GONGCHENGSHUXUE
XIANXINGDAISHU
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

工程数学

线性代数

全程学习指导与习题精解

（同济五版）

重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌

颜 超
滕兴虎 吴 欧
编著

东南大学出版社
Southeast University Press

工程数学

线性代数

全程学习指导与习题精解

同济五版

滕加俊　颜　超
滕兴虎　吴　欧　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

为了帮助广大在校大学生(包括考研的同学)更好地学习线性代数，我们编写了《工程数学——线性代数全程学习指导与习题精解》(同济五版)。本书由以下几个部分组成：1. 基本要求、重点与难点；2. 主要概念与公式；3. 重、难点解答；4. 典型例题分析；5. 课后习题全解；6. 考研真题精解；7. 同步测试题。本书内容编排合理，实用性强，是广大线性代数学习者不可或缺的一本参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程学习指导与习题精解：同济五版/滕加俊等编著. —南京：东南大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-5641-2303-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 126313 号

线性代数全程学习指导与习题精解(同济五版)

编　　著	滕加俊 等	责任编辑	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江　汉
社　　址	南京市四牌楼2号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seu.edu.cn
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	印　　张	14.5　字　数　400千
版　　次	2010年8月第1版第1次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-2303-1		
定　　价	20.00元		

前　言

线性代数是大学理工科专业和部分文科专业学生必修的一门重要基础课程，也是硕士研究生入学考试必考科目，在全国统一的硕士研究生入学考试中，线性代数内容占20%左右。

线性代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性，大多数学生在学习过程中感到线性代数抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手。同济大学应用数学系编写的《工程数学——线性代数》(第五版)深受广大教师和学生欢迎，反映国内外高等数学课程改革和学科建设最新成果。为了帮助在校大学生(包括考研的同学)能更好地学习线性代数，我们编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了每一章的基本要求及该章的重点和难点内容。

2. 主要概念与公式：列出了每一章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现概率较高的核心内容。

3. 重点、难点解答：列出每一章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了详细的归纳和解释，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

4. 典型例题分析：精选每一章内容所涉及的重要题型，并进行了详细的分析和解答，以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法，达到举一反三、触类旁通的效果。

5. 课后习题全解：对教材中课后每一道习题均给出了详细的分析和解答，以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解。

6. 考研真题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广、题型多、解题技巧强，可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路，更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法。

7. 同步测试题：根据线性代数课程考试和考研内容，在每一章设计了一套同步自测题，目的是给广大同学提供练习机会，帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力，同时检验自己的线性代数知识的掌握程度，找出差距，以便更好地学习线性代数。

本辅导教材由滕加俊教授执笔编写，解放军理工大学应用数学教研室滕兴虎、颜超、吴欧，以及邱颖萍、杨传兵、刘娟、胡俊等参加了编写工作，在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社领导以及刘坚博士和戴季东老师的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者的水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。

编者

2010 年 8 月

目 录

第一章 行列式

第二章 矩阵及其运算

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

第四章　向量组的线性相关性

第五章　相似矩阵及二次型

第六章　线性空间与线性变换

第一章　行列式

基本要求、重点与难点

基本要求:

(1) 理解排列及逆序的定义,掌握逆序的计算方法;

(2) 理解 n 阶行列式的定义;

(3) 掌握行列式的性质,会用行列式的性质计算行列式;

(4) 掌握 Gramer 法则,会用 Gramer 法则求解线性方程组.

重点:

n 阶行列式的定义、性质,高阶行列式的计算与证明.

难点:

高阶行列式的计算与证明.

主要概念与公式

1. 排列及逆序的定义

n阶排列:由 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$称为一个 n 阶排列,n 阶排列共有 $n!$ 个.

逆序:在一个排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中,若数 $i_t > i_s$,则称这两个数构成一个逆序.

逆序数:在一个排列中,所有逆序的总数,称为该排列的逆序数.

对换:在排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.

