

国家精品课程教材

教育部高等学校生物医学工程教学指导委员会“十一五”规划教材

生物建模仿真

Biological Modeling and Simulation

田 心 主编



清华大学出版社

第 2 版

国家自然科学基金委员会生物医学工程重点研究基地项目 2004 年度资助项目

生物建模仿真

Biological
Modelling
and Simulation

田 鑫 主编

ISBN 7-309-05402-2

国家精品课程教材

教育部高等学校生物医学工程教学指导委员会“十一五”规划教材

生物建模仿真

Biological Modeling and Simulation

田 心 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本教材包括两个部分：第一部分(1~6章)，介绍数学模型建模的基本理论和方法，计算机仿真的基本理论和方法，以及建模与仿真的校核、验证和确认(VVA)技术；第二部分(7~10章)，分别介绍生物系统建模仿真的四类典型范例。在第一部分中，第1章概述系统、系统建模及计算机仿真的基本概念，以及生物系统建模仿真的应用动态概况；第2章介绍连续系统数学模型的类型、模型之间的相互转换以及模型的建模方法等；第3章介绍连续时间数学模型转换为计算机仿真模型的主要方法：数值积分法、离散相似法和替代法；第4章介绍基于实验数据的建模仿真的基本理论和方法，包括参数模型的概念及模型参数估计方法，以及系统辨识的基本概念和方法；第5章介绍在MATLAB平台上Simulink模块式建模仿真的基本理论和方法，以及Simulink建模仿真的典型例子；第6章介绍建模与仿真的校核、验证和确认(VVA)技术的基本概念。在第一部分的基础上，第7~10章分别介绍生物系统建模和仿真的4个典型实例。第7章是单一种群增长的微分方程模型，包括Malthusian方程和Logistic方程；第8章介绍房室模型的建模与仿真，以及房室模型的辨识和可辨识性；第9章介绍描述动作电位产生的Hodgkin-Huxley方程的建模与仿真；第10章介绍脑电的自回归(AR)模型的建模与仿真。

本教材为普通高等院校生物医学工程专业本科生教材，也可作为相关专业本科生和研究生的参考教材，并可供从事生物建模仿真的科技工作人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

生物建模仿真/田心主编. —北京：清华大学出版社，2010.4

ISBN 978-7-302-20914-0

I. 生… II. 田… III. 仿真—数学模型—教材 IV. Q811-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第163711号

责任编辑：王一玲

责任校对：时翠兰

责任印制：王秀菊

出版发行：清华大学出版社

地 址：北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编：100084

社 总 机：010-62770175

邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京嘉实印刷有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185×260 印 张：8.25 字 数：205千字

版 次：2010年4月第1版 印 次：2010年4月第1次印刷

印 数：1~3000

定 价：19.00元

产品编号：034475-01



应用数学模型描述系统,通过计算机进行模型求解,已经发展成为现代的建模仿真技术。应用计算机仿真技术可以求解许多复杂的、无法解析求解的系统。随着计算机技术的飞速发展,建模仿真的理论、算法及计算机实现也得到了飞速发展。作为现代科学技术的重要内容,建模与仿真技术已经渗透到各个领域,生物系统是最复杂、应用最广泛的领域。生物系统的建模与仿真是生命科学研究的有力工具,已经成为国内外生物医学工程专业和相关专业的基本知识结构。为了适应生物医学工程交叉学科人才培养的需要,在教育部高等学校生物医学工程教学指导委员会的支持下,我们编写了这本教材。

在本教材中只涉及描述生物系统常用的连续状态系统的建模仿真,以及基于实验数据的系统建模与仿真,不涉及离散状态系统的建模仿真。编写本教材的思路是在打下建模仿真实论和方法扎实基础的前提下,通过学习生物建模仿真的经典范例,培养学生分析和解决生物系统建模仿真问题的能力。

