21世纪大学数学精品教材

高等代数典型问题精讲

——思想·方法·技巧

王积社　杨晓鹏　编著

科学出版社
www.sciencep.com

（O-3907.0101）

ISBN 978-7-03-027666-7

9 787030 276667 >

ISBN 978-7-03-027666-7
定 价：28.00元

21世纪大学数学精品教材

高等代数典型问题精讲

——思想·方法·技巧

王积社　杨晓鹏　编著

☆ 突出创造思想

☆ 展现思维方法

☆ 深化解题技巧

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书深入研究了矩阵的哈密尔顿-凯莱定理、矩阵的最小多项式、λ矩阵、矩阵的相似理论、矩阵的有理标准、若尔当标准形、矩阵的满秩分解、简单的矩阵方程、矩阵乘积的行列式等理论及其应用，全面论述了矩阵相似对角化的各种问题的证题方法，系统分析了多项式内容中几类重要问题的证题方法。

本书的编写打破了传统的理论灌输模式，采用在问题研究的过程中创造和生成相关的概念及结论的方式，突出创造思想，展现思维方法，深化解题技巧，同时还采用逻辑图表的方式直观地表述思维过程，有益于解题能力的提高，有益于数学素质的提升，有益于创新能力的培养。

书中含有的大量例题和习题基本上都精选自往年的考研试题。本书可以作为数学专业"高等代数选讲"课程的教材，也可作为数学专业"高等代数"课程的教学参考书，还是考研数学之高等代数或线性代数的优秀学习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数典型问题精讲——思想・方法・技巧/王积社，杨晓鹏编著. 一北京：科学出版社，2010. 6

(21世纪大学数学精品教材)

ISBN 978-7-03-027666-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①王…②杨… Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第092461号

责任编辑：高 嵘 / 责任校对：安 凌

责任印制：彭 超 / 封面设计：宝 典

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010年6月第一次印刷 印张：14 3/4

印数：1—2 000 字数：276 000

定价：28.00元

本书得到韩山师范学院教材出版基金资助

FOREWORD 前言

高等代数是数学本科专业的三门主干基础课程之一，又是基础数学、应用数学专业硕士研究生招生考试必考的两门核心课程之一。它的思想丰富，但是理论抽象，解题方法与技巧灵活多变，致使初学者和考研学生都会对该门课程的知识内涵和解题方法感到有不同程度的困难。然而在高等代数教材及课程中，学生只是学习了最基本的知识，一些重要的内容(如 λ 矩阵、矩阵的相似理论、矩阵的相似标准形、哈密尔顿-凯莱定理、最小多项式等)以及高等代数的思想方法，都不可能深入学习、理解与领会。但是这些却是非常重要的，既是考研数学的必备基础，又是数学后继学习、研究与应用的基础。所以无论是为了研究及应用，还是为了考研而深造，进一步充实与深化高等代数知识，进一步领悟与掌握高等代数思想方法，无疑是十分必要且重要的。

本书意在充实与深化高等代数课程的内容，旨在提高学生的数学学习、研究及创新能力，提高学生的高等代数解题能力。所以本书既是“高等代数选讲”课程的优秀教材，又是考研数学之高等代数或线性代数的精品指导书，也是“高等代数”课程良好的教学参考书。

本书具有以下特色：

特色 A：突破灌输模式，实现返璞归真。

我国现行的高等数学教材基本上都是“定义→性质→定理→例题”的纯

理论模式，这种模式作为数学理论的表述堪为精湛，但是作为教材，却极不利于数学素质的提高和创新能力的培养。如此评说，是因为它直接告诉定义、性质、定理而舍去了数学的生成过程，使学生只看到庞大而复杂的数学机器，却得不到发明这台机器的真谛，只会做从已知到求证的游戏，却不会做从已知到未知的探索，更不想从未知到未知的创造，于是学生只会机械地理解、记忆和模仿，却丧失了数学精神和数学创造能力；是因为它只强调知识系统化，不注重知识的内在联系和发展关系，把相关的知识人为地割裂开来，破坏了真实的、必然的知识生成过程和思维的发展过程，结果使学生只看见树木而看不见森林，从而丧失了认识知识和研究问题的整体思维能力；是因为它注重理论灌输而轻视应用实践，使数学成为无根之木而更加抽象难懂，因此不仅使学生失去了数学的应用能力，而且使学生产生了惧学、厌学等不良行为。