2. 排列的性质

(1) 对换改变排列的奇偶性;

(2) 在全部 n 阶排列中($n \geqslant 2$)奇偶排列各占一半;

(3) 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列,并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

3. n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

这里 $\sum\limits_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ 表示对所有 n 阶排列$(i_1 i_2 \cdots i_n)$求和. 故 n 阶行列式等于 $n!$ 项取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 的代数和. 每一项的正负号由该项 n 个元素的列下标排列的逆序数决定. 当$(i_1 i_2 \cdots i_n)$为偶排列时,对应项取正号;为奇排列时,对应项取负号.

4. 行列式的性质

性质 1:行列式的行列互换后,行列式的值不变.

性质 2:行列式中任意两行(列)互换,则行列式仅仅改变符号,特别若行列式有两行(列)对应元素相同,则该行列式为零.

性质 3:将一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一数 k,等于以数 k 乘以该行列式.

性质 4:若行列式中有两行(列)元素对应成比例,则该行列式的值为零.

性质 5:若行列式中某一行(列)中各元素均为两项之和,则该行列式可写成两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组数作为行(列),其余各行(列)与原来行列式相同.

性质 6:将行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去,行列式的值不变.

性质 7:行列式按某一行(列)展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

性质 8:行列式的任何一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j)$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0 \ (k \neq l)$$

5. Cramer 法则

(1) 若 n 阶线性非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 的系数行列式 $D \neq 0$,则非齐次线性方程组仅有唯一解

$$x_i = \frac{D_i}{D} \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中 D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 b_1, $\cdots$, b_n 而得到的行列式.

(2) n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式为零. 若系数行列式不等于零,则该方程组只有零解.

重、难点解答

1. 排列的逆序数的计算

逆序数的计算有两种方法:

(1) $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后边比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后边比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后边比 i_{n-1} 小的数的个数;

(2) $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+ i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+ \cdots + i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数.

因此为了找出排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 所有的逆序而不遗漏,必须对此排列的 n 个数从左到右顺序地考察.

2. n 阶行列式中的项应带有符号的确定

首先将该项各元素行下标按自然顺序排列,由定义其正负号就取决于列下标排列的逆序数. 因此只要确定该项各元素列下标的逆序数即可.

3. 几个重要的行列式

(1) 对称行列式　$D = D^{\mathrm{T}}$　满足 $a_{ij} = a_{ji}$　$(i,j = 1,2,\cdots,n)$.

(2) 反对称行列式　$D = -D^{\mathrm{T}}$　满足 $a_{ij} = -a_{ji} \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

特别当行列式的阶数 n 为奇数时,反对称行列式 $D = 0$.

(3) 范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$$

4. 计算行列式的方法

行列式的计算是本章的重点也是本章的难点，计算行列式一般有以下几种常用方法：

(1) 利用行列式的定义：这种方法只适用于一些特殊的行列式或者大多数元素为零的行列式的计算；

(2) 利用行列式的性质计算：利用行列式的性质将行列式转化为上(下)三角行列式来计算，这是计算行列式最常用的方法；

(3) 利用行列式展开定理来计算：利用按行(列)展开公式将高阶行列式转化为低阶行列式来计算，该方法适用于大多数元素为零的行列式的计算；

(4) 利用递推关系来计算：利用行列式的性质或展开公式找出递推关系来进行计算，该方法一般适用于高阶且元素有规律的行列式的计算；

(5) 利用升阶法计算：在行列式值不变的情况下，加上特殊的一行和一列再利用行列式的性质进行化简后计算；

(6) 利用特殊行列式的值来计算：如利用范德蒙行列式来计算，此方法只适用于特殊行列式值的计算；

(7) 利用分解之积法计算：$|AB|=|A|\cdot|B|$，其中 A,B 是 n 阶方阵，相关内容将在第二章进行学习.

5. 判断 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组有无非零解的关键是看它的系数行列式是否为零：若为零，则有非零解；反之，只有零解. n 元齐次线性方程组的有关结论常常被利用来解决解析几何中的问题.

典型例题分析

【例题 1】 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，则 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

【分析】 逆序数的计算有两种方法：(1) $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数；(2) $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+\cdots+i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数. 对于含有字母的排列求逆序数，一定要对字母进行讨论来确定其与前后数的大小关系从而确定是否构成逆序.

