●科技增强国力 青年开创未来

理科分册

中国科协首届青年学术年会

执 行 委 员 会 编

CHINA ASSOCIATION
FOR
SCIENCE AND TECHNOLOGY
FIRST
ACADEMIC ANNUAL MEETING
OF
YOUTHS
PROCEEDINGS

中国科学技术出版社

内容提要

《中国科协首届青年学术年会论文集·理科分册》，精选了103篇优秀学术论文。内容涉及数学、化学、物理、天文、地质、生物、地理、气象、海洋、环境、资源、心理等众多学科，反映了当代青年科技工作者在基础理论研究领域的最新研究成果，具有较高的学术水平。本文集可供广大理科大学生、硕士生、博士生以及从事科学研究的青年科技工作者阅读。

（京）新登字175号

中国科学技术协会首届青年学术年会
论文集
（理科分册）
中国科协首届青年学术年会
执行委员会　编
*
中国科学技术出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米　1/16印张：44.5　字数：1056千字
1992年4月第一版　1992年4月第一次印刷
印数：1—1，000册　定价：48.00元
ISBN 7-5046-0720-7/O·12

前　　言

当今世界，科学技术已成为决定生产力的首要因素，世界各国之间的竞争也更多地表现为包括科学技术在内的综合国力的竞争，特别是青年科技人才的竞争。我国青年科技工作者已成为科技战线上一支生力军，他们正肩负起21世纪科技发展和社会进步的重要历史使命。为了检阅我国青年科技工作者的科技成果，发现和培养青年科技英才，从而为21世纪中华民族屹立于世界科技之林造就跨世纪的科技栋梁，中国科协决定于1992年4月在北京召开中国科协首届青年学术年会。年会采取主会场和分会场相结合的形式，以分会场为主，设有理、工、农、医、交叉等5个学科分部。首届青年学术年会是一次多学科、综合性的青年学术盛会。届时，600余名海内外优秀科技青年将荟萃京华，砥砺学问，切磋技艺，交流成果，探讨我国科技事业的发展道路。

自1991年11月份中国科协首届青年学术年会执行委员会发出征文通知后，海内外青年学者反响强烈。短短几个月内，年会5个学科分部共征集到学术论文8 700余篇，其中理科分部1 300多篇。这些论文的作者既有多次荣膺国内外重大科技成果奖、并在学术界崭露头角的科技新星，也有刚刚走出校门，步入科学殿堂的莘莘学子；既有在海外刻苦攻读、奋力拼搏的“洋”博士，也有长期扎根国内、埋头苦干的“土”学者。他们将多年来辛勤耕耘的学术成果奉献给这次盛会，以接受祖国和人民的检阅。

中国科协首届青年学术年会执行委员会理科分部本着“学术第一、质量第一”的原则，对征集到的论文精心组织了两轮评审。首

先，将论文进行分类，并分别送到26个全国性学会进行初审；有关学会组织了上百名专家从千余篇论文中遴选出300余篇较优秀的文章作为候选论文。然后，再由理科分部论文评审委员会专家张兰生、林群、沈信耀、麦振洪、黄涛、宋心琦、张泽莹、李永森、钱燕文、郭方、桂耀林、何希吾、赵南明、陈润生、姜恕等15位教授进行复审，从中精选出103篇优秀论文作为会议正式入选论文。其后，将这些论文送海洋出版社进行编辑工作，并由中国科学技术出版社进行了复、终审，以汇编成《中国科协首届青年学术年会论文集·理科分册》。

《中国科协首届青年学术年会论文集·理科分册》内容覆盖面非常广，主要涉及数学、物理、化学、生物、地质、环境、海洋、气象、资源、天文、地理、地震、生态、遗传等众多学科。论文的学术水平普遍较高，有的在基础理论研究方面已达到国内甚至国际领先水平，充分展示了我国科技事业后继有人，兴旺发达的喜人前景。

中国科协首届青年学术年会执行委员会理科分部在论文征集、评审、编辑和出版过程中，得到了中国数学、化学、物理、力学、生物物理、环境科学、海洋、地质、气象、植物、动物、光学、声学、天文、地理、地震、地球物理、昆虫、微生物、遗传、心理、生态、自然资源、优选法统筹法与经济数学、系统工程等全国性学会、研究会，以及中国海洋报社、海洋出版社和中国科学技术出版社的大力支持；在会议期间，也得到了国家海洋局、北京大学、国家黄金管理局、中国石油总公司、武警黄金部队指挥部等单位的鼎力相助，在此一并致谢！

中国科协首届青年学术年会执行委员会理科分部主任潘新春、副主任骆建华、委员朱进、楼伟、严纯华等同志具体组织领导了理科分部的论文征集、评审、编辑以及理科分会场学术交流等工作。仝开建、李青青、周红等同志被聘作为理科分部工作人员参与了有关工作。

由于编者在水平、人力及时间上都有限，难免出现错误，希读者谅解，不当之处欢迎批评指正。另外因受篇幅所限，同时根据编辑的需要，对某些较长的文章以及文章后所引参考文献做了部分删节，特此说明，希论文作者谅解。

