泛函分析疑难分析与解题方法

FANHAN FENXI YINAN FENXI YU JIETI FANGFA

大学数学学习方法丛书

基本内容归纳提炼
学习方法疑难分析
典型例题解答技巧
考研知识总结升华

孙清华 孙 昊

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

大学数学学习方法丛书

泛函分析
疑难分析与解题方法

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书是《大学数学学习方法》丛书之一，是学习泛函分析课程的一本很好的辅导书.本书编写顺序与一般的泛函分析教材同步，内容包括度量空间、线性有界算子、希尔伯特空间的几何学三大部分.本书在凝练知识、释疑解难的基础上，用大量、全面的例题对度量空间、赋范线性空间、线性算子与线性泛函、内积空间与各种算子及它们的谱分解的概念、关系、性质进行了演绎、推导与论证，将极大地有益于读者掌握泛函分析的知识与方法.

希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析　疑难分析与解题方法/孙清华　孙　昊.-2版.—武汉:华中科技大学出版社，2008年10月

ISBN 978-7-5609-3390-0

Ⅰ.泛…　Ⅱ.①孙…　②孙…　Ⅲ.泛函分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第149687号

泛函分析　疑难分析与解题方法　　孙清华　孙　昊

策划编辑:徐正达
责任编辑:谢燕群　　封面设计:潘　群
责任校对:张　琳　　责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437
录　排:武汉金翰林工作室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:14　字数:373 000
版次:2008年10月第2版　印次:2008年10月第4次印刷　定价:20.00元
ISBN 978-7-5609-3390-0/O·350

前　言

泛函分析是高等学校数学专业本科生与研究生的一门主要课程，是现代数学中一个较新的重要分支.泛函分析起源于经典数学、物理中的一些变分问题和边值问题，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题与成果，综合运用了分析的、代数的和几何的观点和方法.泛函分析的概念和方法对现代纯数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，都已产生或正在产生重大的影响.

泛函分析分为线性泛函分析与非线性泛函分析两大部分，本书主要讨论线性泛函分析.本书编写顺序与大多数泛函分析教材同步，主要内容为度量(距离)空间、线性有界算子与希尔伯特空间的几何学.与本丛书其它书籍一样，本书按章节编写，每节分为主要内容、疑难分析、典型例题三个部分，对问题逐个地进行讨论、分析、证明、演算与归纳，用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧和举证方法，使读者通过本书能更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法.由于泛函分析的概念比较抽象难懂，涉及的知识比较广泛而深刻，读者学习起来比较困难，因此本书尽可能做到由浅入深、循序渐进，用较浅显的语言、较详尽的方式阐述问题.

在编写本书过程中参阅了一些作者的有关著作，同时得到了华中科技大学出版社的大力支持与帮助，在此向他们表示诚挚的谢意.

受经验与学识所限，本书难免会有疏漏之处，欢迎批评指正.

孙清华

2008 年 8 月

目　　录

第一章　度量空间

度量空间又称为距离空间，本章主要研究度量空间及空间中点集的性质，并引入压缩映射原理.

第一节　度量空间的基本概念

主要内容

1. **定义 1**　设 X 是一个非空集合，x 和 y 是 X 中任意两个元素，若按某种法则，总有一个实数 $\rho(x,y)$ 与之对应，且满足

(1) 非负性　$\rho(x,y) \geqslant 0$ 又 $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$，

(2) 对称性　$\rho(x,y) = \rho(y,x)$，

(3) 三角不等式　$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y), z \in X$，

则称 $\rho(x,y)$ 是两点 x,y 间的**距离（度量）**，称 X 为**度量空间（或距离空间）**，也记做 (X,ρ).

2. **定义 2**　设 X 是一个度量空间，$x_n(n = 1,2,\cdots), x \in X$，如果当 $n \to \infty$ 时，数列 $\rho(x_n,x) \to 0$，则称点列 $\{x_n\}$ 按照距离 $\rho(x,y)$ 收敛于 x，记做 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 称 $\{x_n\}$ 为**收敛点列**，称 x 为 $\{x_n\}$ 的**极限**.

定理 1　在度量空间中，任何一个点列至多只有一个极限，即收敛点列的极限是唯一的.

定理 2　若 $x_n \to x, y_n \to y$，则 $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$，即距离 $\rho(x,y)$ 是两个变元 x,y 的连续函数.

定义 3　设 M 是度量空间 X 中的点集，如果存在 $x_0 \in X$，使得 $\sup\limits_{x\in M}\rho(x,x_0) < \infty$，则称 M 是 X 中的**有界集**.

定理 3　设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的收敛点列，则集合 $\{x_n\}$ 是有界的 .

3. **定理 4**　度量空间 R 的任一非空子集 M 也是度量空间，称 M 为 R 的子空间.