解　方法 1　设 x_i 有 k_i 个逆序，即 x_i 后面有 k_i 个元素比 x_i 小，而 x_i 后面有 $(n-i)$ 个元素，故 x_i 后面有 $(n-i)-k_i$ 个元素比 x_i 大，从而

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\sum_{i=1}^{n}(n-i-k_i)$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=k$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}i=\dfrac{n(n+1)}{2}$，故

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=n^2-\frac{n(n+1)}{2}-k=\frac{n(n-1)}{2}-k$$

方法 2　由于任一对数偶在 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 和 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中必形成一个逆序和顺序，所以这两个排列的逆序之和等于从 n 个元素中取两个元素的组合数 C_n^2. 于是

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)+\tau(x_1x_2\cdots\cdots x_nx_{n-1})=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

由于 $\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=k$，故

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\frac{n(n-1)}{2}-k$$

【例题 2】 利用 n 阶行列式的定义计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

【分析】n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，而各项的符号由 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 来决定：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，对应项取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，对应项取负号．若所给行列式中 0 元素较多时，可考虑用定义来计算．在计算中，一定要注意所剩非零项的符号．

解　由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$ 这一项，把这 n 个元素按行下标自然顺序排列时，列下标的排列为 $(n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ n)$，而

$$\tau((n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

故 n 阶行列式

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

注　根据行列式的定义，容易求出以下几个有用的结论：

(1) 上、下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积．

(2) 对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积．

(3) $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

【例题 3】已知 221，323，459 都能被 17 整除，不求出行列式的值，证明：行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&2&3\\4&5&9\end{vmatrix}$ 能被 17 整除．

【分析】不计算出行列式的值证明该行列式能被 17 整除．说明该行列式中某一行或某一列一定有公因子 17，但观察行列式中的元素发现，现有元素无公因子 17，但进一步观察发现第一行元素 1，2，2 和 221 数字完全相同，故考虑用行列式的性质，将第一行第三个元素乘以 100，第二个元素乘以 10 加到第一个元素上去正好是 221，因此，我们利用行列式的性质来证明．

证明　将 D 中第 3 列的 100 倍，第 2 列的 10 倍分别加至第 1 列，行列式 D 恒等变形为

$$D=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&2&3\\4&5&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}221&2&2\\323&2&3\\459&5&9\end{vmatrix}$$

由已知条件第一列中有公因数 17，将 17 提取到行列式符号以外，所剩行列式记为 D_1，则

$$D=17D_1$$

由于 D_1 中的每一个元素都是整数，根据行列式的定义，D_1 是不同行不同列元素乘积的代数和，因而 D_1 是整数，故 D 能被 17 整除．

【例题 4】已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x&1&2&4\\1&2-x&2&4\\2&0&1&2-x\\1&x&x+3&x+6\end{vmatrix}$，证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根．

【分析】对于任一个函数 $f(x)$ 来讲，要证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根，只要在区间 $[0,1]$ 上证明函数 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=f(1)$ 即可．对于本题来讲，$f(x)$ 的表达式是一个行列式，根据行列式的定义知 $f(x)$ 是 x 的多项式，显然 $f(x)$ 连续且可导，从而根据罗尔定理只要证明 $f(0)=f(1)$ 即可．

证明　根据行列式的定义，$f(x)$ 是 x 的多项式，故 $f(x)$ 连续且可导．因为

$$f(0)=\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&2&2&4\\2&0&1&2\\1&0&3&6\end{vmatrix}=0,\qquad f(1)=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&1&2&4\\2&0&1&1\\1&1&4&7\end{vmatrix}=0$$

即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有一个根或 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

【例题 5】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$

【分析】 行列式的计算方法很多，但最常用的方法是利用行列式的性质，将行列式化为上(下)三角行列式来计算，观察该行列式发现直接化上(下)三角行列式时比较困难，因此我们想法使第一行(列)的元素全变为 1，再化上(下)三角行列式就比较简单了，题中告诉我们 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，说明 a_i 可能会出现在分母上，故我们利用这一条件将 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 提取到行列式符号外再进行计算.