虽然建模与仿真的应用领域不同,但是其基本理论、方法和技术具有共性,因此本教材力求系统地论述建模与仿真的基本理论和方法。

由于生物建模仿真的应用实例众多,不可能一一列举,在本教材中,编者力求通过几类典型生物系统的建模仿真,以点带面,培养学生学习应用建模仿真的基本理论和方法,去分析和解决生物系统实际问题;培养学生举一反三的能力,为他们在生物建模仿真领域的创新研究和生物医学应用实践打下基础。

本教材包括两个部分:第一部分包括第1~6章,介绍数学模型建模的基本理论和方法,计算机仿真的基本理论和方法,以及建模与仿真的校核、验证和确认(VVA)技术;第二部分包括第7~10章,分别介绍生物系统建模仿真的4类典型范例。

在第一部分中,第1章概述了系统、系统建模和计算机仿真的基本概念,以及生物系统建模仿真的应用动态概况;第2章介绍了连续系统数学模型的类型、模型之间的相互转换,以及模型的建模方法等;第3章介绍了从连续时间数学模型进行时间离散,转换为计算机仿真模型的主要方法:数值积分法、离散相似法和替代法;第4章介绍了基于实验数据的建模仿真的基本理论与方法,包括参数模型的概念及模型参数估计方法,以及系统辨识的基本概念和方法;第5章介绍了在MATLAB平台上Simulink模块式建模仿真的基本理论和方法,以及Simulink建模仿真的典型例子;第6章介绍了建模与仿真的校核、验证和确认(VVA)技术的基本概念。

在前6章论述了系统建模仿真基本理论和方法的基础上,从第7章到第10章,分别介绍了生物系统建模和仿真的4个典型实例。第7章是单一种群增长的

微分方程模型,包括 Malthusian 方程和 Logistic 方程;第 8 章介绍了房室模型的建立与仿真,以及房室模型的辨识和可辨识性;第 9 章介绍描述动作电位产生的 Hodgkin-Huxley 方程的建模与仿真;第 10 章介绍了脑电的自回归(AR)模型的建模与仿真。

本教材为教育部高等学校生物医学工程教学指导委员会“十一五”规划教材,也可作为相关专业本科生和研究生的参考教材,并可供从事生物建模仿真的科技工作人员参考。

本教材的编写是在“生物建模仿真”多年教学用讲义的基础上,参考了国内外出版的相关著作和文献完成的。限于编者的水平,本书中不妥以及错误之处,恳请读者给予批评指正。

本教材的第 1 章、第 3 章、第 6 章、第 8 章、第 9 章由田心撰写,第 2 章、第 7 章由刘婷撰写,第 4 章、第 10 章由郑旭媛撰写,第 5 章由肖振国撰写。全书由田心统稿。

编 者

2010 年 1 月于天津

第 1 章 系统建模仿真的基本概念	1
1.1 系统模型	1
1.1.1 系统和系统模型	1
1.1.2 模型的分类	2
1.2 系统的计算机仿真	2
1.2.1 系统计算机仿真的基本概念	2
1.2.2 系统仿真过程	3
1.2.3 系统仿真的分类	4
1.3 生物系统的建模与仿真	4
第 2 章 系统的数学模型和建模方法	6
2.1 数学模型的分类	6
2.2 连续状态系统模型	7
2.2.1 连续时间模型	7
2.2.2 离散时间模型	9
2.3 连续时间模型之间的转换	10
2.3.1 从微分方程转换为状态方程	10
2.3.2 从传递函数转换为状态方程	13
2.4 系统的实现	16
第 3 章 连续系统的数字仿真	19
3.1 微分方程的数值积分数值解	19
3.1.1 数值积分法的基本概念	19
3.1.2 数值积分法分类	20
3.1.3 单步数值积分法	20
3.1.4 多步数值积分法	25
3.1.5 关于数值积分的误差	26
3.2 从传递函数到 z 函数的转换	28
3.2.1 z 域的离散相似模型	29
3.2.2 从传递函数 $G(s)$ 转换为 z 函数 $G(z)$ 的算子替换方法	33
3.3 从连续时间状态方程到离散时间状态方程的转换	33