疑难分析

如何理解度量空间概念？

答　度量空间是引入了度量函数 $\rho(x,y)$ 的一个非空集合. 在一个非空集合 X 中，可以定义不同的度量函数 $\rho(x,y)$ 和 $\rho_1(x,y)$，从而得到不同的度量空间.

设 (X,ρ) 与 (X_1,ρ_1) 是两个度量空间，若存在从 X 到 X_1 的一一对应 φ，使得对于每个 $x,y \in X$，有 $\rho(x,y) = \rho_1(\varphi x,\varphi y)$ 成立，则称 φ 是 (X,ρ) 到 (X_1,ρ_1) 上的**等距映射**，而且称这两个空间是**等距同构**的. 两个度量空间从形式上看，集合中的元素可以完全不同，但是如果它们是等距同构的，则可以将其中较为抽象的空间用另一个较为具体的空间来表示，从而在论证时可以在技巧上获得较大的便利.

典型例题

要求熟悉度量空间的基本概念，能验证集合按规定的距离构成度量空间．关键是三个条件，特别是三角不等式是否成立．

例 1　在 $\mathbf{R}^n$ 上，有

$$(1)x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad (2)y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),\quad (3)\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^n(\xi_i-\eta_i)^2\Big]^{1/2},$$

证明：$\mathbf{R}^n$ 是度量空间．

证　(1)、(2) 显然成立，下证(3) 成立．利用柯西(Cauchy) 不等式 $|\vec{a}\vec{b}| \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big),$$

得
$$\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^n a_k^2+2\sum_{k=1}^n a_kb_k+\sum_{k=1}^n b_k^2\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2+2\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)^{1/2}+\sum_{k=1}^n b_k^2$$
$$=\Big[\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)^{1/2}\Big]^2.$$

于是，在 $\mathbf{R}^n$ 中任取 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$，$b_k=\zeta_k-\eta_k$，则有

$$\Big[\sum_{k=1}^n(\xi_k-\eta_k)^2\Big]^{1/2}\leqslant\Big[\sum_{k=1}^n(\xi_k-\zeta_k)^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{k=1}^n(\zeta_k-\eta_k)^2\Big]^{1/2},$$

即
$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此，$\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho(x,y)$ 构成度量空间．

若令
$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^n|\xi_k-\eta_k|,\quad \rho_2(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|,$$

则可以验证 $\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho_1(x,y)$ 与 $\rho_2(x,y)$ 也分别构成度量空间．

若在 $\mathbf{R}^n$ 中，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的坐标是复数，按度量 $\rho(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^n|\xi_k-\eta_k|^2\Big)^{1/2}$ 构成的度量空间是酉空间，记做 C^n．

例 2　设 X 是任意的非空集合，对 X 中的任意 x,y，令 $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & 当\ x\neq y,\\ 0, & 当\ x=y,\end{cases}$ 证明：X 是度量空间．

证　$\rho(x,y)$ 满足非负性与对称性是显然的．

当 $\rho(x,y)=0$ 时，$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 成立．

当 $\rho(x,y)=1$ 时，对任何 $z\in X$，式 $x\neq z$ 与 $y\neq z$ 中至少有一个成立，从而 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 成立，所以三角不等式成立．

综上知，X 是度量空间(称为离散度量空间)．

例 3　设 $\mathbf{R}^1$ 是实数全体，规定对 $x,y\in\mathbf{R}^1$，令 $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$，证明：$\mathbf{R}^1$ 关于 $\rho(x,y)$ 构成度量空间．

证　满足非负性与对称性是显然的．要证明三角不等式成立，只需证明：对任意的实数 a,b，以下不等式成立：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

由于在$(0,\infty)$上定义的函数 $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 是单调增加函数，又由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，可以得出

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

所以

$$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|(x-z)+(z-y)|}$$
$$\leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

成立，从而知 $\mathbf{R}^1$ 按 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

例 4 设S为实数列$\{x_n\}$的全体(或复数列全体)所成的空间，称x_i为$x=\{x_i\}$的第i个坐标，对于$x,y\in S,x=\{x_i\},y=\{y_i\}$，令 $\rho(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}\dfrac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$，证明：

(1)$\rho(x,y)$ 是 S 上的一个度量； (2) 在 S 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛.

证 (1)ρ 满足非负性与对称性是显然的. 类似于例 3，可得三角不等式

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

所以 ρ 是 S 上的一个度量.

(2) 设点列

$$x^{(n)}=\{x_i^{(n)}\}\in S,\ n=1,2,\cdots,$$

又 $x=\{x_i\}\in S$，则 $\rho(x^{(n)},x)\to 0\ (n\to\infty)$ 的充要条件是，对于 $i\in\mathbf{N}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$.

