大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础（甲）

简明微积分

JIAN MING WEI JI FEN

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础(甲)

简明微积分

（经济类与管理类）

周誓达　编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

简明微积分（经济类与管理类）/周誓达编著
北京：中国人民大学出版社，2010
大学专科高等数学基础简明教材系列
ISBN 978-7-300-11822-2

Ⅰ. ①简…
Ⅱ. ①周…
Ⅲ. ①简明微积分-高等学校-教材
Ⅳ. ①0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 037289 号

大学专科高等数学基础简明教材系列
高等数学基础（甲）
简明微积分
（经济类与管理类）
周誓达　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2010 年 6 月第 1 版
印　　张	18	**印　　次**	2010 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	327 000	**定　　价**	24.00 元

前　言

大学专科高等数学基础简明教材系列是为大学专科经济类与管理类各专业编写的教材，包括《简明微积分》、《简明线性代数》及《简明概率论与数理统计》。这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂。

《简明微积分》共分五章，介绍了经济工作所需要的一元微积分，书首列有预备知识初等数学小结。本书着重讲解基本概念、基本理论及基本方法，培养熟练运算能力与解决实际问题的能力。

经济类与管理类专业毕竟不是数学专业。本着“打好基础，够用为度”的原则，本书去掉了对于经济工作并不急需的某些内容与某些定理的严格证明，而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容，讲得流畅，讲得透彻，实现“在战术上以多胜少”的策略。本书不求深，不求全，只求实用，重视在经济上的应用，注意与专业课接轨，体现“有所为，必须有所不为”。

基础课毕竟不是专业课。本着“服务专业，兼顾数学体系”的原则，本书不盲目攀比难度，做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通，达到“跳一跳就能够着苹果”的效果。本书在内容编排上做到前后呼应，前面的内容在后面都有归宿，后面的内容在前面都有伏笔，形象直观地说明问题，适当注意知识面的

拓宽，使得“讲起来好讲，学起来好学”。

质量是教材的生命，质量是特色的反映，质量不过硬，教材就站不住脚。本书在质量上坚持高标准，不但内容正确无误，而且编排科学合理，尤其在复合函数导数运算法则的讲解上、在不定积分第一换元积分法则与分部积分法则的论述上都有许多独到之处，便于理解与掌握。衡量教材质量的一项重要标准是减少以至消灭差错，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现零差错。

例题、习题是教材的窗口，集中展示了教学意图。本书对例题、习题给予高度重视，例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，其中除计算题、证明题及经济应用题外，尚有考查基本概念与基本运算技能的填空题与单项选择题。填空题要求将正确答案直接填在空白处；单项选择题是指在四项备选答案中，只有一项备选答案是正确的，要求将正确备选答案前面的字母填在括号内。书末附有全部习题答案，便于检查学习效果。

相信读者学习本书后会大有收获，并对学习微积分产生兴趣，增强学习信心，提高科学素质。记得尊敬的老舍先生关于文学创作曾经说过：写什么固然重要，怎样写尤其重要。我想这句至理名言对于编著教材同样具有指导意义。诚挚欢迎各位教师与广大读者提出宝贵意见，作者将不断改进与完善本书，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务。

本书配有教学课件，并配有包括各章学习要点与全部习题详细解答的简明微积分学习指导。本书教学课件通过中国人民大学出版社网站供各位教师与学员免费下载使用，进行交流，请登录 http://www.crup.com.cn/jiaoyu/获取。

周誓达

2010 年 3 月 20 日于北京

目　录

引　论

微积分思路

经济类与管理类高等数学是研究经济领域内数量关系与优化规律的科学，微积分是高等数学的基础.

微积分研究的对象是函数，主要是初等函数，研究的主要工具是极限.

微积分中最重要的基本概念是导数、微分、不定积分及定积分，最重要的基本运算是求导数与求不定积分.

应用微积分解决经济方面函数的数量关系与优化问题，是微积分的重要内容.