3.3.1	时域的离散相似模型	33
3.3.2	关于转移矩阵 $\phi(T) = e^{AT}$ 和 $\phi_m(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau$ 的近似计算	35
3.4	几个典型环节的离散相似	37
第4章	基于实验数据的建模与仿真	40
4.1	实验数据建模仿真的基本概念	40
4.1.1	从实验数据建立数学模型的过程	40
4.1.2	实验数据的获取	41
4.1.3	模型类型与模型参数	41
4.1.4	模型参数的估计	41
4.1.5	最小二乘法	42
4.2	系统辨识概述	43
4.2.1	系统辨识的基本概念	43
4.2.2	生物系统的可辨识性	45
4.3	回归数学模型	45
4.3.1	一元线性回归数学模型	45
4.3.2	多元线性回归数学模型	48
4.3.3	多元线性回归方程的检验与评价	51
4.3.4	非线性回归数学模型	54
第5章	Simulink 建模与动态仿真	58
5.1	Simulink 简介	58
5.2	Simulink 的基本模块	59
5.2.1	常用模块	60
5.2.2	自定义模块	61
5.3	基于 Simulink 的建模与仿真	63
5.3.1	基于 Simulink 的建模	63
5.3.2	基于 Simulink 的仿真	65
5.4	Simulink 建模仿真应用举例	68
第6章	建模与仿真的校核、验证与确认	71
6.1	VVA 技术	71
6.1.1	VVA 技术的基本概念	71
6.1.2	VVA 工作模式和过程	72
6.2	模型与仿真的校核	74
6.2.1	系统仿真误差源校核	74
6.2.2	程序校核	74
6.3	模型的验证	76

6.3.1	谱分析法	77
6.3.2	置信区间法	78
6.3.3	动态关联分析法	81
6.4	仿真模型的确认	81
第7章	单一生物种群增长模型	83
7.1	Malthusian 方程	83
7.2	Logistic 方程	85
7.2.1	Logistic 方程及其解析解	85
7.2.2	Logistic 曲线	86
7.2.3	Logistic 方程的参数估计	87
7.2.4	Logistic 方程参数的变化	88
第8章	房室系统的建模与仿真	90
8.1	房室系统的基本概念	91
8.1.1	房室的定义	91
8.1.2	房室间物质转运的速率系数	92
8.1.3	房室系统的分类	92
8.2	房室系统的建模	93
8.2.1	房室模型的建模思路	93
8.2.2	房室模型的建模过程	94
8.3	房室模型的仿真	95
8.3.1	一房室模型	95
8.3.2	二房室模型	98
8.3.3	多房室模型	101
第9章	Hodgkin-Huxley 模型	104
9.1	动作电位产生和传导的神经生物学机制	104
9.2	Hodgkin-Huxley 模型的建立	107
9.2.1	Hodgkin-Huxley 模型的等效电路图	107
9.2.2	动作电位传递的数学模型	108
9.2.3	Hodgkin-Huxley 模型的数学表达式	109
9.3	Hodgkin-Huxley 方程中的离子通道电导	110
9.4	Hodgkin-Huxley 方程的仿真	111
第10章	脑电的自回归(AR)模型	116
10.1	随机序列的参数模型	116

10.1.1	随机序列参数模型的基本概念	116
10.1.2	几类重要的随机序列参数模型	117
10.2	AR 模型的数学表达式	117
10.3	AR 模型的最小均方参数估计	118
10.4	AR 模型阶次的选择	120
10.5	脑电的 AR 模型	120

1.1 系统模型

1.1.1 系统和系统模型

系统是指一类实体的集合,包括实体、属性和活动三个要素。实体是组成一个系统的各个部分,它们之间既具有相对的独立性,又互相联系成为一个整体;属性指对系统中实体特性的描述,用特征参数和特征变量表示;活动是系统中实体行为的进程。

系统是人们根据研究目的从周围环境中划分出来的,即系统边界的划分是相对的。例如,在研究心血管循环力学性质时,心脏和动脉、静脉分别作为实体共同组成心血管系统;但是在研究心脏力学时,心脏的各个部件是组成心脏系统的各个实体,而动脉、静脉则是心脏系统的外界环境。