因为，若

$$\rho(x^{(n)},x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty),$$

则对于每个 i，有

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty),$$

从而

$$|x_i^{(n)}-x_i|\to 0\ (n\to\infty).$$

反之，设 $x_i^{(n)}\to x_i\ (n\to\infty)$，$i=1,2,\cdots$，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in\mathbf{N}$，使得 $\sum\limits_{i=m}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又对于 $i=1,2,\cdots,m-1$，$\exists N_i\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N_i$ 时，有 $|x_i^{(n)}-x_i|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_{m-1}\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x^{(n)},x)=\left(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon,$$

即

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0\ (n\to\infty).$$

例 5 设 X 是非空集，对任何 $k\in\mathbf{N}$ 有 $X\times X$ 上函数 ρ_k，满足：

(1) 对任何 $x,y\in X$，$\rho_k(x,y)\geqslant 0$，$\rho_k(x,x)=0$；

(2) $$\rho_k(x,y)\leqslant\rho_k(x,z)+\rho_k(y,z),\quad x,y,z\in X.$$

又设对一切 $k\in\mathbf{N}$，均有 $\rho_k(x,y)=0$ 时，必有 $x=y$. 证明：X 按照

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}$$

成为度量空间，且对$\{x_n\}\subset X$，$\{x_n\}$按距离ρ收敛于x的充要条件是对一切自然数k，均有 $\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$.

证 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 是显然的. 若 $\rho(x,y)=0$，则对于一切 k，$\rho_k(x,y)=0$，从而 $x=y$.

对任何 k 和任何 x,y,有

$$\rho_k(x,y)\leqslant\rho_k(x,x)+\rho_k(y,x)=\rho_k(y,x)\quad 和\quad \rho_k(y,x)\leqslant\rho_k(y,y)+\rho_k(x,y)=\rho_k(x,y),$$

所以
$$\rho_k(x,y)=\rho_k(y,x)\Longrightarrow\rho(x,y)=\rho(y,x).$$

对 $x,y,z\in X$,有

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left[\frac{\rho_k(x,z)}{1+\rho_k(x,z)}+\frac{\rho_k(z,y)}{1+\rho_k(z,y)}\right]=\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

从而知 X 是一度量空间.

下证充要条件成立.设对一切 $k\in\mathbf{N}$,$\rho_k(x_n,x)\to0\ (n\to\infty)$,$\forall\varepsilon>0$,取 K,使得 $\sum\limits_{k=K}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$,再取 $N\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N$ 时,有

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x_n,x)}{1+\rho_k(x_n,x)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而知,当 $n>N$ 时,有 $\rho(x_n,x)<\varepsilon$,即 $\rho(x_n,x)\to0$.

反之,由 $\rho(x_n,x)\to0$,易知

$$\frac{\rho_k(x_n,x)}{1+\rho_k(x_n,x)}\leqslant2^k\rho(x_n,x)\to0\ (n\to\infty),$$

从而有
$$\rho_k(x_n,x)\to0\ (n\to\infty).$$

即 $\{x_n\}$ 按距离 ρ 收敛于 x 的充要条件是,对 $k\in\mathbf{N}$,均有 $\rho_k(x_n,x)\to0\ (n\to\infty)$.

例 6　取所有有界复数列作为元素组成集合 X,对每个元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$(简记做 $x=(\xi_j)$),都存在一个实数 C,使得 $|\xi_j|<C\ (j=1,2,\cdots)$.按 $\rho(x,y)=\sup\limits_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|$ 定义度量,令 $l^\infty=(X,\rho)$,证明:l^∞ 是度量空间.

证　由题设知,$x=(\xi_j)$,$y=(\eta_j)$ 都是有界的复数列,所以 $|\xi_j-\eta_j|\ (j=1,2,\cdots)$ 有界,且存在上确界,即 $\rho(x,y)=\sup\limits_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|$ 是有限的非负实数.

$x=y\Longrightarrow\rho(x,y)=0$ 是明显的.反之,若

$$\rho(x,y)=\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|=0,$$

则对每一 j,有
$$0\leqslant|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|=0,$$

从而
$$\xi_j=\eta_j\ (j=1,2,\cdots)\Longrightarrow x=y.$$

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 显然成立.

对任意 $z=(\zeta_j)\in X$,有

$$\begin{aligned}|\xi_j-\eta_j|&=|(\xi_j-\zeta_j)+(\zeta_j-\eta_j)|\leqslant|\xi_j-\zeta_j|+|\zeta_j-\eta_j|\\&\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\zeta_j|+\sup_{j\in\mathbf{N}}|\zeta_j-\eta_j|,\quad j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

依上确界的定义,由上式有

$$\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\zeta_j|+\sup_{j\in\mathbf{N}}|\zeta_j-\eta_j|,$$

即
$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

所以 l^∞ 是度量空间.

