中等专业学校教材

离散数学

陶涛 主编

北京理工大学出版社

离散数学

陶 涛 主编

赠:本溪市图书馆

李高玲 陶涛

1989.9.2日

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识，共分七章，包括集合论、二元关系、函数、代数结构简介、图论、命题逻辑、谓词演算等基本内容。叙述深入浅出，书中列举了较多的例题，每节后面都附有一定数量习题，每章后都有小结便于总结提高。本书是中等专业学校计算机专业统编教材，也可供有关人员自学参考。

离 散 数 学

陶 涛 主编

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京理工大学出版社印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 12.25印张 274 千字

1989 年 6 月第一版　1989 年 6 月第一次印刷

ISBN 7－81013－174－510·33

印数：1－3500 册　定价：2.35 元

前　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1986—1990年编审出版规划，由中专电子类教材编审委员会计算机编审小组征稿，推荐出版，责任编委黄大胜。

本教材由本溪市电子工业学校陶涛担任主编，上海电子技术学校周岳山担任主审。

本课程的参考学时数为60学时，主要内容为集合论、二元关系、函数、代数结构简介、图论、命题逻辑、谓词演算等。教材的第一章详细介绍了集合的基本理论和笛卡尔积。第二章主要介绍二元关系的性质和运算，重点介绍了几种特殊关系：等价关系、相容关系和偏次关系。这些特殊的关系在计算机科学中有着极其广泛的应用。第三章介绍了函数论的有关内容，第四章简单的介绍了代数结构、群论和同构概念。第五章图论，以无向图为主，介绍了研究图的工具矩阵和图解，特殊的图及性质。重点介绍有关二叉树的知识。第六章介绍数理逻辑的基础：命题逻辑，真值表和主范式及应用。第七章介绍了谓词演算的有关理论和推理。书中阐述较为详尽，例题较多，力求深入浅出，每节后面附有一定数量习题，可选作二分之一，但勿少于三分之一。每章后面都附有小结，总结本章内容，以便系统掌握本章知识。

本教材初稿第一、三章由李素珍编写，第二、四、五、六、七章由陶涛编写。全书由陶涛统编定稿。辽宁大学计算机系付主任王玉书，本溪电子工业学校高级讲师张文彬，都为

本书提出许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1988 年 1 月于本溪。

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲议中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺

点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

目　　录

第一章　集合

第二章　二元关系

第三章　函数

第四章　代数结构简介

第五章 图论初步

第六章 命题逻辑

第七章 谓词演算

参考文献

第一章 集 合

集合的概念在现代数学中是最基本的概念之一，特别对于计算机工作者来说，掌握集合论的基本知识是非常必要的。集合论的知识已应用于计算机科学的各个领域。

在这一章我们介绍集合及其子集、幂集、笛卡尔积等基本概念；集合的交、并、补、差等运算以及这些运算的性质；还介绍文氏图和分划，最后介绍多重集合。

§1-1 集合与元素

人们观察考虑某种客观事物，其观察考虑对象一般总是有某一确定范围，所有观察考虑对象都在该范围之内，而在该范围之外都不观察考虑。例如我们调查一个班级学生的健康情况，那么这个班的每个学生都是调查对象，这个班以外的人都不是调查对象。

把一些确定的，彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体便称为是一个集合。

这里所谓“事物”也称“个体”，集合里所含有的个体叫做集合的元素。

例如，某班全体学生组成一个集合，这个班每一个学生都是这个集合中的一个元素。数字1，2，3组成一个集合，那么这三个数中的每一个都是这个集合的元素。全体自然数组成一个集合，那么每一个自然数都是自然数集合中的元

素。集合有时也简称为集。

今后我们用大写的英文字母 A、B、$C\cdots$ 表示集合，用小写的英文字母 a、b、$c\cdots$ 表示集合中的元素。若 a 是集合 A 中的元素。就称 a 属于 A，记作“$a\in A$”；若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记作“$a\notin A$”。

