

超级数学教师
带你发现数学之美

王金战教你玩转数学

数学是怎样学好的

魅力与方法篇

王金战 著
许永忠 李锦旭



原来数学可以用来

玩!

让对数学头疼的孩子也能

考出满分



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

王金战教你玩转数学

数学是怎样学好的

魅力与方法篇

王金战 著
许永忠 李锦旭



北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学是怎样学好的:王金战教你玩转数学/王金战,许永忠,李锦旭
著. —北京:北京大学出版社, 2010. 5

ISBN 978-7-301-17103-5

I. 数… II. ①王… ②许… ③李… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 062169 号

书 名: 数学是怎样学好的——王金战教你玩转数学

著作责任者: 王金战 许永忠 李锦旭 著

责任编辑: 于海岩

标准书号: ISBN 978-7-301-17103-5/G · 2841

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672

编辑部 82893506 出版部 62754962

电子邮箱: tbcbooks@vip.163.com

印 刷 者: 北京嘉业印刷厂

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 12.5 印张 167 千字

2010 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 26.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024; 电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

在未来的十年中,领导世界的国家将是在科学的知识、解释和运用方面起领导作用的国家.整个科学的基础又是一个不断增长的数学知识总体.我们越来越多地用数学模型指导我们探索未知的工作.

——瑞典数学家 费尔(H. F. Fehr)

兴趣是最好的老师,而美的东西人们才会对其有兴趣! 学生不喜欢数学,不是因为数学不美,而是由于种种原因,使得数学之美没有得到充分的展示.本书从挖掘数学之美开始,以唤醒学生对数学之美的认识,并将数学之美贯穿始终.

给你打开一个窗口,让你领略数学的博大精深和广阔用场;

给你一双数学家的慧眼,丰富你观察世界的方式;

给你一颗好奇的心,点燃你胸中的求知欲望;

给你一个睿智的头脑,帮助你进行理性思维;

给你一套研究模式,使它成为你探索世界奥秘的望远镜和显微镜;

给你提供新的机会,让你在交叉学科中寻求乐土,用你的勤奋和智慧去发明、创造.

自序

工作 30 年来,我一直在教数学,教初中、教高中、教竞赛,越教越觉得数学好玩、好学,越教越觉得数学很美、很酷,以至于我常常被数学的波澜壮阔之势、高瞻远瞩之能、对称和谐之美、茅塞顿开之境所陶醉。

每接一届学生,前半个月我一般不讲课本上的内容,而是以“大话数学”为题来挖掘数学的内涵,提炼数学的规律,揭示数学的特点,深化数学的应用,张扬数学的魅力,直把学生讲得兴趣盎然、神情激昂,不再对数学感到为难和恐惧,有的只是学好数学的信心和激情。所以我虽然不用布置太多的作业,他们却能轻松学好数学。

反观现在的中小学生,很多人讨厌数学到了想放弃的地步,害怕数学到了恐惧的程度,我想这绝不是数学本身的原因。兴趣是最好的老师,一旦学生对数学的兴趣得到激发,那么学好数学就成为比较容易的事了。

中小学阶段是一个人智力开发的关键时期。这其实是把双刃剑,一方面如果一个孩子在中小学阶段学到他感兴趣的东西,那么他的智力将会得到巨大的开发,他焕发出的能量甚至会超出成年人的想象。另一方面,如果一个孩子中小学阶段被迫学习他不感兴趣的东西,那么他的智力将会得到很严重的扼杀。所以千万不要逼着孩子去学他不感兴趣的东西!也就是说,如果你认为孩子必须学这些知识,那就首先培养孩子对这些知识的兴趣。

数学是思维的体操,诚如科学家克莱因所说:“唱歌能使你焕发激情,

美术能使你赏心悦目,诗歌能使你拨动心弦,哲学能使你增长智慧,科学能使你改善物质生活,但数学能给你以上的这一切!”看来这么好的东西对一个中小学生来说是必须要学好的了,但好多学生厌恶数学,强逼着他们学又会扼杀他们的智力。