中国科协首届青年学术年会理科分部

1992年1月30日

目　录

数　学

物　理

化　学

生　　物

地　学

综　　合

关于 Thompson 猜想

陈　贵　云

（西南师范大学数学系　博士生）

摘 要　设 G 是有限群，$N(G) = \{n \mid G$ 有共轭类 C 使 $|C| = n\}$，著名群论专家 J. G. Thompson 教授有如下猜想：

设 G 是有限群 $Z(G) = 1$，M 为非 Abel 单群，$N(G) = N(M)$，则 $G \cong M$.（文献[1]）

本文就 M 为散在单群证明了猜想。

记号：$C_G^x = \{g^{-1}xg \mid \forall\ g \in G\}$，$x \in G$. $t(G)$ 表 G 的素图分量数。π_i^G，$1 \leqslant i \leqslant t(G)$ 表 G 的素图分量，且设 $2 \in \pi_1^G$，称 π_1^G 为 2 分量，其余为非 2 分量。$T(G) = \{\pi_1^G, \pi_2^G, \cdots, \pi_t^G\}$，$t = t(G)$. 有时简记 π_i^G 为 π_i，$1 \leqslant i \leqslant t(G)$.

1　预备结果

引理 1.1　设 G 为有限群，$Z(G) = 1$，p 为质数使 $p \nmid n$，$\forall\ n \in N(G)$ 成立，则 $p + |G|$.

证若 $p \mid |G|$，设 $S_p \in Syl_pG$. 由 $p + n$，对 $\forall\ n \in N(G)$ 成立知：对 $\forall\ x \in G$，$C_G(x)$ 含 G 之 P-Sylow 子群。可设 $S_p^{g_x} \leqslant C_G(x)$ 则 $x \in C_G(S_p^{g_x}) = C_G(S_p)^{g_x}$，$\forall\ x \in G$. 故 $G \subseteq \bigcup_{X \in G} (C_G(S_p))^{g_x}$，$G = \bigcup_{X \in G} (C_G(S_p))^{g_x}$，进而 $G = C_G(S_p)$，$S_p \leqslant Z(G) = 1$. 矛盾。

推论 1.1　若 G 为有限群，$Z(G) = 1$，M 为非 Abel 单群，$N(G) = N(M)$，则 $\pi(G) = \pi(M)$.

引理 1.2　若 G 为有限群，x、$y \in G$，$xy = yx$，$(|x|, |y|) = 1$，则 $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y)$. 特别地，若 p 为质数，$p \mid (|C_G(x)|, |C_G^x|)$，$p \nmid |x|$，则有 p 元 $y \in C_G(x)$，$y \neq 1$. 使下列两条成立：

〈1〉 $C_G(xy) < C_G(x)$ 或 $C_G(x) < C_G(y)$，$p \mid |C_G(y)| / |C_G(x)|$.

〈2〉 $C_G(xy) < C_G(y)$，$p \mid |C_G(y)| / |C_G(xy)|$.

证　$\forall\ g \in C_G(xy)$ 有 $(xy)^g = xy$. 由 $xy = yx$ 知 $x^g y^g = y^g x^g$，故 $(g^{-1}yg)^{|x|} = (g^{-1}yxg)^{|x|} = (xy)^{|x|} = y^{|x|}$，又 $(|x|, |y|) = 1$，于是 $g^{-1}yg = y$，$g \in C_G(y)$. 同理 $g \in C_G(x)$. 故 $C_G(xy) \leqslant C_G(x) \cap C_G(y)$，而显然有 $C_G(x) \cap C_G(y) \leqslant C_G(xy)$. 从而 $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y)$.

若 $p \nmid |x|$，$p \mid (|C_G(x)|, |C_G^x|)$，$\overline{S}_p \in sy \mid p(C_G(x))$，$S_p \in Sy \mid pG$，则 $|\overline{S}_p| < |S_p|$. 由 Sylow 定理 G 有 $p|\overline{S}_p|$ 阶子群 P 使 $\overline{S}_p \Delta P$，从而存在 $y \in Z(p) \cap \overline{S}_p$，$y \neq 1$. 于是 $P \leqslant C_G(y)$. 因为 $x \in C_G(y)$ 有 $C_G(y) \not\subseteq C_G(x)$，$C_G(xy) < C_G(y)$. 另外 $C_G(x) < C_G(y)$ 或 $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y) < C_G(x)$ 成立。因 $\overline{S}_p \Delta P$，$C_G(xy)$ 的 p-Sylow 子群阶 $\leqslant |\overline{S}_p|$ 有 $p \mid C_G(y)| / |C_G(xy)|$. 且当 $C_G(x) <$

$C_G(y)$ 时有 $p\,|\,|C_G(y)|/|C_G(x)|$。

引理 1.3　一个有限群称为 p 孤立的，若 G 仅含 p - 元或 P' - 元。p 为质数，若 $Z(G)=1$，则 G 为 p 孤立，$|G|=p^{\alpha}n$ 的充要条件是 $N(G)=\{1,p^{\alpha}m_1,\cdots,p^{\alpha}mt,p^{\beta 1}n,\cdots,p^{\beta s}n,n\}$，其中 $t\geqslant 1,s\geqslant 0,m_i$ 是 n 的真因子 $i=1,2,\cdots,t$；$1\leqslant\beta_j<\alpha$，$j=1,2,\cdots,s$；$(p,n)=1$。