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1}\\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2}\\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

从第二行起每一行都加到第一行上去有

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \cdots & 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2}\\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1+\frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{r_i+r_1\times\left(-\frac{1}{a_i}\right)}a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

【例题 6】 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$,试求:(1) $A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42}$;(2) $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$.

【分析】 本题可以先求出所有的 A_{ij} 后再计算,但这样做太繁,我们注意到

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \,(i = 1, 2, \cdots, n)$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \,(j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式,A_{ij} 和位置有关而和该位置上的元素 a_{ij} 无关.对于本题来讲,$A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42}$ 相当于四阶行列式按第 2 列展开,而第 2 列的元素分别是 1,−1,1,−1,而 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 相当于四阶行列式按第 4 行展开,而第 4 行的元素分别是 1,1,1,1,另外,若题中给出的是余子式 M_{ij},则必须利用关系式 $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$,将 M_{ij} 转化为代数余子式 A_{ij} 的关系式来求.

解 (1) $A_{12} - A_{22} + A_{32} - A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

(2) $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

【例题 7】 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$ (行列式的空白处为零)

【分析】 一般来讲,当行列式的结构具有重复性时,可通过对某一行(列)展开,将高阶行列式表示为具有相同结构的低阶行列式的线性关系式 $D_n = xD_{n-1} + yD_{n-2}$ 或其他线性关系,其中 x, y 为常数,再根据关系式依次类推求出所给高阶行列式的值,递推关系式也可由其他方法得到.

解 方法一 原行列式按第一行展开,得递推关系式

$$D_{2n} = a \begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ & & a & b & & \\ & & b & b & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & a & 0 \\ 0 & & & & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ & & \ddots & & \iddots & \\ & & & a & b & \\ & & & b & a & \\ & & \iddots & & \ddots & \\ & b & & & & a \\ b & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 D_{2n-2} - b^2 D_{2n-2} = (a^2 - b^2) D_{2n-2}$$

同理 $D_{2n-2} = (a^2 - b^2) D_{2n-4}$,⋯ 故

$$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}=(a^2-b^2)^2D_{2n-4}=\cdots=(a^2-b^2)^{n-1}D_2$$

而

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2$$

从而 $D_{2n}=(a^2-b^2)^n$.

方法二　观察一下行列式，发现行列式中每行元素的和均为$a+b$，实际上由于很多零元素的存在，每行只有两个元素a和b不为零．我们将位置对称的两列元素相加再提取公因式，就能简化行列式，从而求出行列式的值．

将第$2n$列加到第1列，第$2n-1$列加到第2列，…，第$n+1$列加到第n列，有

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}
a+b & & & & & & & b \\
 & a+b & & & & & b & \\
 & & \ddots & & & \iddots & & \\
 & & & a+b & b & & & \\
 & & & a+b & a & & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & & \\
 & a+b & & & & & a & \\
a+b & & & & & & & a
\end{vmatrix}$$

$$=(a+b)^n\begin{vmatrix}
1 & & & & & & & b \\
 & 1 & & & & & b & \\
 & & \ddots & & & \iddots & & \\
 & & & 1 & b & & & \\
 & & & 1 & a & & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & & \\
 & 1 & & & & & a & \\
1 & & & & & & & a
\end{vmatrix}$$

再将第一行的(-1)倍加到最后一行，第二行的(-1)倍加到第$2n-1$行，…，第n行的(-1)倍加到第$n+1$行，有

$$D_m=(a+b)^n\begin{vmatrix}
1 & & & & & & & b \\
 & 1 & & & & & b & \\
 & & \ddots & & & \iddots & & \\
 & & & 1 & b & & & \\
 & & & 0 & a-b & & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & & \\
 & 0 & & & & & a-b & \\
0 & & & & & & & a-b
\end{vmatrix}$$

$$=(a+b)^n(a-b)^n=(a^2-b^2)^n$$

【例题 8】利用克拉默法则求下列线性方程组的解

$$\begin{cases}
x_2-3x_3+4x_4=-5, \\
x_1-2x_3+3x_4=-4, \\
3x_1+2x_2-5x_4=12, \\
4x_1+3x_2-5x_3=5
\end{cases}$$