微积分的精髓在于：在变化中考察各量之间的关系. 可以说，没有变化就没有微积分. 因此，必须以变化的观点学习微积分.

预备知识

初等数学小结

微积分是以初等数学作为基础的，学习微积分必须熟练掌握下列初等数学知识.

1. 数集与区间

全体实数与数轴上的全体点一一对应，因此不严格区别数与点：实数 x 代表数轴上点 x，数轴上点 x 也代表实数 x.

在数集之间的关系中，最重要的有三种：

(1) 包含关系

若数集 B 的每一个元素都是数集 A 的元素，则称数集 A 包含 B，记作 $A \supset B$ 或 $B \subset A$.

(2) 相等关系

若数集 A 的元素与数集 B 的元素完全相同，则称数集 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

(3) 分离关系

若数集 A 与 B 没有公共元素，则称数集 A 与 B 分离.

数集之间的运算主要有三种：

(1) 并集

数集 A 与 B 的所有元素构成的数集称为数集 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$.

(2) 交集

数集A与B的所有公共元素构成的数集称为数集A与B的交集，记作$A\cap B$.

(3) 补集

在规定全集$\Omega\supset A$的条件下，全集Ω中不属于数集A的所有元素构成的数集称为数集A的补集，记作$\overline{A}$.

在表示数值范围时，经常采用区间记号. 已知数a与b，且$a<b$，则

开区间

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

闭区间

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

半开区间

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

上述三类区间是有限区间，点a称为左端点，点b称为右端点. 此外还有无限区间：

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\text{ 为实数}\}$$

2. 幂

数学表达式a^b称为幂，其中a称为底，b称为指数. 当指数取值为有理数时，相应幂的表达式表示为

$$a^n=\underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n\text{个}}\quad(n\text{ 为正整数})$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(a\neq 0,n\text{ 为正整数})$$

$$a^0=1\quad(a\neq 0)$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m\quad(a\geqslant 0,m,n\text{ 为互质正整数，且 }n>1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}\quad(a>0,m,n\text{ 为互质正整数，且 }n>1)$$

在等号两端皆有意义的条件下，幂恒等关系式为

(1)$a^{b_1}a^{b_2}=a^{b_1+b_2}$

(2)$\dfrac{a^{b_1}}{a^{b_2}}=a^{b_1-b_2}$

(3) $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$

(4) $(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b$

(5) $\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^b = \dfrac{a_1^b}{a_2^b}$

3. 函数的概念

定义 0.1 已知变量x与y,当变量x任取一个属于某个非空实数集合D的数值时,若变量y符合对应规则f的取值恒为唯一确定的实数值与之对应,则称对应规则f表示变量y为x的函数,记作

$$y = f(x)$$

其中变量x称为自变量,自变量x的取值范围D称为函数定义域;函数y也称为因变量,函数y的取值范围称为函数值域,记作G;对应规则f也称为对应关系或函数关系.

若函数$f(x)$的定义域为D,又区间$I \subset D$,则称函数$f(x)$在定义域D或区间I上有定义.

考虑对应规则$y^2 = x$,无论变量x取任何正实数,变量y恒有两个实数值与之对应,因此对应规则$y^2 = x$不表示变量y为x的函数,但是可以限制变量y的取值范围为$y \leqslant 0$或$y \geqslant 0$,而使得它分别代表函数$y = -\sqrt{x}$与$y = \sqrt{x}$.

函数关系的表示方法有公式法、列表法及图形法,在应用公式法表示函数关系时,函数表达式主要有显函数$y = f(x)$与隐函数即由方程式$F(x,y) = 0$确定变量y为x的函数.

定义 0.2 已知函数$y = f(x)$,从表达式$y = f(x)$出发,经过代数恒等变形,将变量x表示为y的表达式,若这个对应规则表示变量x为y的函数,则称它为函数$y = f(x)$的反函数,记作

$$x = f^{-1}(y)$$

如果函数$y = f(x)$存在反函数$x = f^{-1}(y)$,则函数$x = f^{-1}(y)$也存在反函数$y = f(x)$,因此函数$y = f(x)$与$x = f^{-1}(y)$互为反函数.