例 7　设 E 是勒贝格(Lebesgue)可测集,$m(E)<\infty$.设 S 是 E 上实值(或复值)可测函数全体,当 $f(t)$,$g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时,把 f 和 g 看做 S 中的同一点,且对于 $f,g\in S$,定义

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}t,$$

证明:(1)$\rho(x,y)$ 是 S 上的一个度量;

(2) 在 S 中,$\rho(f_n,f)\to0$ 的充要条件是 f_n 依测度收敛于 f.

证　(1) 因为 $f(t)$,$g(t)$ 是可测函数,当 $f(t)$,$g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时,可以把 f,g 看做

S 中的同一点，所以 $\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$ 是有界可测函数. 因为 $m(E)<\infty$，所以 $\rho(f,g)$ 有确定的意义，仿照例 6 可以证明，$\rho(f,g)$ 满足度量的三个条件.

(2) 设 f_n 依测度收敛于 f，则对于任何 $\sigma>0$，有　　$|f_n-f|>\sigma+\sigma|f_n-f|\geq\sigma$

$$E\left(\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}>\sigma\right)\subset E(|f_n-f|>\sigma),$$

所以

$$m\left(E\left(\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}>\sigma\right)\right)\leqslant m(E(|f_n-f|>\sigma))\to 0,$$

即 $\dfrac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}$ 依测度收敛于零，因为 $\dfrac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\leqslant 1$ 和 $m(E)<\infty$，则由实变函数中有界控制收敛定理知，$\rho(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$.

反之，若 $\rho(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$，则当 $\sigma>0$ 时，有

$$\rho(f_n,f)\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}t\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}m\quad(E(|f_n-f|\geqslant\sigma)).$$

令 $n\to\infty$，即知 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f.

例 8　判断在所有实数组成的集合上，下列 $\rho(x,y)$ 是否为度量：

(1) $\rho(x,y)=(x-y)^2$；　(2) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$.

解　(1) 不是度量. 不满足三角不等式，如 $x=1,z=0,y=-1$ 时，有

$$\rho(1,-1)>\rho(1,0)+\rho(0,-1).$$

(2) 是度量. 非负性与对称性显然满足，而

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{1/2}+|z-y|^{1/2})^2,$$

所以

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

例 9　设 ρ 是 X 上的度量，x,y,z,t 是 X 中任意四点，证明：

$$|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).$$

证　由三角不等式可得

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,t)+\rho(t,z),$$

故

$$\rho(x,z)-\rho(y,t)\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).\qquad①$$

在上式中，互换 x 与 y，z 与 t 可得

$$\rho(y,t)-\rho(x,z)\leqslant\rho(y,x)+\rho(t,z).\qquad②$$

综合式①、式②即得　$|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).$

例 10　设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续实值函数，对 $x,y\in\mathbf{R}$，记 $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$，证明：ρ 是 $\mathbf{R}$ 上度量的充要条件是 f 为严格单调函数.

证　设 f 是严格单调函数，直接验证可知，$\rho(x,y)$ 满足非负性、对称性与三角不等式，所以 ρ 是 $\mathbf{R}$ 上的度量.

反之，设 $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ 是 $\mathbf{R}$ 上的度量，则由 $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$ 知，当 $x\neq y$ 时，$f(x)\neq f(y)$.

现用反证法. 当 $x<y<z$ 时，有 $f(x)<f(y)<f(z)$ 或 $f(x)>f(y)>f(z)$. 设当 $x<y<z$ 时，有 $f(x)>f(y)$，$f(z)>f(y)$. 又设 $f(z)>f(x)$，则在 $[y,z]$ 上考察连续函数 f 可知，由所设 $f(z)>f(x)>f(y)$，依中值定理知，必存在 $t\in[y,z]$，使得 $f(t)=f(x)$. 而 $t>y>x$，所以不可能有 $x=t$，与定义 1 中的条件 1 矛盾. 对于 $x>y>z$ 时有 $f(x)<f(y)$，$f(z)<f(y)$ 的情形，类似可知结论不成立.

综上知，ρ 是 $\mathbf{R}$ 上度量的充要条件是 f 为严格单调函数.

例 11　设 X 是一度量空间，其度量为 $\rho(x,y)$，$x,y\in X$，证明：$\tilde{\rho}(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ 是 X 上另

一度量空间，并 $\bar{\rho}$ 是有界的.

证　$\bar{\rho}(x,y)$ 满足非负性与对称性是明显的. 因为 $\rho(x,y)$ 是 X 上的度量，对 $x,y,z\in X$，有

$$\bar{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\leqslant\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}=\bar{\rho}(x,z)+\bar{\rho}(z,y),$$

所以 $\bar{\rho}$ 是 X 上的又一度量空间.

由 $\bar{\rho}(x,y)<1$ 知，$(X,\bar{\rho})$ 是有界的.