【分析】克拉默法则的直接应用，是求解n个未知数、n个方程构成的线性方程组．当方程组的系数行列式D不为零时，则可计算其余n个n阶行列式$D_i(i=1,2,\cdots,n)$，然后利用公式$x_i=\dfrac{D_i}{D}\ (i=1,2,\cdots,n)$，求出未知数$x_i(i=1,2,\cdots,n)$．若$D$为零，则线性方程组无解．

解

$$D=\begin{vmatrix}0&1&-3&4\\1&0&-2&3\\3&2&0&-5\\4&3&-5&0\end{vmatrix}=24\neq 0$$

故线性方程组有唯一解. 因为

$$D_1=\begin{vmatrix}-5&1&-3&4\\-4&0&-2&3\\12&2&0&-5\\5&3&-5&0\end{vmatrix}=24,\ D_2=\begin{vmatrix}0&-5&-3&4\\1&-4&-2&3\\3&12&0&-5\\4&5&-5&0\end{vmatrix}=48$$

$$D_3=\begin{vmatrix}0&1&-5&4\\1&0&-4&3\\3&2&12&-5\\4&3&5&0\end{vmatrix}=24,\quad D_4=\begin{vmatrix}0&1&-3&-5\\1&0&-2&-4\\3&2&0&12\\4&3&-5&5\end{vmatrix}=-24$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{24}{24}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{48}{24}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{24}{24}=1,\ x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{24}{24}=-1$$

即原线性方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2,\\x_3=1,\\x_4=-1.\end{cases}$$

【例题 9】设有线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

当 λ 为何值时:(1) 方程组有唯一解?(2) 方程组有无穷多组解?(3) 方程组无解?

【分析】非齐次线性方程组有唯一解的条件是系数行列式 D 非零,而当 D 为零时,非齐次线性方程组可能无解,也可能有无穷多个解. 因此判别非齐次线性方程组有无解的问题关键是看系数行列的值是否为零. 对本题来讲,这是一个非齐次的三元一次线性方程组,它有非零解的充要条件是系数行列式 D 不为零,所以关键还是计算三阶行列式的值.

解 首先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2&1&1\\\lambda+2&\lambda&1\\\lambda+2&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

故当 $D\neq 0$ 即 $(\lambda+2)(\lambda-1)^2\neq 0$ 时方程组有唯一解,此时 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$,而

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&\lambda&1\\\lambda^2&1&\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2,D_2=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&\lambda^2&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&\lambda\\1&1&\lambda^2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

于是方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-\lambda}{\lambda+2}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{1}{\lambda+2}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}. \end{cases}$$

当 $\lambda=1$ 时,原方程组变为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

实际上是一个独立的方程,有无穷多组解.

当 $\lambda=2$ 时,原方程组变为$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2-2x_3=-2 \end{cases}$

将三个方程相加有 $0=3$,明显矛盾,故方程组无解.

课后习题全解

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

【分析】对角线法则就是:平行于主对角线的三条联线上三个元素的乘积前冠以正号,而平行于副对角线的三条联线上三个元素的乘积之前冠以负号.上述所有项数之和即为该行列式的值,因此利用对角线法则,求三阶行列式只要将以上所有项求出即可.另外注意:对角线法则只适用于二阶和三阶行列式的计算,对高于三阶的行列式的计算不适用.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-4)\times3+1\times1\times8+0\times(-1)\times(-1)-1\times(-4)\times(-1)$

$-0\times1\times3-(-1)\times2\times8=-24+8-4+16=-4$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+cba+bac-c^3-b^3-a^3$

$=3abc-a^3-b^3-c^3$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+ab^2+ca^2-ba^2-ac^2-cb^2$

$=a^2(c-b)+bc(c-b)+a(b^2-c^2)$

$=(c-b)(a^2+bc)+a(b-c)(b+c)$

$=(c-b)(a^2+bc-ab-ac)$

$=(c-b)[a(a-b)+c(b-a)]$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = x(x+y)y+(x+y)yx+yx(x+y)-(x+y)^3-y^3-x^3$

$= 3(x+y)xy-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3-x^3-y^3$

$=-2(x^3+y^3)$

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数.

