3.5 切比雪夫不等式与大数定理 | 91 |
| 习题 | 94 |

| | |
|---------------------------------|-----|
| 第 4 章 正态分布 | 98 |
| 4.1 正态分布 | 98 |
| 4.2 正态随机变量的线性组合 | 104 |
| 4.3 中心极限定理 | 107 |
| 4.4 二维正态分布 | 112 |
| 习题 | 115 |
| 第 5 章 样本及抽样分布 | 118 |
| 5.1 随机样本 | 118 |
| 5.2 描述统计 | 121 |
| 5.3 统计量 | 131 |
| 5.4 抽样分布 | 133 |
| 习题 | 141 |
| 第 6 章 参数估计 | 144 |
| 6.1 参数的点估计 | 144 |
| 6.2 估计量的评选标准 | 152 |
| 6.3 参数的区间估计 | 155 |
| 6.4 正态总体均值的置信区间 | 158 |
| 6.5 正态总体方差的置信区间 | 162 |
| 6.6 单侧置信限 | 164 |
| 习题 | 167 |
| 第 7 章 假设检验 | 171 |
| 7.1 假设检验 | 171 |
| 7.2 正态总体均值的假设检验 | 177 |
| 7.3 正态总体方差的假设检验 | 183 |
| 7.4 分布拟合检验 | 188 |
| 7.5 列联表的独立性检验 | 193 |
| 7.6 正态性检验 | 197 |
| 7.7 假设检验问题的 p 值法 | 205 |
| 习题 | 208 |
| 第 8 章 方差分析和回归分析 | 215 |
| 8.1 单因素试验的方差分析 | 215 |
| 8.2 一元线性回归 | 223 |
| 习题 | 237 |
| 第 9 章 bootstrap 方法 | 241 |

| | | |
|---------------|------------------------------------------------------------|------------|
| 9.1 | 模拟各种分布的随机变量 | 241 |
| 9.2 | 非参数 bootstrap 方法 | 248 |
| 9.3 | 参数 bootstrap 方法 | 256 |
| 第 10 章 | 在数理统计中应用 Excel 软件 | 260 |
| 10.1 | 概述 | 260 |
| 10.2 | 产生指定分布的随机数、描述统计 | 261 |
| 10.3 | 假设检验 | 264 |
| 10.4 | 单因素方差分析、一元线性回归 | 267 |
| 10.5 | bootstrap 方法、宏、VBA 语言 | 271 |
| | 习题 | 276 |
| 第 11 章 | 概率论与数理统计的一些应用 | 281 |
| 11.1 | 可靠性 | 281 |
| 11.2 | 单服务台排队模型 | 291 |
| 11.3 | 质量控制 | 302 |
| 附表 | | 307 |
| 附表 1 | 几种常用的概率分布表 | 307 |
| 附表 2 | 标准正态分布表 | 310 |
| 附表 3 | 泊松分布表 | 311 |
| 附表 4 | t 分布表 | 312 |
| 附表 5 | χ^2 分布表 | 313 |
| 附表 6 | F 分布表 | 314 |
| 附表 7 | 函数 $\Phi^{-1}\left(\frac{i-0.375}{n+0.25}\right)$ 的值 | 319 |
| 附表 8 | 正态性相关系数检验的统计量 r 的上 $1-\alpha$ 分位数 $r_{1-\alpha}$ | 320 |
| 习题答案 | | 321 |

第 1 章 随机事件及其概率

自然界和人们在社会实践中发生的现象是多种多样的. 有一类现象, 在一定条件下必然发生, 例如: 同性电荷必定互相排斥, 在一个标准大气压下, 水加热到 100°C 一定沸腾等. 这类现象称为**确定性现象**. 另一类现象, 例如, 抛一枚硬币, 其结果可能是图案一面朝上, 也可能是币值一面朝上, 在抛掷之前无法预知抛掷的结果, 呈现出不确定性, 但多次重复抛同一枚硬币, 得到图案一面朝上大致有半数, 却呈现出规律性. 这种在个别试验或观察中其结果呈现出不确定性, 在大量重复试验或观察中其结果又呈现出规律性的现象称为**随机现象**. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象所具有的规律性的一门数学学科.