看来我必须要挺身而出了。近几年来我一直有个愿望,就是从数学全局入手,用深入浅出的语言把数学讲得浅显易懂,用诗情画意的语言把数学讲得美轮美奂,用风趣幽默的语言把数学讲得生动有趣。当我把这一想法向我的好朋友许永忠、李锦旭汇报时,竟然得到了他们的强烈响应,要知道这两个人可是数学界的实战派专家,水平远在我之上,而且和我教风相近。于是我们开始动笔了。没想到越写越有灵感,本来计划写一本,由于篇幅太长,只能分成二册,一册主要讲数学的魅力和方法,另一册主要讲各知识点的突破技巧和化解策略。自信地讲,相信这套书应该是国内首创也是最适合中小学生阅读的。如果您认为此书果然对您的学习有帮助,那么请耐心等待,因为不久之后又会有《物理是怎样学好的》、《化学是怎样学好的》、《英语是怎样学好的》等学习方法图书与您见面。当然我是教数学的,写不好其他科目的书,但我会在全国范围内挑选并邀请水平比我更高的、语言比我更幽默的各科专家与我共同完成。

我似乎看到在不久的将来,将会有一批学生在这套丛书的引导下兴趣大增、走出困境、走向成功……

如果您还有什么疑问或想咨询的,欢迎拨打我的热线电话 400-678-3963,或者到金战网(www.wangjinzhan.com)留言,还可以到我的博客(blog.sina.com/wangjinzhan)里留言。如果还是联系不上,那就干脆在寒暑假期间到北京来找我吧!

王金战

目录

CONTENTS

自序 / V

第一篇

魅力篇

第一章 小小方寸间,蕴涵大乾坤

——从3阶古幻方领略数学的内在美 / 5

古老而神奇的幻方 / 5

对幻方的进一步思考 / 7

幻方的其他趣闻 / 9

从幻方的研究得到的启示 / 10

第二章 跌宕起伏 峰回路转

——尝试探索,经历数学思维美 / 13

一题多解,培养思维的发散性 / 14

一题多变,培养思维的灵活性 / 19

一题多用,培养思维的深刻性 / 20

升华——创造性思维的形成 / 22

第三章 物各有性 事有攸归

——感受数学的应用美 / 26

数学的应用美就在你身边 / 27

数学巧合之美 / 29

从哥德巴赫猜想的证明看数学的应用价值 / 32

数学与游戏 / 34

数学与现代战争 / 37

一个典型的距离问题 / 38

第四章 数学的特色魅力

——数学问题独特的思维训练价值 / 41

第二篇

方法篇

第五章 自主学习能力的培养 / 55

预习与总结 / 55

数学阅读能力的培养 / 60

现代化学习手段的使用 / 72

第六章 记忆的诀窍 / 81

推导过程记忆法 / 83

整体记忆法 / 86

图像记忆法 / 88

规律记忆法 / 91

口诀记忆法 / 93

类比(对比)记忆法 / 96

特殊 $\Rightarrow$ 一般记忆法 / 99

圆周率趣话 / 100

第七章 怎样解题 / 102

解题策略 / 102

解题规律 / 113

解题技巧 / 130

客观题的求解策略——速解高考选择题三法 / 172

第一篇 魅力篇

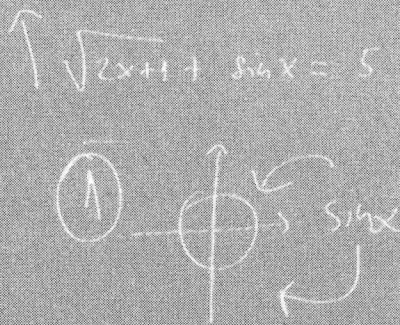
因为数学很美,所以我爱上了它……

创造力=知识量 $\times$ 发散思维能力

发现和创新比命题论证更重要,因为一旦抓到真理之后,补行证明往往只是时间问题。

如果知识渊博,想象力也丰富,则创造能力强,反之则弱。根据这种理论,在学习上就要让大脑左右并用,不可偏废,尤其应该开发右脑的功能,把重点放在形象思维的训练上。

——数学家 徐利治



先讲一个我亲身经历的故事：

那是2004年秋天，我和我的同学到山东省平邑县的一个度假村旅游。当时，某师范学院美术系的学生正好在这里写生。晚饭后，我见有六个大学生围在一个圆桌前闲聊，就过去跟她们搭话。她们问我是干什么的，我说我是某中学的老师。她们听说我是中学老师，感到有点亲切。聊了一会儿，她们又问我教什么课。我没有直接回答。凭我的经验，艺术类的学生一般都不喜欢数学，我也想验证一下我的想法，就说：“我教的这门课你们可能不大喜欢。”没想到她们六个人竟异口同声地脱口而出：“数学！”我狂晕！她们连想都没想，就准确地定格到数学上了。幸好我有心理准备，否则我真要当场晕过去了！

现实中，不喜欢数学的又何止是艺术类的学生！

不喜欢数学不是学生的错，而是我们的教育出现了问题。从社会到学校，从教师到家长，从考试制度到教学模式，无处不充斥着考试的压力，当一门课程成了考试升学的拐杖时，还会有多少人真正喜欢