系统是从实际研究对象中抽象、简化出来的,对于同一个对象,人们根据关心的问题选择与研究目的有关的特性组成系统的属性,忽略其他属性。因此同一个对象可以被抽象为不同的系统。

研究系统的目的是为了了解系统各个组成部分之间的关系,以及系统与外界环境的关系。研究系统有两个可能的途径:其一是对真实系统进行实验,但是这种方法有时是不可能实现的;因此,第二个途径是建立系统的模型,通过模型的仿真实验结果来研究实际的系统,如图 1.1 所示。

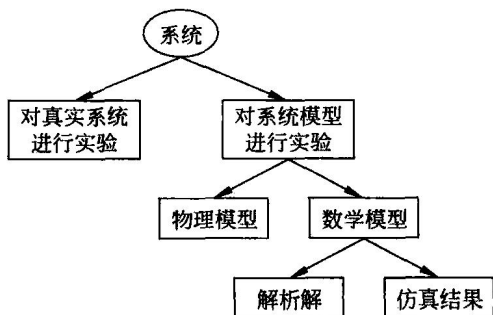


图 1.1 研究系统的途径(摘自“Law & Kelton”,2000)

系统模型是对系统中各个部分的内在联系以及系统与外界关系的描述。建立系统模型的基础是相似性原理。实际上常常可以用一类模型来模仿若干个不同的系统,因为虽然几个不同系统的实体有差异,但通过组合之后,都可表现出几乎同样的行为。例如,细菌的繁殖,人口增长,科学书籍种类的增加,银行中本息总额的增加,都具有同样的行为,即它们都符合指数增长的规律,所以可以用同一类模型来模拟具有同样行为的不同系统。

按系统的状态分类,系统可分为连续系统和离散事件系统。连续系统是指系统的状态随时间连续变化的系统。虽然有些连续系统如数据采集系统的状态数据是在离散时间点上获得的,是非连续的,但系统状态本身则是连续变化的。连续系统的模型常常可以用一组微分方程描述。

离散事件系统的特点是系统的状态变化只在离散的时间点上发生,且发生时刻往往是随机的,系统的状态变化是由随机事件驱动的。

生物系统基本以连续状态存在,故在本教材中只讨论连续系统的建模仿真。

1.1.2 模型的分类

模型分类的方法很多,根据模型的表示方式可以分成物理模型和数学模型。

(1) 物理模型

物理模型建立在物理属性相似基础上,是与实际系统在尺寸、结构和属性上的相似体。例如,房屋模型、心脏瓣膜血液流动模型等。物理模型广泛应用于土木水利工程,船舶、飞机、火箭制造,生物模拟等方面。对于复杂的系统,建立物理模型费用高,修改参数或改变结构困难。本教材不涉及物理模型的建模仿真。

(2) 数学模型

数学模型是应用数学形式来描述实际系统的模型。

描述一个真实系统的内在联系及与外界环境的关系,一般是很复杂的,系统模型只能近似地描述真实系统。将系统的内在联系和它与外界的关系抽象为数学模型,是目前使用最广泛的模型。连续系统的数学模型是本教材讨论的主要内容。

在连续系统的数学模型中,根据不同的研究关注点,可以进一步分类,例如连续时间和离散时间模型,线性和非线性模型,静态和动态模型,等等。

1.2 系统的计算机仿真

1.2.1 系统计算机仿真的基本概念

系统的计算机仿真是在计算机上对系统模型进行仿真。

系统仿真的基础是相似性原理,即在建立与真实系统相似模型的基础上,进行模型的计算机仿真实验,得到仿真结果。模型与真实系统相似性愈大,仿真结果的可靠性愈高。随着计算机技术的发展,计算机求解复杂系统数学模型的功能也越来越强,应用计算机对系统进行仿真成为主要的仿真技术。在本教材中只介绍计算机仿真技术。