证　必要性显然。

充分性：由 $Z(G)=1$ 知，对 $\forall\ 1\neq x\in G$ 有 $|C_G^x|>1$。

对 $1\neq x\in Z(S_p)$，$S_p\in Syl_pG$ 有 $S_p\leqslant C_G(x)$，$p\nmid|C_G^x|$，$|C_G^x|=n$. 如果 $C_G(x)$ 不是 p 群，则存在 $q\in\pi(C_G(x))$，$q\neq p$. 若 $q\nmid n$，则因 $m_i|n,1\leqslant i\leqslant t$ 有 $q\nmid a,\forall\ a\in N(G)$ 成立。由引理 1.1 知 $q\nmid|G|$，矛盾。因此 $q|n$. 于是 $C_G(x)$，q 适合引理 1.2 的条件，故存在 q 元 $y\neq 1,y\in C_G(x)$使 $C_G(xy)<C_G(x)$，$C_G(xy)<C_G(y)$，$q\,|\,|C_G(y)|/|C_G(xy)|$ 或 $C_G(x)<C_G(y)$，$q\,|\,|C_G(y)|/|C_G(x)|$. 如果前者成立，则 $|C_G^{xy}|=|C_G^x|\cdot\dfrac{|C_G(x)|}{|C_G(xy)|}=n\cdot\dfrac{|C_G(x)|}{|C_G(xy)|}$，$|C_G^{xy}|=|C_G^y|\cdot\dfrac{|C_G(y)|}{|C_G(xy)|}$. 于是从 $N(G)$ 的定义知 $n\,\|\,|C_G^{xy}|$. 但 $q|n,q\,|\,\dfrac{|C_G(y)|}{|C_G(xy)|}$. 因此 $n\nmid|C_G^y|$. 又由 $N(G)$ 的定义有 $p^{\alpha}\,|\,|C_G^y|$，故 $p^{\alpha}\,|\,|C_G^{xy}|$. 由 $(p,n)=1$ 知 $p^{\alpha}n\,|\,|C_G^{xy}|$，矛盾。如果后者成立，则由 $n=|C_G^x|=|C_G^y|\cdot\dfrac{|C_G(y)|}{|C_G(x)|}$ 知 $|C_G^y|\,|\,n$，$|C_G^y|<n$，与 $N(G)$ 之定义矛盾。故 $C_G(x)$ 是 p 群 $|G|=p^kn,k\geqslant\alpha$。

若 $k>\alpha$，取 $1\neq x\in G,p\nmid|x|$，则 $n\nmid|C_G^x|$，设 $|C_G^x|=p^{\alpha}m_i$，那么 $|C_G(x)|=p^{k-\alpha}v$，$v=\dfrac{n}{m_i}$. 故 $p\,|\,(|C_G(x)|,|C_G^x|)$，由引理 1.2，存在 p 元 $y\in C_G(x),y\neq 1$ 使 $C_G(xy)<C_G(y)$，$p\,|\,|C_G(y)|/|C_G(xy)|$. 于是 $|C_G^{xy}|=|G_G^y|\cdot\dfrac{|C_G(y)|}{|C_G(xy)|}$，$p\,|\,|C_G^{xy}|$，且 $|C_G^{xy}|$ 中 p 的指数大于 $|C_G^y|$ 中 p 的指数。那么 $p^{\alpha}+|C_G^y|$. 由 $N(G)$ 的定义知 $n\,|\,|C_G^y|$，故 $n\,|\,|C_G^{xy}|$. 再由 $C_G(xy)\leqslant C_G(x)$ 知 $|C_G^x|\,|\,|C_G^{xy}|$. 故 $p^{\alpha}\,|\,|C_G^{xy}|$，$p^{\alpha}n\,|\,|C_G^{xy}|$，矛盾。因此 $k=\alpha$，$|G|=p^{\alpha}n$. 此时由 $N(G)$ 之定义，对 $1\neq x\in G$，$C_G(x)$ 为 p 群或 p' - 群，故 x 是 p 元或 p' - 元，G 为 p 孤立的。

推论 1.2　若 G 为有限群，$Z(G)=1$，M 为非 Abel 单群且有 $p\in\pi(M)$，使 Mp 孤立，$N(G)=N(M)$，则 $|G|=|M|$。

引理 1.4　设 G_1、G_2 为有限群，$|G_1|=|G_2|$，$N(G_1)=N(G_2)$，则 $t(G_1)=t(G_2)$，G_1、G_2 的素图分量作为顶点集对应相等。

证　〈1〉对群 G，若 $x\in G,\pi(|x|)\subseteq$ 某 π_i，则 $\pi(C_G(x))\subseteq\pi_i$。事实上若有 $p\in\pi(C_G(x))\backslash\pi_i$，则存在 $y\in C_G(x)\,|y|=p$ 使$[x,y]=1$，$|xy|=|x|\cdot|y|=p\cdot|x|$. 那么 $\pi_i\cup\{p\}$ 连通，矛盾 。

〈2〉设 $T(G_1)=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_S\}$，$T(G_2)=\{\pi'_1,\pi'_2,\cdots,\pi'_t\}s=t(G_1)$，$t=t(G_2)$，则每 π_i 至少含一个 $\pi'j$.