呢？喜欢的学科不敢全力去学，不喜欢的学科却不敢有丝毫的懈怠，一切都不是自己说了算，其结果就是学生的兴趣大大丧失。

我们都知道，数学是我们每个人都应该掌握的一种技能，是人类智慧的结晶，是人类文明的重要标志。数学还是人们借以训练多种特殊技能，如计算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、推理论证能力的最主要工具。从数学的作用来说，这门学科作为一门必修的课程是必然的，各国都是如此。

也许有人会问：“你为什么喜爱数学？”我也说不清楚，只是觉得数学很有意思。代数里的运算、变形，到处透着智慧的光芒；几何里各种各样的图形真是美不胜收，严谨而富于思考的推理证明令人叹为观止；三角函数里变换无穷的公式，虽然有点令人望而生畏，可是其万变不离其宗的技巧、优美的函数曲线，又让我爱之深切……

一句话，因为数学很美，所以我爱上了它！

第一章

小小方寸间,蕴涵大乾坤

——从 3 阶古幻方领略数学的内在美

哪里有事,哪里就有美。

——希腊数学家 普罗克鲁斯 (Proclus)

微分几何之父、国际著名数学大师陈省身先生早在 20 世纪 80 年代初,就在国内多所著名大学的讲坛上响亮地提出:“我们的希望是在 21 世纪中国将成为数学大国!”从此,“21 世纪中国要成为数学大国”这个“陈省身猜想”便在数学界乃至社会上广为流传。在 2002 年北京世界数学家大会上,陈先生还即兴为参加少年数学论坛的中学生题词:“数学好玩。”



古老而神奇的幻方

数学的魅力是无穷的!我们先来看一个填数游戏:

如图 1-1 所示,将 1~9 这 9 个数字全部填写到图中的 9 个小方格

中,使得每一行、每一列和每条对角线上的 3 个数字之和都相等。

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

图 1-1

这是一个很好玩的问题,同学们在小学大多已经玩过,只要花点时间,相信这样的问题是难不倒同学们的。在金庸的小说《射雕英雄传》中,瑛姑还用这个问题考过黄蓉。

在数学史上,图 1-1 称为 3 阶幻方。有意思的是,它发源于我国古代文化,这要从关于

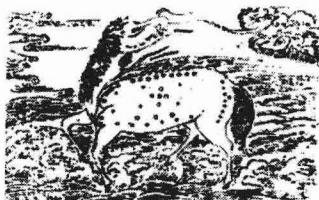
“图书”的神话说起!

《周易·系辞》上说:“河出图,洛出书,圣人则之。”意思是说,龙马背负着河图(见图 1-2),从黄河中腾跃而出,神龟从洛水中浮出,背(甲壳)上刻着洛书(见图 1-3),这是上苍的赐予,因此圣人效法它,运用河图、洛书的规律来指导生产、生活。此说最早记载于我国春秋时期(约公元前 5 世纪)的《尚书》和《论语》中,公元 80 年成书的《大戴礼记》中有详细说明,并给出排法口诀:“戴九履一,四二为肩,三七为腰,八六为足,五居中央。”

其实当你领悟到多种多样的数学之美,感受到数学给你的震撼,你就一定能学好数学,能够陶醉在美中,并轻松驾驭它。

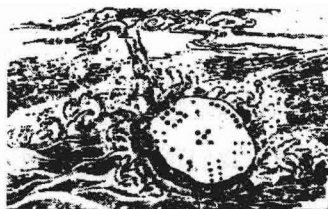
把河图、洛书的数字排列规律总结一下,即可形成前文那个很好玩的问题,答案可见图 1-4、图 1-5,并有上面的口诀帮助记忆。

值得一提的是,目前国际上研究外星文明的科学家认为,若地外文明存在,可以发信息波与之联系,这信息不能是语言,因为彼此语言不通,可发图像信息。他们建议选的是三幅图:河图、洛书及勾股图(见图 1-6)。这三幅图竟然全是我们的祖先圣哲们留下来的,这是值得我们炎黄子孙自豪的事情。



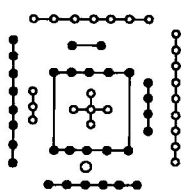
龙马图

图 1-2



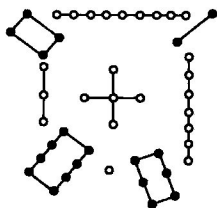
龟书图

图 1-3



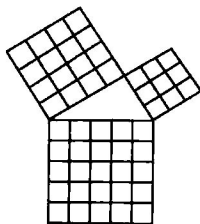
蔡氏河图

图 1-4



蔡氏洛书

图 1-5



勾股图

图 1-6

对幻方的进一步思考

你对这个问题进行过更深入的思考吗?我们填这个图时多用试探的方法,这样效率不高.下面我们用数学的方法对其进行一些简单的分析.