根据过程哲学与生成哲学理论及作者多年的教学经验，作者倡导"过程＋生成"教学：知识是生成过程，是在一定条件下从无到有或从有到有的生成过程；教材是描述知识的生成过程及由此形成的知识结构的动态文本；教学是由教师、学生及相关因素和信息组成的动态的知识生成过程；学习是学生在知识生成过程中创造自我、获取知识、激发创新能力的活动。

所以本书的编写改变了传统的灌输模式，书中所提及概念与结论，如 λ 矩阵、矩阵的相似理论、矩阵的有理标准形、若尔当标准形、哈密尔顿-凯莱定理、最小多项式等，都是从某个问题，或者从某种需要的开始思考，在研究问题的过程中生成的，达到了返璞归真的目的。

例如，关于若尔当标准形，一般教材都是直接定义若尔当块，直接给出若尔当标准形定理再予以证明，因此学生面对若尔当标准形总有许多神秘与困惑，更不可能体会到它的理论、思想、方法的意义，至多只是记住了其结论而模仿解题。但本书是在研究问题"寻找向量空间 V 的一个基，使其线性变换关于此基的矩阵尽可能简单"的过程中，发现了问题的解决需要研究含有字母 λ 的矩阵，于是首先定义了 λ 矩阵，研究了 λ 矩阵的性质，推得了矩阵相似的充要条件及矩阵的有理标准形，进而为了弥补有理标准形的不足又推得了若尔当标准形。

与此类似，本书中呈现出许多探索、发现、创生数学知识的过程，通过这些过程，生成了所需要的知识系统，体现了数学思想、数学思维、数学方法。希望读者在学习中不要只是注意概念或结论，而更应该注重这些研究过程。

特色 B：注重思路分析，强化解题方法。

为提高学生解决问题（或考研解题）的能力，本书注重解题思路分析。一方面书中对若干典型例题作出了详细的思路分析，另一方面则采用"方法驱动问题"与"问题驱动方法"两种基本方式帮助读者梳理解题思路。

书中的专题 1 至专题 3、专题 5 至专题 10 中选取往年的考研试题，以"方法驱动问题"方式说明本专题理论在解题中的应用。

书中的专题 4、专题 11 以"问题驱动方法"的方法，选取往年的考研试题，分别综述了矩阵相似对角化问题、多项式问题的证题方法。

因为每个人的思维方式不同，所以本书只是一种示范，读者并非要记忆本书的拙言，而应该类似地打造自己的数学头脑。

特色 C：设计逻辑图表，展现思维过程。

数学问题的研究思路是复杂的，所以如果只用自然语言去表达数学的思维过程，往往是阅读耗神、理解累人，并且很难在读者的头脑中形成一幅清晰的图像。于是本书采用"逻辑图表"方法描绘思维过程。"逻辑图表教学法"是王积社老师多年研究和使用的基本教学方式，实践证明，逻辑图表能够简明、清晰、直观、形象地描述思维过程，能达到易理解、易记忆、易检索的目的。

特色 D：本书含有大量的例题和习题，这些例题和习题基本上都是往年的考研试题，对于习题适当地给出了提示或参考答案。

本书是在王积社老师为数学专业本科学生开设"高等代数选讲"课程的讲义基础之上修改而成。本书的编写做了一些大胆的尝试，我们认为，这些尝试对提高学生的数学素质和数学创新能力是有益的。

非常感谢韩山师范学院教材出版基金对本书出版的资助！非常感谢韩山师范学院教务处、数学与信息技术系领导对本书出版的大力支持！非常感谢我的

夫人刘海燕女士对本书书稿文字录入所做的工作！非常感谢科学出版社对本书的出版所提供的支持与帮助！非常感谢所有为本书的出版付出努力的朋友！

限于编者水平，书中难免疏误和不足，恳请专家、同行及读者指正。用逻辑图表方法编写数学教材是一种尝试，不足之处也请赐教、指正。编者的联系方式：wangfeng. yz@163. com（王积社）；happyyangxp@163. com（杨晓鹏）。

王积社

2010 年 5 月于韩山师范学院

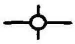
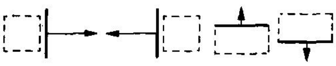
符号使用说明

数学符号表

小写英文字母 a、b、c 等	表示数字
大写英文字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等	表示矩阵
小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 等	表示向量
F 或 P	数域
$\boldsymbol{A}'$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵
$r(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$ 或 $\det\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$f_A(\lambda)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式
$m(\lambda)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式
$F^{m\times n}$ 或 $M_{m\times n}(F)$	表示数域 F 上的 $m\times n$ 阶方阵的集合
$V_1 \oplus V_2$	V_1 与 V_2 的直和

注：表中某些概念用到两种表示. 是因为不同学校的考研试题中所用符号不同.

