

科学天下
新观念数学
XINGUANNSHIXUE



微积分之 倚天宝剑

HOW TO ACE THE REST OF CALCULUS:
THE STREETWISE GUIDE



严重警告

真要命!

这本书内容过于清晰、直接、搞笑，
可能危及微积分“让学生迷惑、补考重修”
这历久不衰的重要功能。

本人建议：学校应该把这本书列为
禁书!

——William Thurston
(1982年菲尔兹奖得主)

一打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

打遍级数，让微积分简单易学!

[美] C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森 / 著 张 菽 / 译

湖南科学技术出版社

科学天下
新观念数学
XINGGUANNIANSHUXUE



微积分之

倚天宝剑

HOW TO ACE THE REST OF CALCULUS:
THE STREETWISE GUIDE



严重警告
真要命!

这本书内容过于清晰、直接、搞笑，
可能危及微积分“让学生迷惑、补考重修”
这历久不衰的重要功能。
本人建议：学校应该把这本书列为
禁书!

——William Thurston
(1982年菲尔兹奖得主)

—打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

打遍级数，让微积分简单易学!

[美] C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森 / 著 张菽 / 译
湖南科学技术出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

微积分之倚天宝剑 / (美) 汤普森著 ; 张菽译. --
长沙 : 湖南科学技术出版社, 2010. 4
ISBN 978-7-5357-6191-0

I. ①微… II. ①汤… ②张… III. ①微积分—普及
读物 IV. ①O172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 069486 号

First published in the United States

by

W.H.FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke

Copyright © 2001 by W.H. Freeman and Company All Rights Reserved

湖南科学技术出版社通过台湾博达著作权代理公司获得本书中文简体版中国大陆地区独家出版发行权。

版权登记号: 18-2004-104

版权所有, 侵权必究

科学天下 新观念数学

微积分之倚天宝剑

——打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

著 者: [美] C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森

译 者: 张 菽

策划编辑: 孙桂均 李 媛

文字编辑: 陈一心

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731 - 84375808

印 刷: 长沙化堪印刷有限公司

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址: 长沙市青园路 4 号

邮 编: 410004

出版日期: 2005 年 5 月第 1 版

2010 年 5 月第 2 版第 3 次

开 本: 710mm×1020mm 1/16

印 张: 19.5

字 数: 304000

书 号: ISBN 978-7-5357-6191-0

定 价: 32.00 元

(版权所有·翻印必究)

- 第 1 章 导 言 (2)
- 第 2 章 不 定式与反常积分 (5)
 - 2.1 不定义 (5)
 - 2.2 反常积分 (9)
- 第 3 章 极 坐标 (13)
 - 3.1 何谓极坐标? (13)
 - 3.2 极坐标中的面积 (19)
- 第 4 章 无 穷级数 (26)
 - 4.1 序列 (26)
 - 4.2 序列的极限 (28)
 - 4.3 级数:基本概念 (28)
 - 4.4 个性外向的几何级数 (32)
 - 4.5 第 n 项检验法 (34)
 - 4.6 更多朋友:积分检验与 p 级数 (35)
 - 4.7 比较检验法 (39)
 - 4.8 交错级数与绝对收敛 (44)
 - 4.9 更多检验法 (47)
 - 4.10 幂级数 (50)
 - 4.11 什么时候该用什么检验 (52)

- 4.12 泰勒级数 (54)
- 4.13 带有余项的泰勒公式 (61)
- 4.14 一些著名的泰勒级数 (64)

- 第 5 章 向量:从欧几里得到丘比特 (66)
 - 5.1 平面上的向量 (66)
 - 5.2 太空:最后的疆界(空间:期末考的边远地带) (72)
 - 5.3 空间中的向量 (75)
 - 5.4 点积(内积) (77)
 - 5.5 叉积(外积;向量积) (84)
 - 5.6 空间中的直线 (91)
 - 5.7 空间中的平面 (94)