1.1 随机试验、样本空间

我们将试验作为一个含义广泛的术语, 它包括各种各样的实验、试验和检验, 甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 概率论与数理统计要研究的是随机现象, 因而我们要求试验具有下述三个性质:

1° 可以在相同条件下重复进行.

2° 每次试验的可能结果不止一个, 并且在试验之前能明确试验的所有可能结果.

3° 进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现.

具有 1°, 2°, 3° 三个性质的试验称为**随机试验**. 以后我们提到的试验指的都是随机试验.

下面举一些随机试验的例子.

E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面 H , 反面 T 出现的情况.

E_2 : 抛两枚硬币, 观察正面、反面出现的情况.

E_3 : 抛一颗骰子, 观察出现的点数.

E_4 : 记录某城市 114 电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数.

E_5 : 在一批灯泡中任取一只, 测试它的寿命.

E_6 : 在单位圆内任取一点, 记录它的坐标.

这些试验都具有上述 1°—3° 的三个性质, 它们都是随机试验.

如上所说, 一个试验的所有可能结果是预先知道的. 我们将试验 E 的所有

可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 S . 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点.

下面写出上述试验 E_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 的样本空间 S_i :

$$S_1: \{H, T\}.$$

$$S_2: \{HH, HT, TH, TT\}.$$

$$S_3: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$S_4: \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$$S_5: \{t | t \geq 0\}.$$

$$S_6: \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}.$$

1.2 随机事件

1. 随机事件

在研究试验的结果时, 人们不但关心试验的单个样本点, 而常常对试验的某些样本点所组成的集合更感兴趣. 例如, 若规定某种灯泡的寿命小于 1000 小时为次品, 那么在 E_5 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t \geq 1000$ (小时), 满足这一条件的样本点组成 S_5 的一个子集: $A = \{t | t \geq 1000\}$, 我们称 A 是试验 E_5 的一个随机事件, 显然当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时, 有 $t \geq 1000$ (小时), 即有灯泡合格.

一般, 我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件, 简称事件. 在一次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件发生. 随机事件用大写的字母如 A, B, C 等来表示.

下面举出一些随机事件的例子.

例 1 在 E_2 中, 事件“两枚硬币出现同一面”, 即

$$A_1 = \{HH, TT\},$$

事件“两硬币至少有一枚出现正面”, 即

$$A_2 = \{HH, HT, TH\},$$

在 E_3 中事件“出现偶数点”, 即

$$A_3 = \{2, 4, 6\},$$

在 E_5 中, 事件“寿命小于 1000 小时”, 即

$$A_4 = \{t | 0 \leq t < 1000\}.$$

□

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.例如,在 E_1 中有两个基本事件 $\{H\}$ 与 $\{T\}$,在 E_3 中有 6 个基本事件 $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$,在 E_4 中有可列个基本事件 $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots$,在 E_5 中有不可列个基本事件,例如 $\{t = 1000\}, \{t = 1500\}$ 等等.

样本空间 S 包含所有的样本点,它是它自身的子集,它在每次试验中都发生,称为**必然事件**.空集 \emptyset 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集.它在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

2. 事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合,因此事件间的关系和运算自然按照集合论中集合间的关系与集合运算来处理.下面给出这些关系与运算在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S ,而 $A, B, A_i (i = 1, 2, \dots)$ 是 S 的子集.

1° 若 $A \subset B$,则称事件 B 包含事件 A .这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

2° 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,即 $A = B$,则称事件 A 与事件 B 相等.

3° 事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**.当且仅当 A, B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.事件 $A \cup B$ 也是事件“或仅 A 发生或仅 B 发生或 A 与 B 都发生”.

类似地,称 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的**和事件**,称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, \dots 的**和事件**.

4° 事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**.当且仅当 A, B 都发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB .

类似地,称 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的**积事件**,称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, \dots 的**积事件**.