计算机仿真包括三个要素,即系统、模型和计算机。联系这三个要素的有三个基本活

动:系统模型的建立、仿真模型的建立和计算机仿真实验,如图 1.2 所示。

这里,我们强调系统模型和仿真模型是两个不同概念的模型。系统模型是对实际系统进行抽象和简化后的近似模型;仿真模型是将系统模型进行时间离散处理,转化为可以用计算机处理的模型。计算机仿真就是将系统的仿真模型在计算机上运行的过程。

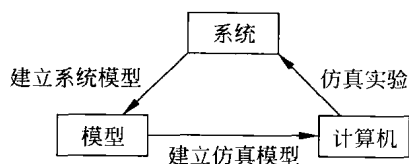


图 1.2 计算机仿真三要素

1.2.2 系统仿真过程

系统仿真包括定义系统,建立系统数学模型,数据准备,转换数学模型为仿真模型,在计算机上运行模型进行仿真,通过仿真对模型进行检验和修正的过程,图 1.3 是系统仿真过程的基本流程。

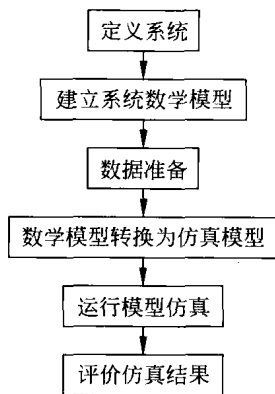


图 1.3 系统的仿真过程

(1) 定义系统

定义一个系统时首先要提出明确的研究目标;然后划分所研究系统的边界,即确定要研究的系统包括哪些实体,系统内各个实体的联系和系统的约束条件;还要确定是否达到目标的衡量标准。

(2) 系统数学模型的建立

在一定的约束条件下建立系统的数学模型,要把真实系统抽象、简化,确定模型中的变量和参数以及它们之间的关系。模型必须和研究目的紧密联系,和真实系统尽量相似,尽可能简单和容易控制和操作,并应便于修正和改进。

(3) 数据准备

数据是建模的基础,数据准备包括数据的获取,以及确定这些数据在建模中如何使用。所收集的数据常常是系统的输入、输出数据,描述系统各部分属性的数据,以及系统各个部分之间关系、系统和外界环境之间关系的数据。按照收集到的数据确定模型中随机变量的概率分布或概率密度函数以及模型的其他参数。

(4) 数学模型转换为仿真模型

将连续时间数学模型转换为可以在计算机上运行的离散时间仿真模型。例如应用数值积分法将微分方程模型转换为差分方程。仿真时应用程序设计语言编写计算机程序时,需要在计算机高级语言和专用仿真语言之间做出选择。专用仿真语言的优点是运行程序的操作方便,具有面向进程的仿真程序结构,仿真功能强;但是编制专用仿真语言程序专业性强、难度大。应用计算机高级语言编制仿真程序易于被非计算机专业人员掌握,因此在本教材中介绍的是后者应用 MATLAB 语言编制的程序进行计算机仿真。

(5) 模型仿真的运行

通过运行模型,可以了解和预测被研究系统运行的仿真结果,特别是预测在系统输入或决策规则变化时输出响应的变动。通过模型的反复试验运行,得到充足的仿真数据。

(6) 仿真结果的评价

由于仿真结果中包括了建立数学模型时由于抽象、简化实际系统造成的误差甚至偏差,

也包括了从数学模型转换为仿真模型时的各种类型的误差或偏差,因此必须对仿真结果进行评价,评价从仿真中获得的系统信息是否正确和充分。如果仿真结果不合格,就要修改数学模型或仿真模型,达到仿真结果的可靠性要求。

1.2.3 系统仿真的分类

(1) 根据模型类型分类,系统仿真分为物理仿真、数学仿真和物理-数学仿真。

构造系统的物理模型,应用物理模型进行仿真实验,称为物理仿真;构造系统的数学模型,在计算机上进行仿真实验,称为数学仿真;对系统模型的一部分建立数学模型,而对另一部分则构造物理模型,将它们连接成数学-物理模型进行仿真实验,称为物理-数学仿真。