定义 0.3 已知函数$y = f(u)$的定义域为U_1,函数$u = u(x)$的值域为U_2,若交集$U_1 \cap U_2$非空集,则称变量y为x的复合函数,记作

$$y = f(u(x))$$

其中变量x称为自变量,变量u称为中间变量,复合函数y也称为因变量.

只有一个自变量的函数称为一元函数,有两个自变量的函数称为二元函数.

4. 函数定义域与函数值

对于并未说明实际背景的函数表达式,若没有指明自变量的取值范围,则求函

数定义域的基本情况主要有三种：

(1) 对于分式$\dfrac{1}{P(x)}$，要求 $P(x)\neq 0$；

(2) 对于偶次根式$\sqrt[2n]{Q(x)}$（n 为正整数），要求 $Q(x)\geqslant 0$；

(3) 对于对数式 $\log_a R(x)$（$a>0, a\neq 1$），要求 $R(x)>0$.

在本书范围内，求函数定义域的方法是：观察所给函数表达式是否含上述三种基本情况. 如果函数表达式含上述三种基本情况中的一种或多种，则解相应的不等式或不等式组，得到函数定义域；如果函数表达式不含上述三种基本情况中的任何一种，则说明对自变量取值没有任何限制，所以函数定义域为全体实数，即 $D=(-\infty,+\infty)$.

定义域与对应规则是构成函数的两个基本要素，若两个函数的定义域相同且对应规则也相同，则这两个函数是同一个函数；若两个函数的定义域不相同或对应规则不相同，则这两个函数不是同一个函数.

已知函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取一个属于定义域 D 的具体数值 x_0 时，它对应的函数 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $y\Big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，意味着在函数 $y=f(x)$ 的表达式中，自变量 x 用数 x_0 代入所得到的数值就是函数值 $y\Big|_{x=x_0}$ 即 $f(x_0)$.

已知函数 $f(x)$ 与 $u(x)$，若求复合函数 $f(u(x))$ 的表达式，则在函数 $f(x)$ 的表达式中，将自变量 x 都改写为括号，即把函数 $f(x)$ 的对应关系表示为括号的形式，再在括号内填上中间变量 $u(x)$，实际上就是在函数 $f(x)$ 的表达式中，将自变量记号 x 都换成中间变量 $u(x)$，就得到复合函数 $f(u(x))$ 的表达式.

有时为了简化函数记号，函数关系也可以记作 $y=y(x)$，其中等号左端的记号 y 表示函数值，等号右端的记号 y 表示对应规则.

在平面直角坐标系中，一元函数的图形通常是一条平面曲线，称为函数曲线. 显然，在函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的条件下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条平面曲线.

5. 幂函数

在幂的表达式中，若底为变量 x，而指数为常数 α，则称函数 $y=x^\alpha$ 为幂函数. 有 $\dfrac{1}{x}=x^{-1}, \dfrac{1}{x^2}=x^{-2}, \dfrac{1}{x^{10}}=x^{-10}; \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$.

幂函数 $y=x, y=x^2$ 及 $y=\sqrt{x}$ 的图形如图 0—1，幂函数 $y=x^3$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形如图 0—2.

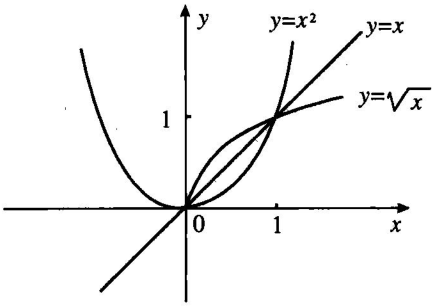

图 0—1

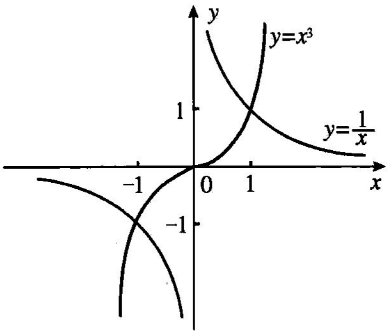

图 0—2

6. 指数函数

在幂的表达式中，若底为常数 $a(a>0,a\neq1)$，而指数为变量 x，则称函数 $y=a^x$ 为指数函数.