例 12　设 $f:[0,+\infty)\to[0,\infty)$ 是严格增加函数，且满足

$$f(0)=0,\quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\quad x,y\in[0,\infty).$$

设 ρ 是 X 上的度量，证明：$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$ 也是 X 上的度量.

证　因为 f 的值域为 $[0,\infty)$，故 ρ_1 是非负的，且当 $\rho_1(x,y)=0$ 时，有 $f(\rho(x,y))=0$. 由 $f(0)=0$ 及 f 的严格单调性，知

$$\rho(x,y)=0\Longrightarrow x=y.$$

又
$$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))=f(\rho(y,x))=\rho_1(y,x),$$
$$\begin{aligned}\rho_1(x,z)&=f(\rho(x,z))\leqslant f(\rho(x,y)+\rho(y,z))\\&\leqslant f(\rho(x,y))+f(\rho(y,z))=\rho_1(x,z)+\rho_1(y,z),\end{aligned}$$

所以 $\rho_1(x,y)$ 也是 X 上的度量.

例 13　设 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上连续函数的全体，$\forall x,y\in C[a,b]$，定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

证明：$C[a,b]$ 按照 ρ 是度量空间.

证　$\rho(x,y)\geqslant 0$ 是显然的，且 $x(t)=y(t)$，$t\in[a,b]$ 时，$\rho(x,y)=0$. 反之，若 $x,y\in C[a,b]$，$\rho(x,y)=0$，则

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=0,$$

从而
$$|x(t)-y(t)|=0,\quad t\in[a,b],\quad 即\quad x(t)=y(t)\Longrightarrow x=y.$$

由定义即知 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

对 $[a,b]$ 上三个连续函数 x,y,z，有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

所以 $C[a,b]$ 按照 ρ 是度量空间.

例 14　设 $C^\infty[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无限次可微函数的全体，

$$\rho(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}{1+|f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}.$$

证明：$C^\infty[a,b]$ 按 $\rho(f,g)$ 构成度量空间.

证　(1) 若 $\rho(f,g)=0$，则 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}=0$，即 $f=g$.

$$\begin{aligned}(2)\rho(f,g)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}{1+|f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left\{\frac{|f^{(n)}(t)-h^{(n)}(t)|}{1+|f^{(n)}(t)-h^{(n)}(t)|}+\frac{|h^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}{1+|h^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}\right\}\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(n)}(t)-h^{(n)}(t)|}{1+|f^{(n)}(t)-h^{(n)}(t)|}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|h^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}{1+|h^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}\\&=\rho(f,h)+\rho(g,h),\end{aligned}$$

故 $C^\infty(a,b)$ 按 $\rho(f,g)$ 构成度量空间.

例 15　证明：点列 $\{f_n\}$ 按上例中定义的度量 $\rho(f,g)$ 收敛于 $f\in C^\infty[a,b]$ 的充要条件是 f_n 的

各阶导数在$[a,b]$上一致收敛于f的各阶导数.

证 必要性 若$\{f_n\}$按所定义度量收敛于f,即

$$\rho(f,f_n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}{1+|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}\to 0\ (n\to\infty),$$

故$\forall r\in\mathbf{N},\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\dfrac{|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}{1+|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}\to 0\ (n\to\infty)$,从而$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|\to 0\ (n\to\infty)$,即$f_n^{(r)}(t)$在$[a,b]$上一致收敛于$f^{(r)}(t)$. $\forall r,\ |f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|\to 0,\ f_n^{(r)}(t)\rightrightarrows f^{(r)}(t)$

充分性 若$\forall r\in\mathbf{N},f_n^{(r)}(t)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(t)$,则$\forall\varepsilon>0$,存在$r_0$,使得$\sum\limits_{r=r_0+1}^{\infty}\dfrac{1}{2^r}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又存在$N_r\in\mathbf{N}$,当$n>N_r$时,使得$\max|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2r_0},r=0,1,\cdots,r_0$. 取$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_{r_0}\}$,则当$n>N$时,

$$\rho(f,f_n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}{1+|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{r_0}\frac{1}{2^r}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}{1+|f_n^{(r)}(t)-f^{(r)}(t)|}+\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^r}<r_0\cdot\frac{\varepsilon}{2r_0}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即
$$\rho(f,f_n)\to 0\quad(n\to\infty).$$

例 16 设$l^\infty\triangleq\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid\bigvee\{|x_1|,|x_2|,\cdots\}<\infty\}$是有界列全体组成的空间,定义距离

$$\rho(x,y)=\bigvee_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|,\quad\forall x,y\in l^\infty,$$

证明:l^∞中的点列$x^{(k)}=\left\{\dfrac{1+k}{k}\chi_{\{k\}}(1),\dfrac{1+k}{k}\chi_{\{k\}}(2),\cdots\right\}$(仅第$k$个分量不为零)不是基本列,其中$\chi_{\{k\}}$是自然数$\mathbf{N}$上定义的单点集$\{k\}$的示性函数,若把这些点列所成之集记做$X$,则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x\in X\,\middle|\,\rho(x,x^{(k)})\leqslant\frac{1+k}{k}\right\}=\varnothing.$$

(文中$\bigvee$表示数集的下确界,$\bigwedge$表示上确界.)