事实上，取 $p\in\pi_i$，由 $|G_1|=|G_2|$ 知，存在 π'_j 使 $p\in\pi'_j$. 因 $\pi(G_1)=\pi(G_2)=\pi_1\cup\pi_2\cup\cdots\cup\pi_S$，所以存在 $\pi_{i1}=\pi_i,\pi_{i2},\cdots,\pi_{ik}$. 使 $\pi'_j\subseteq\pi_{i1}\cup\pi_{i2}\cup\cdots\cup\pi_{ik}$，$\pi_{ik}\cap\pi'_j\neq\phi$，$1\leqslant l\leqslant k$. 若 $k=1$，则〈2〉成立。若 $k\geqslant 2$，由素图分量之定义 π'_j 连通知 $\pi_j\cap\pi_{i1}$ 中有顶点(不妨设 p) 与 π_{i1} 之外的某 π'_j 的顶点有连线，不妨设是 qq、$\in\pi'_j\cap\pi_{il}$，$1<l\leqslant k$. 故 G_2 有 pq 阶元 x，$\pi(|x|)\subseteq\pi'_j$. 由(1) 知 $\pi(C_{G2}(x))\subseteq\pi'_j$. 因 $N(G_1)=N(G_2)$，所以存在 $X'\in G_1$ 使 $|C_{G_1}^{X'}|=|C_{G2}^X|$，由 $|G_1|=|G_2|$ 知 $|C_{G1}(x')|=|C_{G2}(x)|$. 由〈1〉知存在 $\pi_r\in T(G_1)$ 使 $\pi(C_{G1}(x'))\subseteq\pi_r$. 那么 $p,q\in\pi(C_{G2}(X))\subseteq\pi(C_{G_1}(x'))\subseteq\pi_r$. 但 $p\in\pi_{il}$，$q\in\pi_{il}$，$\pi_{il}\neq\pi_{il}$，矛盾。故 $k=1$，

$\pi'_j \subseteq \pi_i$.

〈3〉同〈2〉可证每 π'_j 至少含一个 π_k.

〈4〉对每 π_i,由〈2〉有 π'_j 使 $\pi'_j \subseteq \pi_i$. 由〈3〉存在 π_k 使 $\pi_k \subseteq \pi'_j$。故 $\pi_i \supseteq \pi'_j \supseteq \pi_k$,由素图分量的定义知 $\pi_i = \pi_k, \pi_i = \pi'_j$. 因此 $\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s\} \subseteq \{\pi'_1, \pi'_2, \cdots, \pi'_t\}$,同理有 $\{\pi'_1, \pi'_2, \cdots, \pi'_t\} \subseteq \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s\}$,故结论成立。

若 G 是有限群,$\pi = \pi_1$,$S_\pi(G)$ 为 G 的极大 π 可解正规子群,$S^\pi(G)$ 是含 $S_\pi(G)$ 使 $G/S_\pi(G)$ 为 π 可解群的极小正规子群,如下引理成立。

引理 1.5　若 G 为有限群,$t(G) \geqslant 2$,则

(a) G 为 Frobenius 或 2-Frobenius 群。

(b) $S_\pi(G)$ 为幂零 π- 群,$G/S^\pi(G)$ 为 π- 群,$S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 为非 Abel 单群且是 $G/S_\pi(G)$ 的唯一极小正规子群,$\pi(S^\pi(G)/S_\pi(G)) \subseteq \pi(G)$,$G$ 的非 2 分量是 $S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 的非 2 分量。

证　除(b) 最后一点外,其余结论是文献[2] 中的引理 1,2,3。

若 $T(G) = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_t\}$,$t = t(G)$,则 $\pi(S^\pi(G)/S_\pi(G)) \subseteq \pi(G) = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \cdots \cup \pi_t$. 如果对 $p \in \pi_i, q \in \pi_j, i \neq j$,若 $S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 有 pq 阶元,则 G 也有。这与 π_i, π_j 不连通矛盾。故 $\pi_2, \pi_3, \cdots, \pi_t$ 作为 $S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 的素图顶点集不连通。另外对每 π_i,$2 \leqslant i \leqslant k$,若 p、$q \in \pi_i$ 之间有连线,则 G 有 pq 阶元 y。因 $\pi(S_\pi(G)) \subseteq \pi_1$,$\pi(G/S^\pi(G)) \subseteq \pi_1$,有 $y \in S^\pi(G)$,$S_\pi(G) \cap \langle y \rangle = 1$。从而 $S_\pi(G)y$ 是 $S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 的 pq 阶元。即 p, q 作为 $S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 素图之顶点有连线。从而 π_i 是 $S^\pi(G)/S_\pi(G)$ 的素图分量。证毕。

2　离散单群刻划

引理 2.1　若 G 为限群,$Z(G) = 1$,M 为:$M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}, J_2, J_3, HS, Th, Ru, He, McL, C_{01}, C_{02}, C_{03}, F_{22}, F_{23}, HN, S_2$. 使 $N(G) = N(M)$,则 $\mathrm{Sol}G = 1$。