一个具体的集合怎样表示呢？集合的表示法基本有两种。

1. 列举法：把集合的元素一一列举出来，写在花括号{ }内，每个元素仅写一次，不分次序。象这样表示集合的方法叫做列举法。

例如，用 A 表示大于 -6 的负整数集合，这个集合中的元素为 -5，-4，-3，-2，-1。除了这五个元素外，再没有别的元素了。就记为

$$A=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1\}$$

用 C 表示正偶数集合，就记为

$$C=\{2,4,6,\cdots\}$$

虽然这集合中的元素没有被全部列出来，但这种表示法使人们对这个集合中的全部元素一目了然。这也是列举法的一种形式。

这里值得注意的是括号不能省略。例如 a 与 $\{a\}$ 是完全不同的。$\{a\}$表示只含一个元素 a 的集合，而 a 表示集合$\{a\}$中的一个元素。它们的关系是 $a\in\{a\}$。

2. 描述法：把集合中全体元素的共同属性特征描述出来，写在花括号{ }内，象这样表示集合的方法，叫做描述法。

例如，所有等腰三角形组成的集合记为

{等腰三角形}

开区间（-1，1）内的一切实数记为

$$\{x \mid -1<x<1,\ x\in R\}$$

括号内竖线的左方表示集合所包含的元素的一般形式，竖线的右方表示集合中元素所具有的共同性质。

在平面直角坐标系中以原点为圆心，以 5 为半径的圆周上所有点组成的集合记为

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2=25,\ x、y\in R\}$$

用描述法来表示一个集合，其方式并不是唯一的，因为对一个集合的元素往往可以用多种不同方式来确定。例如，集合 $\{1,2,3,4\}$ 的元素可以定义为不大于 4 的自然数，也可以定义为小于 6 而能整除 12 的自然数。如用 N 表示自然数集合，则集合 $\{1,2,3,4\}$ 用描述法可以表示为

$$\{a \mid a\in N,\ a\leqslant 4\}$$

也可以表示为

$$\{a \mid a\in N,\ a<6,\ 12/a\in N\}$$

比较这两种表示方法，可以看出，列举法的优点是可以具体看清集合的全部元素；描述法的优点是刻划出了集合中元素的共同特征。应用时可以根据情况随意选用，不受限制。

集合这个概念具有下列性质：

描述对象的广泛性：在定义集合时，对研究对象没有具

体要求，所以定义为集合的对象是极其广泛的。可以是具体的事物，也可以是抽象的事物。可以是人，也可以是物。可见不同的集合的元素之间是千差万别的。不但不同集合元素之间性质可以不同，就是同一集合中的元素的很多性质也可以不同。例如文房四宝可以定义为一个集合，在这个集合中，笔、墨、纸、砚这四种东西除了都是文房必需品这个性质以外，其他性质有很多不同之处，人们把它们看作为一个集合习以为常，不以为怪。如果把“太阳”“1”、“红色的”组成一个集合，大家就会感到惊奇了。其实这个集合也是很正常的。它们是幼儿园里张强小朋友今天学会的知识组成的集合。

{太阳，红色的，1}

集合中的元素本身也可以是集合。在一个集合中也可以一部分元素是集合，另一部分元素不是集合。例如

$$A=\{a,b,c,\{a,b\},\ \{a,b,c\}\}$$

$$B=\{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b,c\}\}$$

集合中元素个数的任意性：集合中元素的个数可以是任意多个。它可以是有限个，例如，某班学生组成的集合；也可以是无限个，例如，自然数集合、实数集合；可以马上知道集合的元素个数，例如，全世界国家组成的集合；也可以想办法知道集合的元素的确切数，例如，全世界微机组成的集合；还可能永远无法知道集合中元素的确切个数，例如，地球上的细菌组成的集合。

集合元素的确切性：每一个具体的集合一旦定义，则这个集合的元素也随之确定，没有既属于这个集合，又不属于

这个集合的元素。例如，集合 $A=\{x|x\geq 1000\}$，对于任何实数都可以确切知道它是否属于 A，没有既属于 A，又不属于 A 的实数。

有些语言虽然常用来表示事物范围，但不能用来定义集合。例如“很大的实数”就不能用来定义集合。因为很大的实数这句话不确切，究竟多大的数叫很大的实数？没有一个明确的界线。类似这样的句子很多。如，高个子的人、好东西、在 x_0 点附近等等。