- 第 6 章 空间中的参数曲线:来坐坐云霄飞车 (101)
 - 6.1 参数曲线 (101)
 - 6.2 曲率 (108)
 - 6.3 速度与加速度 (112)

- 第 7 章 曲面与作图 (116)
 - 7.1 平面上的曲线:回顾一下 (116)
 - 7.2 三维空间方程式的图形 (118)
 - 7.3 旋转曲面 (123)
 - 7.4 二次曲面(带 -oid 字尾的曲面) (124)

- 第 8 章 **多** 变量函数及它们的偏导数 (132)
- 8.1 多变量函数 (132)
 - 8.2 等高线 (137)
 - 8.3 极限 (140)
 - 8.4 连续性 (144)
 - 8.5 偏导数 (147)
 - 8.6 最大值和最小值问题 (157)
 - 8.7 链式法则 (163)
 - 8.8 梯度与方向导数 (167)
 - 8.9 拉格朗日乘数 (172)
 - 8.10 二阶导数检验 (176)
- 第 9 章 **多** 重积分 (180)
- 9.1 二重积分与极限:技术方面的东西 (183)
 - 9.2 求二重积分 (184)
 - 9.3 二重积分与图形下方的体积 (191)
 - 9.4 极坐标中的二重积分 (194)
 - 9.5 三重积分 (198)
 - 9.6 柱面坐标与球面坐标 (204)
 - 9.7 质量、质心、矩 (216)
 - 9.8 坐标变换 (223)

第 10 章 向量场与格林-斯托克斯帮 (227)

10.1 向量场 (227)

10.2 认识散度跟旋度 (230)

10.3 线积分阵容 (236)

10.4 向量场的线积分 (237)

10.5 保守向量场 (241)

10.6 格林定理 (246)

10.7 散度定理:求散度的积分 (249)

10.8 面积分 (252)

10.9 火上加油! (260)

第 11 章 期末考试会考些什么? (264)

词汇表:数学名词速成 (270)

英汉对照索引 (282)

公式秘笈 (286)

谨以此书

献给

所有买了我们第一本书的学生们，

衷心希望你们第一学期

拿到 90 分



第 1 章

导 言

本书是《微积分之屠龙宝刀》的续篇，读者是已经修过至少一学期微积分的学生，书里的内容包含了微积分剩下的部分中，所有你需要知道的素材，诸如多变量微积分，以及序列与级数。为什么我们要写这第二本书呢？主要原因是，在《微积分之屠龙宝刀》出版后，我们收到了无数正面回应的信件，得到广大读者的鼓舞。以下是其中一封来信：

亲爱的三位数学怪胎：

谁想得到你们三个满脑子数学的鸭蛋头，居然会写出一本让我欣赏的书？你们的《微积分之屠龙宝刀》真是写得很棒，完全转变了我对数学的观感。为了让自己有更多时间做数学习题，我已经毅然决然辞去了兄弟会的“整人组”组长一职，我甚至正在认真考虑，是否也应该一并戒掉啤酒。之所以迟迟未做决定，原因是一旦戒了酒，我这兄弟会自然就待不下去啦。不过现在想想，即使离开兄弟会，也没啥大不了！自从你们的书让我开了眼界，看到数学真实、美好的一面之后，我对人类的各种创新努力，重新产生了敬意，也不再贸然轻视我们这个多元社会里的每一个人。换言之，我不再以貌取人；以前我认为，怪胎不可能有啥能耐跟内涵，现在我终于了解到，外形上的特质不足以反映出内在的巨大创新潜力。为此，我要谢谢你们改变了我的一生。