证　由文献[2] 知 M 的非 2 分量全是孤立点,由推论 1.2 知 $|G| = |M|$. 若 $\mathrm{Sol}G \neq 1$,设 N 是 G 的极小正规子群,$N \leqslant \mathrm{Sol}G$,则 $|N| = p^i, p \in \pi(G)$. 如果 $|N| < \mathrm{Min}\{N(M)\backslash 1\}$,则因正规子群是 G 的完整共轭类的并有 N 为长 1 的共轭类并。故 $N \leqslant Z(G)$. 但 $Z(G) = 1$,矛盾。由文献[4] 离散单群的元的中心化子阶已列出,计算知除 C_{02}, F_{22}, F_{23} 外都有 $|N| \leqslant \mathrm{Min}\{N(G)\backslash 1\}$,其中 $|N|$ 总 $\leqslant M$ 的最大阶 Sylow 子群的阶。

若 $M = C_{02}$,则 $|N| \leqslant 2^{18} = 262\ 144$,$\mathrm{Min}\{N(C_{02})\backslash 1\} = 56\ 925$,$\mathrm{Min}\{N(C_{02})\backslash\{1, 56\ 925\}\} = 1\ 024\ 650$. 由 $|C_{02}| = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ 知,如果 $|N| = p^i, p \geqslant 3$,则 $|N| \leqslant 3^6 < 56\ 925$. 故 $N \leqslant Z(G)$,矛盾。如果 $|N| = 2^i, i \leqslant 15$,则 $|N| \leqslant 32\ 768 < 56\ 925$,仍有 $N \leqslant Z(G)$,矛盾。若 $|N| = 2^{16} = 65\ 536$,由 $Z(G) = 1$ 知 N 恰含 1 个长 1 的共轭类,而 $|N| < 1\ 024\ 650$,故 $|N| = 1 + 56\ 925k$. 但 $56\ 925 \nmid 65\ 535$,矛盾。同样证 $|N| = 2^{17}, 2^{18}$ 两情况。类似地可证 $M = F_{22}, F_{23}$ 时,也有 $\mathrm{Sol}G = 1$. 证毕。

定理 2.1　若 G 为有限群,$Z(G) = 1$,M 为离散单群,$N(G) = N(M)$,则 $G \cong M$。

证　〈1〉由文献[2] 知离散单群 M 总有 $p \in \pi(M)$ 使 M 为 p 孤立,由推论 1.2 知 $|G| = |M|$. 再由引理 1.4 有 $t(G) = t(M)$,$T(G) = T(M)$. 进而由文献[2] 知 $\pi_i^G (= \pi_i^M, i \geqslant 2)$ 恰含一个质数 p_i,$p_i \parallel |G|$.

〈2〉 G 不是 Frobenius 群和 2-Frobenius 群。

当 $t(G)=t(M)=2$ 时，由文献[2] $M=M_{12},J_2,McL,Ru,He,C_{01},C_{03},F_{22},HN$. 由引理 2.1 知 $\mathrm{Sol}G=1$，故〈2〉成立。

当 $t(G)=t(M)\geqslant 3$ 时，由文献[2]定理 A 及其推论知 G 不可解。若 G 是 2-Frobenius 群，即 G 有正规列 $G>k>H>1$ 使 $k,G/H$ 分别是以 $H,K/H$ 为 Frobenius 核的 Frobenius 群。故 H 幂零，$\pi(H)\subseteq\pi_i,\pi_i\in T(G)$.

① 若 $i\geqslant 2$，由〈1〉$\pi_i=\{p_i\},p_i\parallel |G|$，故 $|H|=p_i,p_i\in\pi(G)$，因 Frobenius 核的每元的中心化子含于核，有 $C_k(H)=H,K/H\leqslant \mathrm{Aut}H=Z_{p_i}-1,K/H$ 循环。同理 $G/H/K/H\leqslant \mathrm{Aut}K/H,\mathrm{Aut}K/H$ 可换，从而 G 可解，矛盾。

② 若 $i=1$，我们证 $\pi(K/H)\cap\pi_1=\phi$. 否则 $\pi(K/H)\cap\pi_1\neq\phi$，因为 Frobenius 核是 Hall 子群，所以 H 是 K 的 Hall 子群，K 是 G 的 Hall 子群。$\pi_1=\pi(H)\cup(\pi(K/H)\cap\pi_1)\cup(\pi(G/K)\cap\pi_1),\pi(H),\pi(K/H)\cap\pi_1,\pi(G/K)\cap\pi_1$ 两两不相交。由 π_1 连通知：$\pi(K/H)\cap\pi_1$ 与 $\pi(H)$ 或与 $\pi(G/K)\cap\pi_1$ 连通。若为前者，则有 $p\in\pi(K/H)\cap\pi_1,q\in\pi(H)$ 使 K 有 pq 阶元 x。由 $H\lhd\lhd G$ 知 $x\notin H,x^p\in H$。故 $C_G(x^p)\nsubseteq H,x\in C_G(x^p)$，矛盾于 H 为核。若为后者，则有 $p\in\pi(K/H)\cap\pi_1,q\in\pi(G/K)\cap\pi_1$ 使 G 有 pq 阶元 x。故 $|Hx|=pq$. 由 G/H 是 K/H 为核的 Frobenius 群同前导矛盾。因此 $\pi(K/H)\cap\pi_1=\phi,\pi(K/H)\subseteq\pi_2\cup\cdots\cup\pi_t,t=t(G)$. 由〈1〉知 $|K/H|\,|\,p_2p_3\cdots p_t(\pi_i=\{p_i\},v=2,\cdots,t)$. 由 $K/H1$ 幂零知 K/H 循环。仿 ① 知 G/H 可解，进而 G 可解，矛盾。G 不是 2-Frobenius 群。同理 G 不是 Frobenius 群。