图表符号表

$\Rightarrow$，$\Downarrow$，$\Leftarrow$，$\Uparrow$	推出结论
$\Leftrightarrow$ 或 $\Updownarrow$	等价，充分且必要
→、↲ 等	流程线
┼	相交流程线
	不相交流程线
- - -→	指示线
	注释或说明
$A \xrightarrow{C} B$	在条件（或操作）C 下，由 A 得到 B
$A\underline{BC}DE$	其中 BC 带下划线表示特指 BC

逻辑符号表

$\forall$	任意的、所有的、一切
$\exists$	存在
$\exists!$	存在唯一的
$\wedge$	并且
$\vee$	或者

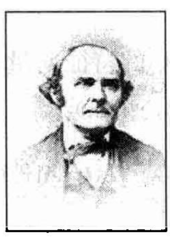
CONTENTS | 目录

专题 1 哈密尔顿-凯莱定理及其应用

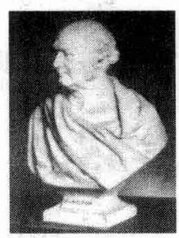
哈密尔顿-凯莱(Hamilton-Cayley)定理是矩阵论的基本结论之一，有广泛的应用.

凯莱(Cayley，1821—1895)，英国数学家，天文学家. 矩阵论的创立人. 1845年发表《线性变换理论》，1858年给出哈密尔顿-凯莱定理. 他也是n维几何、高位抽象空间的创立人. 在群论和天文学方面也有贡献. 1895年卒于英国剑桥.

哈密尔顿(Hamilton，1805—1865)，英国数学家，物理学家. 对分析力学做出重要贡献. 在数学方面的主要贡献是发现"四元数"，其主要著作为《四元数讲义》. 17岁发现"光束理论". 矩阵论的提出源于四元数的研究，故一般称该定理为哈密尔顿-凯莱定理.



凯　莱



哈密尔顿

当然，这不是哈密尔顿-凯莱的原始发现，但是我们应该如此地去探究问题.

1.1 定理的"发现"与证明

在矩阵对角化问题的研究中，矩阵的特征多项式

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

起着主要的作用，所以应该对它深入研究，寻求其新的性质. 为此我们采用"从简单到一般"的探究方法.

(1) 取最简单的对角形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

探求 $f_A(\lambda)$ 的性质. 容易求出

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_n\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

【分析】 因为 $f_A(\lambda)$ 完全由 A 的全部特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所决定,而特征值与特征向量关系密切,所以应该求出属于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的特征向量,使用特征值与特征向量的的关系对 $f_A(\lambda)$ 进行分析.

观察

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

可知,n 维单位向量

$$\varepsilon_i=(0,\cdots,0\underbrace{,1,}_{i}0,\cdots,0)'$$

满足 $A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$,即 ε_i 是 A 属于 λ_i 的特征向量,于是有以下思考:

$$A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

联想 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ 进行变形

$$(A-\lambda_i I)\varepsilon_i=0\ (i=1,2,\cdots,n),$$

因 $f_A(\lambda)$ 中有因子 $\lambda-\lambda_i$,故应想到这种对应关系

$$\lambda-\lambda_i$$

由此对应关系对 $f_A(\lambda)$ 变形分析

$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

换 λ 为 A

$$f_A(A)=(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I),$$

$\Downarrow$ 为使用特征向量条件,联想变形

$$\begin{aligned}f_A(A)\varepsilon_i&=[(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)]\varepsilon_i\\ &=[(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{i-1}I)(A-\lambda_{i+1}I)\cdots(A-\lambda_n I)](A-\lambda_i I)\varepsilon_i=0,\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$(f_A(A)\varepsilon_1,\cdots,f_A(A)\varepsilon_n)=f_A(A)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=f_A(A)I=f_A(A)=0,$$

于是得到 $f_A(A)=0$.