我现在已下定决心，今后要贡献绵薄之力，扫除社会上跟昨日之我相同的无知偏见。不过我也知道，无论我如何努力，成效远不如你们通过著书立说，

匡正社会陋习的伟大贡献。你们真了不起，我将永远感谢你们。如果你们认为我有任何帮得上忙的地方，不管是人事上还是财务上，千万别客气，尽管吩咐。

庄孝维 谨上

附言 我只是在希望跟祈祷，你们能考虑为《微积分之屠龙宝刀》写一本续集，写完该书尚未提到的部分，包括序列、级数及多变量微积分等等。

好啦好啦！算你厉害，居然给你猜中了，这封信不是真的，而是我们杜撰出来的。不过，信中流露的感情却是千真万确的。在一个又一个邮包的来信里，虽说每位读者的表达方式不尽相同，但对《微积分之屠龙宝刀》的赞誉，却是异口同声，让我们大大感动。

如果你现在正在书店里翻阅这本书，你大概是：

1. 刚修过初等微积分，使用过我们的《微积分之屠龙宝刀》，而且顺利拿到高分。那么你还在犹疑什么？已经证明有帮助了，不是吗？
2. 刚修过初等微积分，但没有读到我们的前一本书，结果成绩很差。显然，你应该即刻买下这本书，以便亡羊补牢。顺便把第一本也一并买下，保证有益无害。
3. 并没有买过我们的第一本书，而你也获得了高分。恭喜你，你真不简单，这证明了你的天资跟努力都具有相当水准。但是你有没有仔细想一想，你是不是因为运气好，才拿到高分？奉劝你赶快买下这本书，好大幅提高胜算。
4. 的确买了我们的第一本书，学期结束时却没能获得高分。难道是我们忘了告诉你，即使有了那本书，你还是必须上课听讲，考试时也不能缺席？

我们实在不愿意想到或看到，你站在书店拥塞的走道上读这本书，身旁人来人往，而你连个坐下伸个腿的地方都没有。要是你现在就把书买回家，待会儿你就可以啜着冷饮，舒舒服服地坐下来，仔细阅读你刚买的新书。这岂不是一大乐事？

在这本书中，我们将不再重复告诉你如何选任课老师、如何有效学习微积分等等（不过，我们希望这两本书能够并排摆在你的书架上，随时供你参考），在你使用这《微积分之倚天宝剑》时，那些忠告一样用得着。

这本书的目的，是在向你讲解微积分后半部的一些专题，而不是要取代你现有的教科书。事实上，它也无法取代教科书；原因是分量不够重。但是，这本书足以让你明白，微积分这门课究竟在搞些什么。所以你就放心读吧，希望你读得开心！

附言 不妨上网浏览我们的网站 howtoace.com，你会看到许多帮助你拿高分的资讯，包括旧考题网页的联结、数学笑话，以及进一步的讲解等等。



第 2 章

不定式与反常积分

2.1 不定式

知道自己的能耐与极限，是一项非常重要的技能。这意思就是说，你最好不要因为一时高兴，跑到上海金茂大厦的屋顶，只用几根指头吊在屋檐边上，除非你确实知道你有这个本事，绝对不会出事。要练得这个不寻常的本事，不可一蹴而就，你必须花上许多工夫逐步练习；一开始时也许你得趁着没课，跑到学校体育馆吊单杠，接下来试试自家浴室的窗子外沿，然后是外白渡桥的桥身，最后才轮得到金茂大厦。你必须知道自己究竟有多大本事，你的极限在哪儿。

数学也一样，你希望计算出你的极限值。譬如看到 $\lim_{x \rightarrow e} (x^2 + 2)$ ，你希望能算出 11，或者：

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 2}{x^2} = \frac{-1}{e^2}.$$

不过，就像你可能会高估你的体能，你也很有可能高估了你求极限的本事。比方说， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 12}{x^3 - 8}$ 等于什么？