由〈2〉和引理 1.5 有

〈2〉′ G 有正规列 $1\leqslant H<K\leqslant G,H,G/K$ 分别是幂零 π_1 群和 π_1 群，K/H 为非 Abel 单群，$\pi(K/H)=\pi(G),\{\pi_2,\cdots,\pi_t\}\subseteq T(K/H),\pi_i=\{p_i\},p_i\in\pi(G),2\leqslant i\leqslant t,p_i\parallel |G|$. 且 $\mathrm{Max}(K/H)=\mathrm{Max}\pi(G)=\mathrm{Max}\pi(M),t(K/H)\geqslant t(G)$.

〈3〉 当 $t(M)\geqslant 4$ 时，证 $G\cong M$.

此时 $t(G)\geqslant 4,t(K/H)\geqslant 4$. 由 $q^{63}\,|\,|E_7(q)|,q^{120}\,|\,|E_8(q)|$ 及文献[4]中 $|M|$ 之形式知，$K/H\neq E_7(q),E_8(q)$. 由 $t(K/H)\geqslant 4$ 及文献[2,3]知，K/H 如果不是离散单群，则 $K/H=A_2(4);{}^2B_2(2^{2m+1}),m\geqslant 1;{}^2E_6(2)$. 由文献[2] $t(M)\geqslant 4$ 之 M 使 $\mathrm{Max}\pi(M)\geqslant 11$，但 $\mathrm{Max}\pi(A_2(4))=7$，故 $K/H\neq A_2(4)$. 若 $K/H={}^2E_6(2)$，由〈2〉′知 $\mathrm{Max}\pi(M)=\mathrm{Max}\pi({}^2E_6(2))=19$. 由[4]阶表知 $M=J_1$，但 $13\,|\,|{}^2E_6(2)|,13\nmid |J_1|$，矛盾。故 $K/H\neq{}^2E_6(2)$. 因 $t({}^2B_2(2^{2m+1}))=4$，若 $K/H={}^2B_2(2^{2m+1})$，由〈1〉、〈2〉′知 $t(M)=t(G)=t(K/H)=4$ 故 $T(K/H)\backslash\pi_1^{K/H}=T(M)\backslash\pi_1=T(M)\backslash\pi_1$. 由文献[3] $T({}^2B_2(2^{2m+1}))=\{\{2\},\pi(2^{2m+1}-1),\pi(2^{2m+1}-2^{m+1}+1),\pi(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)\}$. 由文献[2] $\pi_1^M\neq\{2\}$. 故 $K/H\neq{}^2B_2(2^{2m+1})$. 因此 K/H 是离散单群，由〈2〉′有 $\{\pi_2^G,\cdots,\pi_t^G\}\subseteq T(K/H)$，由〈1〉$T(G)=T(M)$，故 $\{\pi_2^M,\cdots,\pi_t^M\}\subseteq T(K/H)$. 由文献[2] $t(M)\geqslant 4$ 的不同的离散单群的非 2 分量集互不包含，那么 $K/H=M$。故 $G\cong M$.

〈4〉 当 $t(M)=3$ 时，证 $G\cong M$.

此时 $t(K/H)\geqslant t(G)=3$，同〈3〉知 $K/H\neq E_7(q),E_8(q)$. 若 K/H 不是离散单群。由文献[2,3]知 K/H 可能为：$A_1(2^m),A_2(2),{}^2A_5(2),{}^2D_{p+1}(2),(p=2^m-1,m\geqslant 2),F_4(2^m),{}^2F_4(2^{m+1})(m\geqslant 1),A_2(4){}^2B_2(2^{2m+1})(m\geqslant 1),{}^2E_6(2),A_5,A_6,A_p(p,p-2$ 为质数$),A_1(q)(q=p^m,p$ 为奇质数$),G_2(2^m),{}^2G_2(3^{2m+1})(m\geqslant 1),{}^2D_p(3^2)(p=2^n+1,n\geqslant 2)$.

(a) 因 $t(M)=3$,由文献[4]阶表知 $11\leqslant \mathrm{Max}\pi(M)\leqslant 13$,故 $K/H\neq A_2(2),A_2(4),A_5,A_6$。若 $K/H={}^2A_5(2)$,由〈2〉$'\mathrm{Max}\pi(M)=\mathrm{Max}({}^2A_5(2))=11$. 由[4]阶表及 $t(M)=3$ 知 $M=M_{11},HS$. 但 $2^{15}\,|\,|{}^2A_5(2)|,2^{15}\nmid|M_{11}|,2^{15}\nmid|HS|$,矛盾。故 $K/H\neq{}^2A_5(2)$. 同理 $K/H\neq{}^2E_6(2)$.