物理仿真的优点是直观形象,但建模费用高。例如建立人工心脏瓣膜检测和脉搏波实验台,可以模拟有关循环系统的动态过程,可以应用这个模型仿真人工心脏瓣膜的参量,给人工心脏瓣膜的设计提供仿真实验支持。

在计算机上进行数学仿真在以下方面优于物理仿真:

- ① 计算机仿真具有费用低、易于实现物理仿真难以实现的各种试验等。
- ② 有些系统的模型难以用一般的数学模型表达;有的虽然能用数学模型表达,但不能解析求解,或者解析求解过于复杂。计算机仿真则可以应用于用各种形式的模型来实现仿真。

目前有许多用于非线性系统仿真的计算工具,例如本教材第5章将介绍的最新发展的计算机仿真技术:MATLAB中的Simulink工具箱,它可以仿真线性和非线性系统、连续和离散的动态系统。Simulink仿真是基于系统的结构图发展的计算机仿真技术,适于仿真非线性微分方程模型的近似解。

例如在本教材第9章中描述动作电位产生的H-H方程,就可以在Simulink平台上进行计算机仿真。例如在H-H方程中,为了研究可兴奋细胞膜电位,模型中有4个微分方程和6个代数方程需要求解。由于方程系统是非线性的,求解析解是不可能的,只能通过计算机来仿真H-H非线性系统的近似解,通过Simulink仿真是简单可行的。

③ 在真实系统中要实现完全相同条件下的重复试验是很困难的,而在计算机仿真试验中则很容易实现。

(2) 根据仿真研究的系统对象分类,分为连续系统仿真和离散事件系统仿真。

在本教材中只介绍连续系统仿真。

计算机仿真就是应用计算机对数学模型转换后的仿真模型进行仿真实验,主要解决下述两个问题:

- (1) 建立计算机能处理的仿真模型;
- (2) 提供在计算机上运行计算和进行仿真的方法。

1.3 生物系统的建模与仿真

计算机仿真技术已经广泛地应用于生命系统、工程系统、社会经济系统、社会教育系统、社会政治系统、社会人口系统、社会资源系统、军事科学系统、军事训练系统、人类思维系统,

以及部门管理等系统中。

生命系统是最复杂的动态系统,迄今为止,人们对生命系统仍知之甚少。由于生命系统的高度复杂性,所以生命系统始终是建模仿真研究的热点和难点。通过建立数学模型并进行计算机仿真来研究生命系统,已经成为人们常用的技术。生物建模仿真的成功范例之一,是20世纪50年代初期 Hodgkin 和 Huxley 建立的可兴奋细胞动作电位产生的膜电位模型 H-H 方程,由于他们在神经电生理领域的建模仿真工作的卓越贡献,Hodgkin 和 Huxley 在1963年获得诺贝尔奖。

生命系统建模与仿真也包括定义系统,建立系统数学模型,数据准备,转换数学模型为仿真模型,计算机仿真,通过仿真结果对模型进行检验和修正的过程。

研究生物系统需要信息源,然而生物系统的许多信息是隐含在观测信号中的,由于受到现有观测手段的限制,有些信息尚无法从观测信号中提取出来。因此应用建模和仿真的方法为提取生物系统内的信息提供了有效的途径。例如,可通过 H-H 模型的建模与仿真预测不同条件下可兴奋细胞的膜电位,获取大量信息。

由于生物体内部的生理活动都是相互关联的动态过程,我们可以按照研究目标,从系统的角度将生物体的某一个部分划分成一个动态系统来研究。在研究生物体中某一个动态系统的基础上,在已知的系统生理机制知识的基础上,联系同一个生物体中的其他各个部分,建立生物体的整体动态系统模型。

在本教材中,仅介绍了几类典型的生物系统数学模型仿真的范例,虽然很不全面,但我们希望通过这些范例,启发大家学习建模与仿真在生命系统中应用的基本思路、方法和应用中的典型处理技术。其他众多的生命系统建模仿真实例,本教材不再介绍,请大家参阅有关资料。