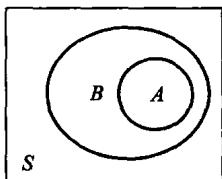
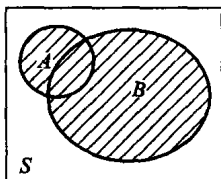
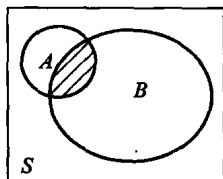
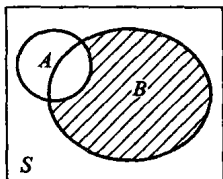
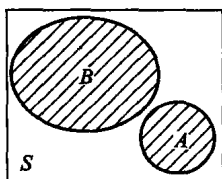
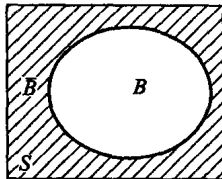
5° 事件 $B - A = \{x | x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$ 称为事件 B 与事件 A 的**差事件**.当且仅当 B 发生且 A 不发生时,事件 $B - A$ 发生.

6° 若 $A \cap B = \emptyset$,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**,或**互斥的**.这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生.基本事件是两两互不相容的.

7° 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**.又称事件 A 与事件 B 为**互逆事件**.这指的是,对每一次试验而言,事件 A, B 中必有一个发生,且仅有一个发生. A 的对立事件常记为 \bar{A} . $\bar{A} = S - A, \bar{A} \cup A = S$.

我们用以下的图形(图 1-1—图 1-6)来表示上述事件间的关系与运算.例如在图 1-2 中,圆 A 与椭圆 B 分别表示事件 A 与事件 B ,矩形表示样本空间 S ,

而有斜线的部分表示和事件 $A \cup B$.

图 1-1 $A \subset B$ 图 1-2 $A \cup B$ 图 1-3 $A \cap B$ 图 1-4 $B - A$ 图 1-5 $A \cap B = \emptyset$ 图 1-6 $B \cup \bar{B} = S, B \cap \bar{B} = \emptyset$

在进行事件的运算时,经常要用到下列定律. 设 A, B, C 为事件, 则有
交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

德摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

例 2 试验为抛一颗骰子观察出现的点数, 样本空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 设事件 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{4, 6\}, C = \{1, 4\}$, 求 $A \cap B, B \cup C, A \cup (B \cap C), \overline{A \cup B}, C - A$.

解 $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{4, 6\} = \emptyset,$

$$B \cup C = \{4, 6\} \cup \{1, 4\} = \{1, 4, 6\},$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{1, 3, 5\} \cup (\{4, 6\} \cap \{1, 4\}) \\ &= \{1, 3, 5\} \cup \{4\} = \{1, 3, 4, 5\}, \end{aligned}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 3, 4, 5, 6\}} = \{2\},$$

$$C - A = \{1, 4\} - \{1, 3, 5\} = \{4\}. \quad \square$$

例 3 设 A, B, C 是三个事件, 试以 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:

- (1) A 发生, B 与 C 不发生;
- (2) A, B, C 都不发生;
- (3) A, B, C 中至少有一个发生;

- (4) A, B, C 中恰有一个发生;
 (5) A, B, C 中不多于一个发生;
 (6) A, B, C 中不多于两个发生;
 (7) A, B, C 中至少有两个发生.

解 以 G_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 表示所要求的事件. 注意到一个事件不发生, 即为它的对立事件发生. 例如事件 A 不发生即为 \bar{A} 发生.

(1) B 与 C 不发生, 意味着 \bar{B}, \bar{C} 均发生. 本题是说 A, \bar{B}, \bar{C} 都发生, 即有 $G_1 = A\bar{B}\bar{C}$.

(2) A, B, C 都不发生, 即 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 都发生, 即有 $G_2 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(3) 由和事件的含义知, 事件 $A \cup B \cup C$ 即表示 A, B, C 中至少有一个发生, 故 $G_3 = A \cup B \cup C$.

(4) A, B, C 中恰有一个发生, 但未指定是哪一个发生, 于是可以是恰有 A 发生或恰有 B 发生或恰有 C 发生. 若恰有 A 发生则必须有 B, C 都不发生, 因而 A, B, C 中恰有 A 发生可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$. 类似地恰有 B 发生可表示为 $\bar{A}B\bar{C}$, 恰有 C 发生可表示为 $\bar{A}\bar{B}C$. 因此 $G_4 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$.