答案不是很明显吧？如果把 $x = 2$ 代进式子里，我们会得到 $\frac{0}{0}$ 。那么 $\frac{0}{0}$ 又

等于多少呢？等于 0、1，还是 ∞ ？好问题！实际上，这个极限可以等于它们之中的任何一个。那就是为什么我们把这样的极限叫做“不定式”。

最顶顶有名的不定式就是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

如果我们把 $x=0$ 代进上式，得到的是 $\frac{0}{0}$ ，这答案能告诉我们的不多，但是我们真的很想知道这个极限，怎么办？

会得到 $\frac{0}{0}$ 这种极限的状况有许多种，特别是当我们要用导数的极限定义，来证明 $\sin x$ 的导数是 $\cos x$ 。好在我们可以用一条现成的法则，来求这类极限，这条法则是由 17 世纪的大数学家伯努利 (Johann Bernoulli) 首先发现的，但是却命名为“洛必达法则”。洛必达* (Guillaume L'Hôpital) 是一位有钱的侯爵，他花钱请伯努利教他微积分，结果也抢走了伯努利的功劳！（*洛必达也是数学家。）

其实，这种事情屡见不鲜，就拿这本书来说吧，虽然作者挂着我们三个人的名字，可是根本就不是我们写的——而是我们花钱请比尔·盖茨写的！附带一提，L'Hôpital 的正确发音是 Low-pee-tall (译按：中文译成“洛必达”，算是相当传神，不过作者在此开了个玩笑，Low-pee-tall 在英文字面上有“智商低劣者，骑在高智商者头上撒尿”的意义)。

让我们言归正传，下面就是这个法则：

洛必达法则：如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是不定式，那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这条法则到底要告诉我们什么？它其实是说：“如果在你取极限时，你被卡在 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 这一步上，求不出答案，那么只要改看 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 就可以啦！”

例题 1 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 。

解：首先我们得瞧瞧题目是否为不定式。把 $x=0$ 代入 $\frac{\sin x}{x}$ 之后，我们得到

$\frac{0}{0}$ ，因此用得上洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

哇塞！真是简单！看样子没有人不会爱上这条法则。我们再试一个问题看看！

例题 2 试求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 。

解：这也是一个 $\frac{0}{0}$ 不定式，可以套用洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2.$$

对于这一题，其实我们无须用上洛必达法则；我们仅仅用一些代数，把式子化简一下就可以了，就像这样：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

瞧，答案一样，用哪一个方法全看你的喜好。

例题 3 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ 。

解：这又是一个 $\frac{0}{0}$ 不定式！它们简直是无所不在。于是，洛必达告诉我们：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (\text{然而这仍然还是 } \frac{0}{0} \text{ 的形式,}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}. \quad (\text{所以再套一次洛必达法则.}) \end{aligned}$$

注意，在这题中，我们连续用了两次洛必达法则，但是有个重点别忘了：在第二次套用洛必达法则前，还是必须检查它仍然是个不定式。

常犯的错误 把洛必达法则套用到非不定式，是学生常犯的错误。这种错误在任何一种情况下都可能发生，但最常出错的地方，就是套用不止一次的时候。无论何时，请在每一步骤仔细检查。

牵涉到 ∞ 的不定式

如果我们遇到 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种不定式，洛必达法则一样可以派上用场。

例题 4 试求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 。

解：如果我们把 $x = \infty$ 代入分子与分母，会得到 $\frac{\infty}{\infty}$ ，所以也是一个不定式。套用洛必达法则，就得到：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

极限是 0。这个答案应该怎么解释呢？它的意思就是，当 x 越近无穷大时，分母的 \sqrt{x} 增加得比分子的 $\ln x$ 要快。

其他的不定式

前面我们看到了，如果一个极限成了 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式，我们都可以用洛必达法则把它摆平；但这也是能够套用该法则的先决条件。

警告！ $\frac{0}{\infty}$ 可不是不定式，它根本就等于 0。还有， $\frac{\infty}{0}$ 也不是不定式，它等于 $\pm \infty$ 。这两种情形下，都不能使用洛必达法则。

有的时候，其他一些形式也可以改成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式。比方说，我们假定 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$ ，由于这个乘积可以等于任何数，所以也是一种不定式；我们可以把它改成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式，只要把两个函数挪动一下就成了：

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ 或 } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