第2章

系统的数学模型和建模方法

系统模型是对系统中各个部分的内在联系及系统与外界的关系的描述。应用数学表达式进行描述,就是系统的数学模型。

本教材涉及的数学模型,是通常用于描述生物系统的连续状态模型,包括:连续时间模型和离散时间模型。本章介绍数学模型的分类以及常用的数学模型之间的转换,重点阐述由外部连续时间模型向内部模型的转换。

2.1 数学模型的分类

数学模型是计算机仿真的基础,掌握系统数学模型的种类和形式十分重要。根据系统的时间集合和状态变量类型可以将数学模型分为以下两大类(图 2.1)。

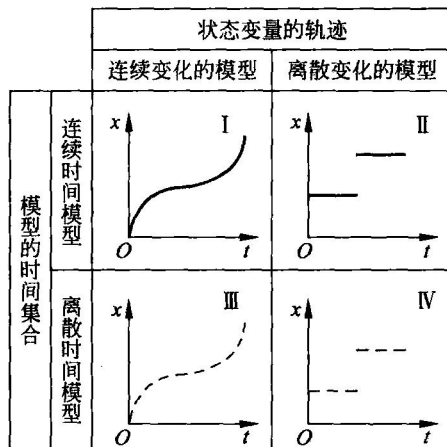


图 2.1 数学模型分类

(1) 根据模型的时间集合分类: 连续时间模型和离散时间模型

根据模型的时间集合类型可以分为连续时间模型和离散时间模型: 连续时间模型中的时间用实数来表示,即可以获得在任意时刻点的系统状态; 离散时间模型中的时间用离散时间点来表示,即只能获得在离散时刻点上的系统状态。

(2) 根据模型中的状态变量分类: 连续状态模型和离散事件模型

根据模型中状态变量的类型可以分为连续状态模型和离散事件模型: 在连续状态模型中,系统的状态变量是随时间连续变化的; 而离散状态模型中的系统

状态变量的变化是不连续的,即它只在特定的时刻变化,而在两个特定时刻之间系统状态变量保持不变。

在图 2.1 中,第Ⅰ类模型系统状态随时间连续变化,且在时间上也是连续的,在任意时间都可获得系统的状态变量值,此类系统对应的一般是连续时间数学模型,例如常微分方程模型和偏微分方程模型;第Ⅱ类模型系统的状态随时间连续变化,但是只在离散时间点上可以获取系统状态变量值,称为连续状态的离散时间采样系统,所对应的一般是离散时间数学模型,例如离散时间的差分方程模型;第Ⅲ类模型系统的状态在离散时间点上变化,但是系统的状态变量在时间上是连续表示的,对应的是离散事件(连续时间)模型;第Ⅳ类模型在系统状态变化和时间集合上都是离散的,对应的是离散事件(离散时间)模型。

在本教材中不涉及离散事件模型,只讨论连续状态的连续时间模型和离散时间模型。

2.2 连续状态系统模型

常用的连续系统模型分两类:连续时间模型和离散时间模型,以下将分别阐述;另外还有一类连续-离散混合模型,本教材不再介绍。

2.2.1 连续时间模型

若系统的输入 $u(t)$ 、输出 $y(t)$,以及系统内部的状态变量 $x(t)$ 都是时间的连续函数,则可以用连续状态、连续时间模型(以下简称连续时间模型)来描述。系统的连续时间模型通常分为四类:微分方程、传递函数、状态空间表达式和连续时间系统结构框图。本节将分别介绍这四类连续时间模型。

1. 微分方程

以一个自变量的线性定常系统为例,系统模型可以用常微分方程表示

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (m \leq n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中, $u(t)$ 为系统输入变量, $y(t)$ 为系统输出变量, n 为系统的阶次, a_i, b_i 为实常数。

2. 传递函数

若以上线性定常系统 $y(t), u(t)$ 及其各阶导数的初始值均为零,对式(2.1)两边取拉氏变换,可得

$$\begin{aligned} & a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ &= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \quad (m \leq n) \end{aligned}$$

则系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2.2)$$