证 因为,$\forall k\in\mathbf{N}$,有

$$\rho(x^{(k)},x^{(k+1)})=\bigvee_{n=1}^{\infty}\left|\frac{k+1}{k}\chi_{\{k\}}(n)-\frac{k+2}{k+1}\chi_{\{k+1\}}(n)\right|=\bigvee\left\{\frac{k+1}{k},\frac{k+2}{k+1}\right\}=\frac{k+1}{k}\geqslant 1,$$

所以$x^{(k)}$不是基本列.

令
$$Y\triangleq\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x\in X\,\middle|\,\rho(x,x^{(k)})\leqslant\frac{k+1}{k}\right\},$$

因为,$\forall x^{(m)}\in X$,$\rho(x^{(m)},x^{(m+1)})=\bigvee\left\{\dfrac{m+1}{m},\dfrac{m+2}{m+1}\right\}=\dfrac{m+1}{m}>\dfrac{m+2}{m+1}$,

故$x^{(m)}\overline{\in}\left\{x\in X\,\middle|\,\rho(x,x^{(m+1)})\leqslant\dfrac{m+2}{m+1}\right\}$,即$x^{(m)}\overline{\in}Y$. 从而$Y=\varnothing$.

例 17 设X为数列$x\triangleq\{x_n\}$的全体,定义$\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$,证明:例16中点列$x^{(k)}$收敛于$0\triangleq(0,0,\cdots)$.

证
$$\rho(x^{(k)},0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\dfrac{1+k}{k}\chi_{\{k\}}(n)\right|}{1+\left|\dfrac{1+k}{k}\chi_{\{k\}}(n)\right|}=\frac{1}{2^k}\frac{(1+k)/k}{1+(1+k)/k}=\frac{k+1}{2^k(2k+1)}\xrightarrow{k\to\infty}0,$$

故$x^{(k)}\to 0\triangleq(0,0,\cdots,0)$.

第二节 度量空间中的点集与映射

主要内容

1. 定义 1 设(X,ρ)是一度量空间，$x_0\in X$，实数$r>0$，则称点集

$$B(x_0;r)=\{x\mid x\in X\text{ 且 }\rho(x,x_0)<r\} \tag{①}$$

为以点x_0为中心、r为半径的**开球**. 称点集

$$\widetilde{B}(x_0;r)=\{x\mid x\in X\text{ 且 }\rho(x,x_0)\leqslant r\} \tag{②}$$

为以点x_0为中心、r为半径的**闭球**. 称点集

$$S(x_0;r)=\{x\mid x\in X\text{ 且 }\rho(x,x_0)=r\}$$

为以点x_0为中心、r为半径的**球面**，且

$$S(x_0;r)=\widetilde{B}(x_0;r)-B(x_0;r).$$

2. 定义 2 设集$A\subset X$，X是度量空间. 对点$x_0\in A$，若存在$\varepsilon>0$，使得$\{x\mid\rho(x,x_0)<\varepsilon\}\subset A$，则称点$x_0$是$A$的**内点**.

若A中每一点都是内点，则称A是X的开集(规定$\varnothing$是开集).

3. 定义 3 设X是度量空间，$x_0\in X$，则称X中包含点x_0的任何开集G为点x_0的一个**邻域**.

4. 定理 1 设X是度量空间，则

(1) 空集与全空间是开集(即$\varnothing$与X是开集)； (2) 任意个开集的并集是开集；

(3) 有限个开集的交集是开集.

5. 定义 4 设X是度量空间，A是X中的点集. 对于$x_0\in X$，若点x_0的每个ε邻域中都含有A中无限多个点，则称点x_0是A的**聚点**(**或极限点**).

下列命题等价：

(1)x_0是A的聚点； (2)x_0的任一邻域内必含有A中异于点x_0的点；

(3) 在A中存在点列$\{x_n\}$，有$x_n\neq x_0$，且$x_n\to x_0$.

6. 定义 5 设A是度量空间X中的点集，称A的聚点全体构成的集合为A的**导集**，记做A'. 若$A'\subset A$，则称A为**闭集**. $\overline{A}=A\cup A'$称为A的**闭包**.

下列命题等价：

(1)A是闭集； (2)A中任何收敛点列$\{x_n\}$必收敛于A中点；

(3)A^C*是开集； (4)$A=\overline{A}$.

在任意的度量空间中，空集及全空间是闭集，任意个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并集是闭集.