(1) 每行、每列和两条对角线上的和是多少?

设每行、每列和两条对角线上的和都是 S , 则有 $3S = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, 所以 $S = 15$.

(2) 中间的数是多少?

$$\text{由(1)知, } \begin{cases} x_1 + x_5 + x_9 = 15, \\ x_2 + x_5 + x_8 = 15, \\ x_3 + x_5 + x_7 = 15, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15, \end{cases}$$

四式相加得 $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 + 3x_5 = 60$,

注意 $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 45$, 故得 $3x_5 = 15$, 所以 $x_5 = 5$.

(3) 剩下的数怎么填?

剩下的数我们可以从左上角开始填. 由(2)知, 每行、每列和对角线上两端的两个数之和为 10, 因此如果左上角填 1, 则右下角必然填 9. 这样再填就方便多了. 经过探索, 可以找到如下 8 种填法(见图 1-7):

2	7	6	2	9	4	4	3	8	4	9	2
9	5	1	7	5	3	9	5	1	3	5	7
4	3	8	6	1	8	2	7	6	8	1	6

6	1	8	6	7	2	8	1	6	8	3	4
7	5	3	1	5	9	3	5	7	1	5	9
2	9	4	8	3	4	4	9	2	6	7	2

图 1-7

(4) 四个角上可以为奇数吗?

我们发现, 四个角上的数都是偶数, 是奇数可以吗? 回答是不可以. 比如若 $x_1 = 3$, 则 $x_9 = 7$, 此时若 x_3 为奇数, 由每行、每列和对角线上的数之和为 15, 可知 x_2, x_6 也必须是奇数, 从而所有的数都是奇数, 矛盾; 若 x_3 为偶数, 则 x_2, x_6 也必须是偶数, 从而 x_4, x_7, x_8 也都是偶数, 需要 6 个偶数, 也矛盾. 所以四个角上必然为偶数.

人们常说, 未来的文盲就是那些没有学会怎样学习的人; 还说, 文盲就是想要学习却不知道学习策略的人.

(5) 还有其他填法吗?

由(4)可知, 左上角只能填 2, 4, 6 或 8. 若左上角填 2, 则因为 $x_1 + x_3 \neq 10$, 故右上角只能填 4 或 6. 不难发现, 只要左上角和右上角的数确定了, 其他所有的数就随之确定了. 所以左上角填 2 时只有两种填法.

同理，左上角为 4, 6 或 8 时也各有两种填法。

综上所述，3 阶幻方只有 8 种不同的填法。其实，如果不算对称和旋转的情况，3 阶幻方只有一种填法！因此，中国古代算书上只给出一种答案是合理的。



幻方的其他趣闻

我国古代数学家、南宋的杨辉在其名著《详解九章算法》中给出了 3~10 阶幻方的排法结果，有兴趣的同学可以参阅《大哉言数》。

在国外，也有不少研究幻方的故事。美国的马丁教授毕生从事幻方研究，他排出了 880 种不同结构的 4 阶幻方。然而有一天，一个叫亚当斯的人给他寄来了六角幻方（如图 1-8 所示），马丁教授查遍所有资料也未发现有六角幻方的记载。

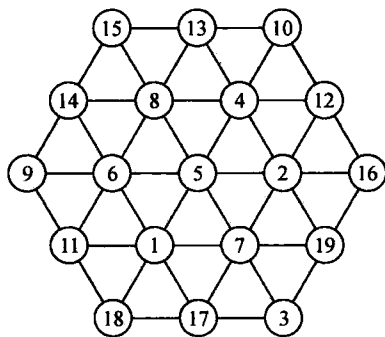


图 1-8

1969 年，大学生阿莱尔利用电子计算机探索六角幻方的种类，结果惊人：六角幻方只有一个（旋转得到的结果不算），就是亚当斯排出的那一个！于是它就成了数学宝库中的稀世珍宝。然而，这个小小的六角幻方的获得，竟然花去了亚当斯 52 年的时间！纵观人类历史，所有成果的获得都不仅是智慧结晶、兴趣所致，更需要坚忍不拔的毅力与狂热恒久的执著。