指数函数 $y=a^x(a>1)$ 的图形如图 0—3.

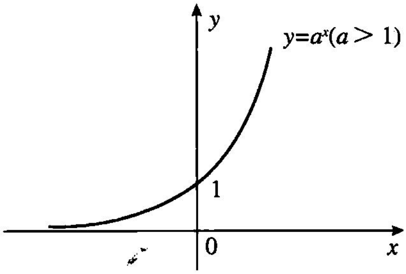

图 0—3

7. 对数函数

若 $a^y=x(a>0,a\neq1)$，则将 y 表示为 $\log_a x$，称函数 $y=\log_a x$ 为对数函数，其中 a 称为底，x 称为真数，y 称为对数. 指数式 $a^y=x$ 与对数式 $\log_a x=y$ 是表示

a,x,y 三者同一关系的不同表示方法，这两种形式可以互相转化. 以 10 为底的对数称为常用对数，变量 x 的常用对数记作 $\lg x$，即 $\lg x = \log_{10}x$.

根据对数函数与指数函数的关系，对数函数 $y = \log_a x$ 的反函数为指数函数 $x = a^y(a > 0, a \neq 1)$.

特殊的对数函数值为真数取值等于 1 或底时的对数值，即

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

在等号两端皆有意义的条件下，对数恒等关系式为

(1) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(3) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

对数函数 $y = \log_a x(a > 1)$ 的图形如图 0—4.

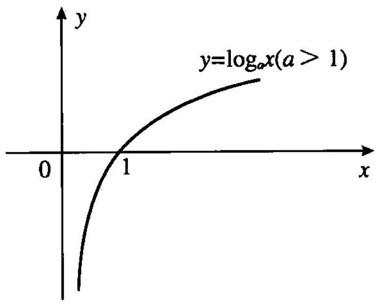

图 0—4

8. 三角函数

在本门课程中，一律以弧度作为度量角的单位，这时“弧度”二字经常省略不写，弧度与度的换算关系为：π 弧度 $= 180°$，从而得到：0 弧度 $= 0°$，$\frac{\pi}{6}$ 弧度 $= 30°$，$\frac{\pi}{4}$ 弧度 $= 45°$，$\frac{\pi}{3}$ 弧度 $= 60°$，$\frac{\pi}{2}$ 弧度 $= 90°$. 角 x 的正弦、余弦及正切函数皆称为三角函数，分别表示为 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 及 $y = \tan x$. 特别当角 x 为锐角时，其三角函数可以用直角三角形有关两条边的比值表示. 如图 0—5，在 Rt$\triangle ABC$ 中，设锐角 x 的对边为 a，邻边为 b，斜边为 c，当然斜边 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$，则有角 x 的正弦函数 $\sin x = \dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \dfrac{a}{c}$，余弦函数 $\cos x = \dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \dfrac{b}{c}$，正切函数 $\tan x = \dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \dfrac{a}{b}$.

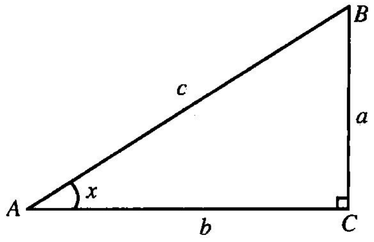

图 0—5

特殊角的正弦函数值与余弦函数值为

(1)$\sin 0=0,\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{\pi}{2}=1,\sin\pi=0$;

(2)$\cos 0=1,\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\cos\frac{\pi}{2}=0,\cos\pi=-1$.