7. 定义 6 设X与Y是度量空间，f是$A\subset X$到Y的映射，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得满足$\rho(x,x_0)<\delta$的一切$x\in A$，$\bar{\rho}(f(x),f(x_0))<\varepsilon$恒成立，则称映射$f$关于$x_0$是**连续的**. 若$f$关于$A$的每个点都连续，则称$f$是$A$上的**连续映射**.

定义 6 也可叙述为：若对$f(x_0)$的任何邻域$N(f(x_0))$，必有x_0的一个邻域$N(x_0)$，使得当$x\in N(x_0)\cap A$时，$f(x)\in N(f(x_0))$，则称f在点x_0是**连续的**. 若f关于A的每个点都连续，则称f是A上的**连续映射**.

以下命题等价：

---

* 国标规定A的补集用$\complement A$表示，为了与大多数教材呼应，本书仍用A^C表示.

(1) 映射 f 在点 x_0 连续；

(2) 对于 $f(x_0)$ 的任何 ε 邻域 $N(f(x_0),\varepsilon)$，必有点 x_0 的 δ 邻域 $N(x_0,\delta)$，使得当 $x \in N(x_0,\delta) \cap A$ 时，$f(x) \in N(f(x_0),\varepsilon)$；

(3) 对于 A 中任意一列收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ 成立.

8. 定理 2　度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 f 在 X 上是连续的充要条件是，Y 的任何开子集的原像是 X 的开子集.

推论　度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 f 在 X 上连续的充要条件是，Y 的任一闭子集的原像是 X 的闭子集.

9. 定义 7　当一个映射 f 把定义域 $\mathscr{D}(f)$ 中的每个开集映为值域 $\mathscr{R}(f)$ 中的开集时，称 f 是开映射.

Domain　Range

设 X, Y 是两个度量空间，T 是 $\mathscr{D}(T)$ $(\subset X)$ 到 Y 中的算子，如果

$$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in \mathscr{D}(T)\}$$

是乘积距离空间 $(X \times Y, \rho)$ 中的闭集，则称 T 是**闭算子**或**闭映射**.

定理 3　定义域是闭集的连续映射必是闭映射.

疑难分析

度量空间中的连续映射与数学分析中的连续函数有什么联系？

答　可以认为，度量空间中的连续映射是数学分析中连续函数概念的推广. 在数学分析中函数 f 的连续性是这样定义的：若 f 定义在 $[a,b]$ 上，$x_0 \in [a,b]$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，则称 f 在点 x_0 连续. 若对每个 $x \in [a,b]$ f 都连续，则称 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

对两个度量空间 X 和 Y，映射 $f: X \to Y$ 在点 $x_0 \in X$ 连续，是指 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得对满足 $\rho(x, x_0) < \delta$ 的一切 x，恒有 $\tilde{\rho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ 成立. 如果 f 关于 X 的每个 x 都连续，则称 f 是连续映射.

可见，这两个概念是密切相关的，其中后一概念包含前一概念.

典型例题

度量空间中的点集与映射是 $\mathbf{R}^n$ 中点集概念与数学分析中集合与函数概念的拓广，要求认识它们之间的联系与叙述上的区别.

例 1　证明：在度量空间中，(1) 任意开球是开集；(2) 任意闭球是闭集.

证　(1) 设任取 $x \in B(x_0; r)$，则 $\rho(x, x_0) = a < r$，故 $B\left(x; \frac{r-a}{2}\right) \subset B(x_0; r)$，即为开集.

(2) 任取 $y \in \widetilde{B}(x_0; r)$，则 $\rho(x, x_0) = a > r$，所以 $B\left(y; \frac{a-r}{2}\right) \subset B(x_0; r)^C$. 即 $\widetilde{B}(x_0; r)^C$ 是开集，故 $\widetilde{B}(x_0; r)$ 是闭集.

例 2　设 A 和 B 是距离空间 X 中互不相交的两个闭集，证明：X 中存在互不相交的两个开集 U 和 V，使得 $A \subset U$，$B \subset V$.

证　由题设 $A \cap B = \varnothing$，知 $A \subset X \backslash B$，而 $X \backslash B$ 是开集，故对 $x \in A$，$\exists \delta_x > 0$，使 $N(x, \delta_x) \subset X \backslash B$. 取 $U = \bigcup\limits_{x \in A} N(x, \delta_x / 2)$，则 U 是一族开集的并，仍为开集，且有 $A \subset U$.

类似地，对 $y \in B$，$\exists \delta_y > 0$，使 $N(y, \delta_y) \subset X \backslash A$. 取 $V = \bigcup\limits_{y \in B} N(y, \delta_y / 2)$，则 V 是开集，且 $B \subset V$.