(b) 若 $K/H={}^2B_2(2^{2m+1})$,由 $T({}^2B_2(2^{2m+1})=\{\{2\},\pi(2^{2m+1}-1),\pi(2^{2m+1}-2^{m+1}+1),\pi(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)\}$ 和〈2〉$'$ 知 $\pi(2^{2m+1}-1),\pi(2^{2m+1}-2^{m+1}+1),\pi(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)$ 中有两个属于 $T(G)\backslash\pi_1$。由〈2〉$'$ 知 $2^{2m+1}-1,2^{2m+1}+2^{m+1}+1$ 之一为质数且 $\leqslant 47$。故 $m\leqslant 2$, $2m+1=3,5$。但 $\mathrm{Max}\pi({}^2B_2(2^5))=41$,由文献[2,4]知无 M 使 $t(M)=3,\mathrm{Max}\pi(M)=41$. 与〈2〉$'$ 矛盾。故 $K/H\neq{}^2B_2(2^5)$. 同理有 $K/H\neq{}^2B_2(2^3)$.

(c) 若 K/H 为余下的群,则 $t(K/H)=3$,故 $t(K/H)=t(G)=t(M)$。由〈1〉,〈2〉$'$ 知 K/H 的非 2 分量只能为质数且恰整除 $|G|$。注意 $\mathrm{Max}\pi(M)\leqslant 47$. 依次考虑除 $A_1(q)$(q 为奇)外的群的最大的素图分量可导出矛盾。若 $K/H=A_1(q)$,q 为奇。由文献[2]知 $\pi_2{}^{A_1(q)}=\pi\{q\}$,故 q 为质数且 $\leqslant 47$。若 $t(M)=3,M\neq M_{11}$,则由文献[2]$\{2,3,5\}\subseteq\pi_1$. 因 $T(K/H)=T(M)$,由引理 2.1 有 H_1 进而 $\{2,3,5\}\subseteq\pi_1{}^{A_1(q)}$。而 $\pi_1{}^{A_1(q)}=\pi\{q-1\}$ 或 $\pi\{q+1\}$. 那么 $2\times3\times5\,|\,q-1,2\times3\times5\,|\,q+1$. 但 $q+1\leqslant 48$,矛盾。若 $M=M_{11}$,则 $\mathrm{Max}\pi(M_{11})=11$. 由 $\mathrm{Max}\pi(A_1(q))=q$,有 $q=11$。由引理 2.1 知 $\mathrm{Sol}G=1.9H=1,K=A_1(11)/$ 由 Frattini 推理知 $G=N_G(S_{11})\cdot K$。但 G 是 11 孤立,故 $C_G(S_{11})=S_{11},N_G(S_{11})/S_{11}=\dfrac{N_G(S_{11})}{C_G(S_{11})}\leqslant \mathrm{Aut}S_{11}\leqslant Z_{10}$. 故 $|G/K|\,|\,10$。但 $|G|=|M|,|M_{11}|/|A_{1(11)}|=2^2\cdot3$,矛盾。故 $K/H\neq A_{1(q)}$,q 为奇。

(d) 由(a)—(c) 知 K/H 为离散单群。仿(c)段末证明知:对 $p_i\in\pi_i^G,i\geqslant 2$,因 G 是 p_i 孤立,$p_i\,\|\,|K|$,所以 $|G/K|\,|\,p_i-1$.

(e) 若 $M=B$,则 $\pi_2=\{31\},\pi_3=\{47\},\mathrm{Max}(K/H)=\mathrm{Max}\pi(M)=47$. 由〈2〉$'$ 知 $\{31\},\{47\}\in T(K/H)$. 由文献[2]知 $K/H=B$. 故 $G\cong B$. 同理证 $M=J_3,S_z,F_{22}$ 时有 $G\cong M$.

若 $M=HS$,则 $\pi_2=\{7\},\pi_3=\{11\},\mathrm{Max}\pi(K/H)=\mathrm{Max}\pi(M)=11$. 由文献[2]知 $K/H=M_{22},HS$. 由引理 2.1 及〈2〉$'$ 知 $H=1$. 故 $K=M_{22},HS$. 若 $K=M_{22}$,由〈d〉知 $|G|/|M_{22}|\,|\,10$. 但 $|G|=|HS|,|HS|/|M_{22}|=2^2\cdot5^2$,矛盾。故 $K=HS,G\cong HS$,同样证 $M=M_{11},M_{23},M_{24},C_{02},Th$ 时有 $G\cong M$.

(5) 当 $t(M)=2$ 时,证 $G\cong M$。

(a) 此时 $M=M_{12},J_2,Ru,He,M^CL,C_{01},C_{03},F_{22},HN$,故 $|M|<10^{20},\mathrm{Max}\pi(M)=7,11,13,19,23,29$. 由引理 2.1,〈2〉$'$ 知 $H=1$.