集合中的元素的不同性：在一个集合中任何两个元素都是不完全相同的。不允许一个元素在一个集合中重复出现。例如，$\{a,b,a,c\}$ 这样记一个集合是不允许的。

定义 1-1.1 不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ。

空集是很重要的集合。例如方程 $x^2+2=0$ 的实数解的集合就是空集。

空集 ϕ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同概念，前者是指不含任何元素的集合，而后者是指由一个元素 0 所组成的单元素集合，显然它不是空集。

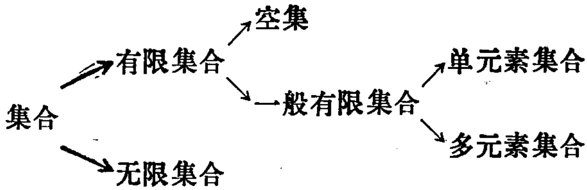
如果一个集合中所含元素的个数可以用某个自然数来记数，则称这个集合是有限集合，否则是无限集合。在有限集合中元素的个数称为该集合的基数。在集合符号前加“#”表示该集合的基数。如

$$A=\{a,b,c,d\},\quad \#A=4$$

$$B=\{0\},\quad \#B=1$$

$$C=\{a,b,c,1,2,3,\{a,b,c\},\{1,2\}\},\quad \#C=8$$

集合按元素的个数可以分类如下：



在本书中下列数集用对应的固定符号表示。

1． N　自然数集合

2． I　整数集合

3． I_+　正整数集合

4． Q　有理数集合

5． Q_+　正有理数集合

6． R　实数集合

7． R_+　正实数集合

例 1　用例举法写出下列集合：

$A=\{$一年中有 31 天的月份$\}$

$B=\{$ 18 的质因数$\}$

$C=\{$小于 20 的素数$\}$

解：$A=\{1,3,5,7,8,10,12\}$

$B=\{2,3\}$

$C=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

例 2　用描述法表示下列集合：

$A=\{0,2,4,6,\cdots,98,100\}$

$B=\{4,7,10,13,16,19,\cdots\}$

C：函数 $y=\lg\sqrt{4-x}$ 的定义域的集合

解： $A=\{$不超过一百的非负偶数$\}$

$B=\{(x-1)/3=\kappa,\ k\in N\}$

$C=\{x|x<4,\ x\in R\}$

例 3 求不等式$(x-1)(x+1)<0$的全部解。

解： $\begin{cases}x-1>0\\x+1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x<-1\end{cases}\Rightarrow\phi$

或 $\begin{cases}x-1<0\\x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\x>-1\end{cases}\Rightarrow-1<x<1$

所以$(x-1)(x+1)<0$的解集是$\{x|-1<x<1,\ x\in R\}$

例 4 求$\sin x=\frac{1}{2}$的解集。

解： $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

所以$\sin x=\frac{1}{2}$的解集是$\{x|x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\quad n\in I\}$

例 5 求函数$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{x^2-1}$的定义域。

解： $\begin{cases}x-1\geqslant0\\1-x\geqslant0\\x^2-1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant1\\x\leqslant1\\x\neq\pm1\end{cases}\Rightarrow\phi$

所以$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{x^2-1}$的定义域是$\phi$。

练 习 一

1．下列语言哪些可以用来定义集合。

（1） 接近零的数；

（2） 所有小于 10 的整数；

（3） 地球上全部生物；

（4） 平面几何中的所有难题；

（5） 平面中所有的圆；

（6） 2000 年时的中国人；

（7） 某班期末成绩为负分的人；

（8） 某班大个男学生；

（9） 某书的全部插图；

（10） 身高为 5 米的人；

2．用列举法表示下列集合：

（1） 由 1 至 100 的整数中的完全平方数的集合；

（2） 大于 1 而小于等于 5 的整数；

（3） $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集

（4） 12 的质因数；

（5） 1990 年～2000 年中的闰年；

（6） $x^3-3x^2+2x=0$ 的解集；

（7） $|x|<5$ 的奇数解；

（8） 中国古代四大发明；

（9） 除 7 余 6 的正整数；

（10） 构成 $APPLE$ 的英文字母；

3．用描述法表示下列集合；