(5) “ A, B, C 中不多于一个发生”表示 A, B, C 中至少有两个不发生, 亦即 $\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{C}$ 中至少有一个发生, 即 $G_5 = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{C}$.

又“ A, B, C 中不多于一个发生”表示 A, B, C 都不发生或恰有一个发生, 故又有 $G_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$.

(6) “ A, B, C 中不多于两个发生”表示 A, B, C 中至少有一个不发生, 即 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中至少有一个发生. 故 $G_6 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$, 亦即 $G_6 = \overline{ABC}$.

(7) $G_7 = AB \cup BC \cup CA$. □

1.3 随机事件的概率

在一次试验中, 一个事件(除不可能事件与必然事件外)可能发生也可能不发生. 我们观察试验中的各个事件, 常会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大, 而另一些事件发生的可能性较小. 例如, 在抛一颗骰子观察它的点数的试验中, 事件“出现偶数点”比事件“出现1点”发生的可能性要大. 我们希望对每个事件能指定一个数, 能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的. 下面先从“频率”讲起.

1. 事件的频率

在相同的条件下将试验重复进行 n 次, 在 n 次试验中, 事件 A 发生了 f_A 次, f_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数, 而比值

$$R_n(A) = f_A/n$$

称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率.

例 1 将一枚硬币抛 5 次, 10 次, 20 次, \dots , 2520 次, 得到数据如表 1.1, 并将数据画在图 1-7 中. 表中 n_H 表示在 n 次试验中 H 出现的频数, 比值 n_H/n 记成 $R_n(H)$. 它是在这 n 次试验中出现 H 的频率.

表 1.1

| n | n_H | $R_n(H)$ | n | n_H | $R_n(H)$ | n | n_H | $R_n(H)$ |
|-----|-------|----------|-----|-------|----------|------|-------|----------|
| 5 | 2 | 0.400 | 80 | 39 | 0.488 | 700 | 354 | 0.506 |
| 10 | 3 | 0.300 | 105 | 51 | 0.486 | 869 | 435 | 0.501 |
| 20 | 13 | 0.650 | 141 | 68 | 0.482 | 1065 | 540 | 0.507 |
| 30 | 14 | 0.467 | 190 | 91 | 0.479 | 1290 | 650 | 0.504 |
| 40 | 20 | 0.500 | 254 | 128 | 0.504 | 1546 | 771 | 0.499 |
| 51 | 29 | 0.569 | 335 | 173 | 0.516 | 1835 | 906 | 0.494 |
| 55 | 30 | 0.545 | 435 | 222 | 0.510 | 2159 | 1086 | 0.503 |
| 64 | 33 | 0.516 | 556 | 276 | 0.496 | 2520 | 1270 | 0.504 |

这种试验以前也有人做过, 得到如表 1.2 所示的数据.

表 1.2

| 实验者 | n | n_H | $R_n(H)$ |
|--------|-------|-------|----------|
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| K. 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| K. 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |

从表 1.1 中的数据及图 1-7 可以看出, 抛硬币次数 n 较小时, 频率 $R_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动, 其幅度较大. 但随着 n 增大, 频率 $R_n(H)$ 呈现出稳定性, 即当 n 逐渐增大时, $R_n(H)$ 总在 0.5 附近徘徊, 而逐渐稳定于 0.5. \square

例 2 考察新生婴儿的性别. 表 1.3 给出了波兰从 1927 年到 1932 年间出生的婴儿总数以及其中的男婴数.

表 1.3

| 年份 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 | 1931 | 1932 | 共计 |
|-----|--------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| 出生数 | 958733 | 990993 | 994101 | 1022811 | 964573 | 934663 | 5865874 |
| 男婴数 | 496544 | 513654 | 514765 | 528072 | 496986 | 482431 | 3032452 |
| 频率 | 0.518 | 0.518 | 0.518 | 0.516 | 0.515 | 0.516 | 0.517 |

“出生男婴”是一个随机事件. 在任何个别情况下, 我们不能预知新生婴儿