如此挪动之后，直接做下去就可以求解了。

例题 5 试求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$ 。

解：若让 x 越趋近无穷大，我们可以看出它是 $0 \cdot \infty$ 的形式，于是照以上所说，把它重写为：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}.$$

如此一来，它就变成不定式，所以：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

这就有点像你想要过河，而唯一的桥建在离你所站的位置有点距离，那么你就得绕点路，走到桥头去。这也有点像小婴儿用奶瓶喝牛奶，喝完后胀了一肚子空气，必须把空气拍出来，小婴儿才能入睡——把空气拍出来，相当于把原式重写成 $\frac{0}{\infty}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式，入睡就是使用洛必达法则。

2.2 反常积分

在写《微积分之屠龙宝刀》时，我们一直避免提到这玩意，但是现在就不得不介绍一下了。你一定知道它们的那副德性：来参加“微积分舞会”时，穿着T恤，上面画着晚礼服；吃饭的时候，根本不理睬餐桌礼仪，就只用那把吃甜点的小叉子，从头吃到尾；当旁人因消化不良，不由自主地放了一个响屁时，它们会肆无忌惮的高声大笑，让人难堪。没错，我们描绘的就是反常积分，如果它们不是这么重要，我们压根儿不会请它们来搅局。

反常积分又可概分为两类。第一类是没有上限或下限的积分；这类的积分不是从 -2 积分到 4 或是从 3 积分到 7 等等，而是从 1 到 ∞ ，或从 $-\infty$ 到 2 ，甚至是从 $-\infty$ 到 ∞ 。例如 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ，就是一个像这样的积分。

反常积分的第二种类型是，它们有一定的积分区间，不过在积分过程中，被积函数的值在某处却跑到 $\pm \infty$ 去了。例如 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^{2/3}} dx$ ，当 $x=0$ 的时候，它的被积函数等于 ∞ 。

为了容易解释，我们最好把以上两种类型分开来讨论。首先讲第一类型。

当积分上下限为 $\pm \infty$ 时

让我们再瞧瞧上面所举的例子 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$. 由于它的上限为无穷大, 看起来多少有些怪怪的. 我们应该如何着手呢? 在《微积分之屠龙宝刀》里你已经学到, 定积分通常代表被积函数图形下方的面积, 那么我们且利用这个观点, 来看看这个例子. 没错, 从图 2.1 可看出, 它确实是表示从 1 到 ∞ 之间, $\frac{1}{x^2}$ 曲线下方的面积, 应该没啥问题.

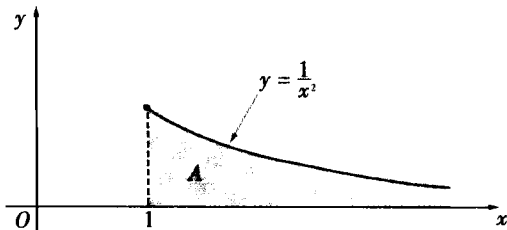


图 2.1 相当于 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 的面积

我们知道你的脑袋里在想什么: 图上那块灰色色块, 面积会随着 x 增大而变大, 无穷无尽, 所以答案必定是 ∞ , 这还不简单! 慢着! 你这想法看似振振有词, 但是却跟事实不符! 为了发掘真相, 我们得正确解释 ∞ 这个积分上限的性质与意义. 在这里, 我们应该把 ∞ 想成是一堆愈来愈大的数的极限, 也就是 $\lim_{b \rightarrow \infty} b$, 如此一来, 这个反常积分例子, 就要正式解释成:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{-1}{b} \right) - (-1) \right] = 0 - (-1) = 1,$$

所以在这个例子里, 函数曲线下方的面积就等于 1.

把这个实例一般化之后, 就得到以下的公式:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

有的时候, 就像上例一样, 反常积分的答案是个有限的数, 此时我们就说这个反常积分“收敛”(converge). 但在其他时候, 极限是 ∞ 或根本不存在, 我