(b) 证 $K\neq A_1(q)(|A_1(q)|\geqslant 10^6),A_2(q),(|A_2(q)|\geqslant 10^{12}),A_3(q)(|A_3(q)|\geqslant 10^{16})$, ${}^2A_3(q)(|{}^2A_3(q)|\geqslant 10^{12}),{}^2A_4(q)(|{}^2A_4(q)|\geqslant 10^{16}),S_4(q)(|S_4(q)|\geqslant 10^{16})$ 证明方法同〈4〉,这就略去。

(c) 除〈b〉中列出的 Lie 型单群外,阶 $<10^{20}$ 的有限非 Abel 单群在文献[4]末已列出。利用 $\mathrm{Max}\pi(K)=\mathrm{Max}\pi(M),\mathrm{Max}\pi(M)\,\|\,|G|$. 即得 $\mathrm{Max}\pi(K)\,\|\,|K|,|K|\leqslant|G|\leqslant|M|$,直接查表比较阶即可证得 $G\cong M$.

如当 $M=M_{12}(2^6\cdot3^3\cdot5\cdot11)$ 时,K 可能为 $M_{11}(2^4\cdot3^2\cdot5\cdot11),M_{12},L_2(11)(2^2\cdot3\cdot5\cdot11)$. 由〈4〉〈d〉知 $|G/K|\,|\,10,|G|\,|\,10|K|$。故 $|G|=|M_{12}|\Leftrightarrow K=M_{12}\Leftrightarrow G\cong M_{12}$. 定理证毕。

用同样的方法还可处理 M 为已知的 C_{pp} 群的情况。我们目前已验证了 $M=L_2(q)$，$A_p(p_1p-2$ 为质数) 等情况。

本文写作中得到导师陈敬穆教授、施武杰教授精心指导，在此一并致谢。

参考文献

1 Shi Wujie and Bi Jianxing, A Charactevistic property of each finite projective special linear group. Lecture Notes in Math. 1456, Springer-verlag, 1990, 171-180.

2 Williams J. S. Prime graph components of finite groups. J. Alg. 69(1981), 487-513.

3 A. S. Kondratěv Prime graph components of finite simple groups, Math. USSR Sbornik 67(1990), 1, 235-247.

4 Conway J. H. *et al.*, Atlas of finite groups.

作者简介 陈贵云，1963 年 12 月 17 日出生。1983 年 7 月毕业于西南师范大学数学系。1985 年 9 月考入西南师范大学攻读基础数学硕士学位，1987 年 7 月毕业，获硕士学位。此后留校工作。从事过专科、本科、助教班等教学工作，同时在“群论”方面作研究工作。现为四川大学基础数学专业代数学方向博士研究生。著有学术论文九篇，其中五篇在国内外杂志上发表或被录用，有一篇被四川省科协评为(1991 年)“优秀学术论文”。

等谱 Lax 算子代数及其对可积系统的应用

马　文　秀

（复旦大学数学研究所　博士后）

摘要　本文旨在给出 Lax 算子方法的理论基础。对一个任意的矩阵微分型谱算子，在揭示其 Gateaux 导数算子性质的基础上，建立了一种相应的等谱 Lax 算子空间的代数结构，并表明了 Lax 算子的这种乘积算子伴随于特征向量场的换位子。进一步引进了 τ-代数和主代数的概念来描述可积系统的时间依赖对称，这种 τ-代数和主代数在 Lax 算子方法中起着类似于递推算子方法中递推算子的决定性作用。我们的 Lax 算子理论可广泛适用于各种可积系统的代数性质的讨论和新的可积系统的生成之中，这里指的可积系统可包括任意维的即 $p+1(p\geqslant 1)$ 维的，因此统一了 1+1 维和 2+1 维的代数理论。在本文中，作为一个说明性的例子，我们仅将应用到 2+1 维的 KP 族可积系统情形。通过我们的方法，生成了 KP 族的一个 τ-代数和一个主代数，并且获得了 KP 族显式的无限多 K-对称和无限多各阶主对称。

1　引　言

许多 1+1 维的非线性可积系统均具有一些公共的特征：Lax 表示、无穷多对称和守恒律、双 Hamilton 结构等等（参见文献[1—3]）。一种具有遗传性质的递推算子在讨论这些公共性质时起着决定性的作用。最近 Santini 和 Fokas[4,5] 把递推算子理论扩展到 2+1 维可积系统，特别地他们对几个 2+1 维可积系统发现了递推算子的高维类似算子[6,7]，这种算子被称为扩张递推算子，然而对一个给定的 2+1 维方程不容易构造一个能够接纳双 HamiHon 分解的扩张递推算子，避开这个困难，对一些特殊的可积系统，程艺、李翊神和 Bullough[8-11] 提出了一个 Lax 算子的直接方法来讨论相应的代数性质，这个方法基于 Fnchssteiner、Fokas 和 Chen 等的主对称方法的思想[12-18]。我们通过揭示矩阵微分算子的一个 Gateaux 导数算子的性质，推广 Lax 算子方法到伴随于一般谱算子的可积系统，此文的 Lax 算子理论既适用于 1+1 维的也适用于 2+1 维的可积系统。

本文从 Lax 表示出发，对任意维的谱算子分析和提出了 Lax 算子空间所具有的一种代数结构，表明了 Lax 算子的这种乘积算子 E 好对应特征向量场的换位子并给出了 Lax 算子空间的一个商李代数结构。进一步引进了 τ-代数和主代数的概念来描述可积方程的时间多项式依赖对称，这种 τ-代数和主代数在 Lax 算子方法中起着类似于递推算子方法中的递推算子的作用。最后作为例子对 KP 系统族进行了讨论，给出了相应的 τ-代数和主