下面用反证法证 $U \cap V = \varnothing$. 设 $z \in U \cap V$,由题设知,$\exists\, x \in A, y \in B$,使得 $z \in N(x,\delta_x/2) \cap N(y,\delta_y/2)$,从而

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) < \delta_x/2 + \delta_y/2 \leqslant \max(\delta_x,\delta_y),$$

于是当 $\rho(x,y) < \delta_x$ 时,$y \in X\backslash B$ 是不可能的. 同样,当 $\rho(x,y) < \delta_y$ 时,$x \in X\backslash A$ 也是不可能的. 所以,必有 $U \cap V = \varnothing$.

例 3 证明:任意非空集 $A \subset (X,\rho)$ 是开的 $\Longleftrightarrow A$ 为开球的并.

证 若 A 是开球 B_a 的并,即 $A = \bigcup\limits_{a \in A} B_a$,则对每个 $a \in A$,存在开球 B_a,使得 $a \in B_a = \{z \mid \rho(x_a,z) < r_a\}$. 于是 $\rho(x_a,a) = \varepsilon < r_a$,取 $\eta = \frac{1}{2}(r_a - \varepsilon)$,$B(a;\eta) \subset B_a \subset A$,从而 A 是开集.

反之,若 A 是开集,则对于每个 $a \in A$,存在开球 $B(a;r) \subset A$,从而,A 可表示为这些开球之并,即 $A = \bigcup\limits_{a \in A} B(a;r)$. $\supset A \supset B(a;r)$

例 4 证明:度量空间 X 中的点集 F,对于 $\varepsilon > 0$,定义 $\rho(x,F) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in F\}$,则
(1) $\{x \mid \rho(x,F) < \varepsilon\}$ 是 X 中的开集; (2) $\{x \mid \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\}$ 是 X 中的闭集.

证 对于函数 $f: X \to [0,\infty)$,$f(x) = \rho(x,F)$,f 是连续的,因为对于任何 x,z,有

$$\rho(x,F) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in F\} \leqslant \inf\{\rho(x,z) + \rho(z,y) \mid y \in F\} = \rho(x,z) + \rho(z,F).$$

类似地,有

$$\rho(z,F) \leqslant \rho(z,x) + \rho(x,F),$$

从而

$$|f(x) - f(z)| < \rho(x,z).$$

知 f 是连续映射,因此由连续映射的定理知

$$\{x \mid \rho(x,F) < \varepsilon\} = f^{-1}((-\infty,\varepsilon))$$

是开集;

$$\{x \mid \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\} = f^{-1}([0,\varepsilon])$$

是闭集.

例 5 证明:度量空间中的任一闭集必为可列个开集的交,任一开集必为可列个闭集的并.

证 设 F 是度量空间中的闭集,则 $F = \{x \mid \rho(x,F) = 0\}$,显然

$$\{x \mid \rho(x,F) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid \rho(x,F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

因此由例 4 的结论可知,F 是一列开集的交.

设 G 是开集,则 G^C 是闭集,可以表为一列开集之交,即 $G^C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$,从而

$$G = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^C,$$

即 G 是一列闭集的并.

例 6 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数全体,对于 $x,y \in C[a,b]$,定义 $\rho(x,y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$,则 $C[a,b]$ 按 ρ 成为度量空间. 设 $A = \{x \mid x \in C[a,b]$,且 $t \in B$ 时,$|x(t)| < \alpha\}$,其中 B 是 $[a,b]$ 的子集,α 是正常数. 证明:A 为开集 $\Longleftrightarrow B$ 为闭集.

证 充分性 设 B 为闭集,则对 $x \in A$,有 $\max\limits_{t \in B} |x(t)| < \alpha$. 记 $\delta = \alpha - \max\limits_{t \in B} |x(t)|$,当 $y \in N(x,\delta)$(x 的 δ 邻域)时,有 $N(x,\delta) \subset A$

$$\max_{t \in B} |y(t)| \leqslant \max_{t \in B} |x(t)| + \max_{t \in B} |x(t) - y(t)| < \max_{t \in B} |x(t)| + \delta = \alpha,$$

所以 $y \in A$,即 $N(x,\delta) \subset A$,证得 A 是开集.

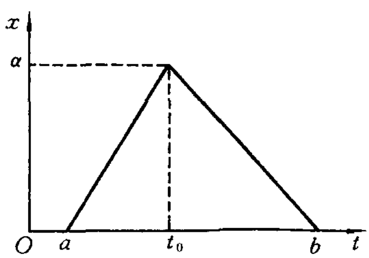

图 1.1

必要性 用反证法. 设 A 为开集,而 B 不是闭集,则存在一点列 $\{t_n\} \subset B$,而 $t_n \to t_0 \,\overline{\in}\, B$. 不妨设 $a < t_0 < b$(其它情形可类似讨论). 作 $x \in C[a,b]$(见图 1.1),可以看出,$x \in A$,但对任何 $\delta > 0$,当 $\delta > \delta_1 > 0$ 时,$x(t_0) + \delta_1 = \alpha + \delta_1$

$N(x_0,\delta_1)$