(1) 1 2 3 4; (2) 4 1 3 2; (3) 3 4 2 1; (4) 2 4 1 3;

(5) $1\cdot 3\cdot(2n-1)2\cdot 4\cdots(2n)$ (6) $1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

【分析】逆序的计算方法有两种,一般来讲用下述方法较多:$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_1$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.其中 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$ 代表排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数.因此求排列的逆序数只要从第一个元素起依次用上述方法来计算即可.

解 (1) $\tau(1\ 2\ 3\ 4)=0+0+0=0$;

(2) $\tau(4\ 1\ 3\ 2)=3+0+1=4$;

(3) $\tau(3\ 4\ 2\ 1)=2+2+1=5$;

(4) $\tau(2\ 4\ 1\ 3)=1+2+0=3$;

(5) $\tau(1\cdot 3\cdot(2n-1)2\cdot 4\cdot(2n)=0+1+2+3+\cdots(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(6)**【分析】**本题与第(5)小题相类似,只不过后部分顺序颠倒了,因此计算序数的时候还要考虑后半部分的逆数,由于后边的元素和前面部分构成的逆数已在前半部分求出,故只要单独求后半部分的逆序数即可.

解 $\tau(1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdot 2)$

$=0+1+2+3+\cdots+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0$

$=n(n-1)$

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【分析】由行列式的定义知 $D=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{3i_3}a_{4i_4}$,其中 $i_1 i_2 i_3 i_4$ 是 1, 2, 3, 4 的某个排列.本题中 $i_1=1$, $i_2=3$,所以 i_3, i_4 分别为 2, 4 的排列,即为:1324 或 1342,注意行列式中的项不仅仅有数值还应有符号 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4)}$.

解 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

4. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

(1)**【分析】**计算行列式的方法有多种,计算3阶以下的行列式可以用对角线法,而计算4阶以上行列式的值一般常用的方法是:利用行列式的性质,将行列式化为上(下)三角行列式来求.

解 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10\times r_1]{r_2-4\times r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&-15&2&-20\\0&-7&2&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+7\times r_2]{r_3\times 15\times r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=17\times 9\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&1&5\\0&0&1&5\end{vmatrix}=0$$

(2) **解** $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}5&0&6&2\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}=0$

注　在行列式的计算过程中,要时时注意行列式性质的应用.

(3)**【分析】**观察一下行列式第一行有公因子 a,第二行有公因子 d,第三行有公因子 f,可以先将公因子提取出来后,将行列化简后再计算.

解 $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}=adfbce\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4abcdef$

(4)**【分析】**该行列式中为零的元素较多,在这种情况下,可以采用行列式按行(列)展开,将高阶行列式化为低阶行列式来求较为简单.

解　按第一列展开有

$$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b&1&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}$$

$$=ab\begin{vmatrix}c&1\\-1&d\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}1&0\\-1&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&1\\-1&d\end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+ad+cd+1$$

5. 解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=0$;(2) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&a&b&c\\x^2&a^2&b^2&c^2\\x^3&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$,其中 a,b,c 互不相等.

(1)**【分析】**这虽然是一道解方程的问题,但还是归结到行列式的计算.左边是一个三阶行列式,可以用对角线法来计算,也可以利用行列式的性质来计算.在做该类题目是要注意方程的阶数,同时也应观察行列式有无其特殊规律,因为有时可以利用行列式的性质直接求出其解.

解 $\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{vmatrix}-1&1&x+1\\2&x+1&1\\x+1&2&-1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+(x+1)r_1]{r_2+2\times r_1}-\begin{vmatrix}-1&1&x+1\\0&x+3&2x+3\\0&x+3&x^2+2x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x+3&2x+3\\x+3&x^2+2x\end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3)$$

所以方程变为$(x+3)(x^2-3)=0$,解得 $x_1=-3$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$.

(2)**【分析】**观察方程左端的行列式,发现它是一个四阶范德蒙德行列式,可以直接应用 n 阶范德蒙德行列式的结果写出该四阶行列式的值.

解　因为