在等号两端皆有意义的条件下,同角三角函数恒等关系式中有

(1)$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

(2)$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

正弦函数 $y=\sin x$ 的图形如图 0—6.

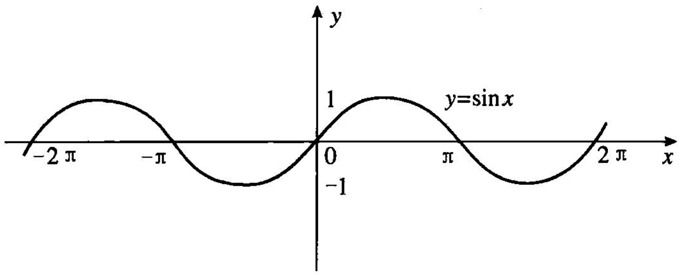

图 0—6

9. 平面直线、圆及抛物线

在平面直角坐标系 Oxy 中,方程式

$$ax+by+c=0 \quad (a,b\text{ 不同时为 }0)$$

代表直线. 特别地,方程式 $y=y_0(y_0\neq 0)$ 代表经过点$(0,y_0)$ 且平行于 x 轴的直线,方程式 $y=0$ 代表 x 轴;方程式 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 代表经过点$(x_0,0)$ 且平行于 y 轴即垂直于 x 轴的直线,方程式 $x=0$ 代表 y 轴. 经过点$M_0(x_0,y_0)$ 且斜率为 k 的直线方程的点斜式为

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

存在斜率的两条直线平行意味着斜率相等.

在平面直角坐标系 Oxy 中,方程式

$$x^2+y^2=r^2 \quad (r>0)$$

代表圆心在原点、半径为 r 的圆.特别地,方程式 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 代表下半圆,方程式 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 代表上半圆.

在平面直角坐标系 Oxy 中,方程式

$$y=ax^2 \quad (a\neq 0)$$

代表顶点在原点、对称于 y 轴的抛物线.若 $a<0$,则开口向下;若 $a>0$,则开口向上.一般地,方程式

$$y=ax^2+c \quad (a\neq 0)$$

代表顶点在点 $(0,c)$、对称于 y 轴的抛物线.当 $c<0$ 时,由抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 $|c|$ 单位而得到;当 $c>0$ 时,由抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 $|c|$ 单位而得到.此外,方程式

$$y^2=ax \quad (a\neq 0)$$

代表顶点在原点、对称于 x 轴的抛物线.若 $a<0$,则开口向左;若 $a>0$,则开口向右.

10. 其他

(1) 完全平方

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

(2) 因式分解

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$x^2+(m+n)x+mn=(x+m)(x+n)$$

(3) 有理化因式

无理式 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 互为有理化因式,有

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

(4) 阶乘

前 n 个正整数的连乘积称为 n 的阶乘,记作

$$n!=n(n-1)\cdots\cdot 1 \quad (n\text{ 为正整数})$$

并规定 $0!=1$.

(5) 一元二次方程式

一元二次方程式 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的根为 $x=x_1, x=x_2$.

(6) 绝对值

实数 x 的绝对值

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

对于任何实数 x 都有关系式 $\sqrt{x^2}=|x|$. 当然,当 $x\geqslant 0$ 时,才有关系式 $\sqrt{x^2}=x$.

(7) 有理分式

分子、分母皆为多项式的分式称为有理分式,若分子的幂次低于分母的幂次,则称为有理真分式;若分子的幂次等于或高于分母的幂次,则称为有理假分式. 对于有理假分式,可以对分子作代数恒等变形:加上(减去)且减去(加上)同一个量,使得部分项的代数和能够被分母整除,这样就将有理假分式化为多项式与有理真分式的代数和.

学习微积分还应了解下列初等数学知识.

1. n 方差

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\quad (n\text{ 为正整数})$$

2. 对数换底

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

3. 三角函数和差化积

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

4. 最大、最小及总和记号

已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,它们中的最大者记作 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,最小者记作 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,它们的总和记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$.