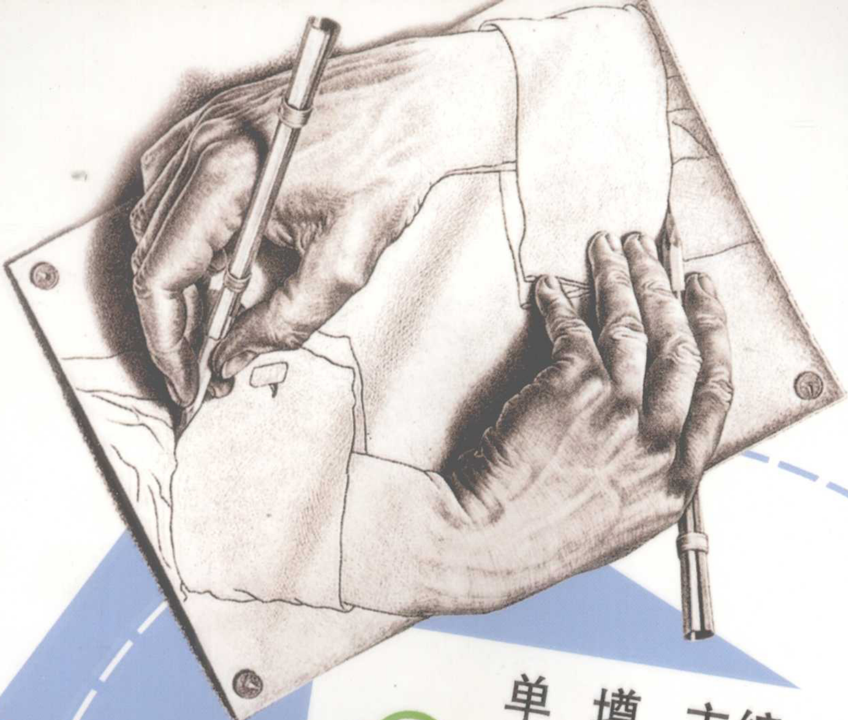


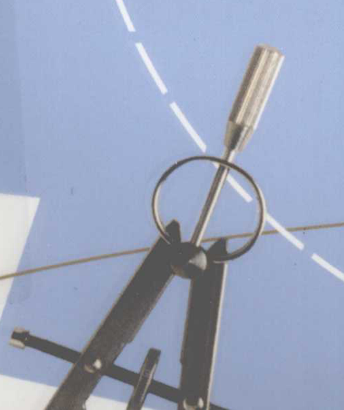
单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

函数迭代与函数方程

王伟叶 熊斌 著

上海科技教育出版社

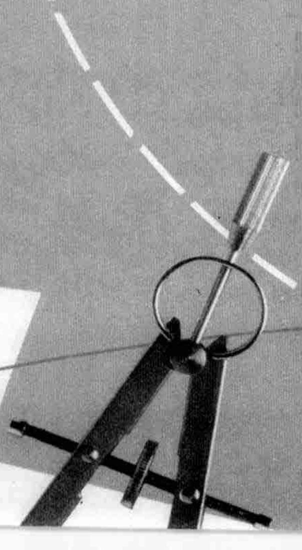


单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

函数迭代与函数方程

王伟叶 熊斌 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数迭代与函数方程/王伟叶，熊斌著. 一上海：上海科技教育出版社，2010.1

(数学奥林匹克命题人讲座/单墫主编)

ISBN 978-7-5428-4934-2

Ⅰ. 函… Ⅱ. ①王…②熊… Ⅲ. 函数-高中-教学参考资料 Ⅳ. G633.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 222063 号

* 数学奥林匹克命题人讲座 *

函数迭代与函数方程

单 墫 主编

王伟叶 熊 斌 著

上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社 出版发行

(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)

www.ewen.cc www.sste.com

全国新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 8.125 字数 210 000

2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5428-4934-2/O·646

定价：20.00 元

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社，1980 年)问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下：

陆洪文	《解析几何》
施咸亮	《代数函数与多项式》
王伟叶　熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
曹　纲　叶中豪	《重心坐标与平面几何》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰	《组合问题》
任　韩	《图论》

田廷彦　　　　　　　　《组合几何》

唐立华　　　　　　　　《向量与立体几何》

邵嘉林　　　　　　　　《复数·三角函数》

显然,作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩,而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式,叶中豪先生于平面几何,都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是 2008 年 IMO 中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献,培养了很多的人才。2008 年 9 月 14 日,"国际数学奥林匹克研究中心"在华东师范大学挂牌成立,担任这个研究中心主任的正是多届 IMO 中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生,他指导过的张成同学获得了第 49 届 IMO 的金牌。

这些作者有一个共同的特点:他们都为数学竞赛命过题。

如:

设数 a 具有以下性质:对于任意四个实数 x_1, x_2, x_3, x_4,总可以取整数 k_1, k_2, k_3, k_4,使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2\leqslant a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如:

设 $S=\{1, 2, \cdots, 2005\}$。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数,试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜举,这里就不罗列了。

命题人讲座,是田廷彦先生的创意。

命题人写书,富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新,是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学

到很多新的知识，产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景（如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景），写来能够深入浅出，“百炼钢化为绕指柔”。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的“读书得间”，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单　墫

2008 年 10 月

目 录

第一讲 函数的基本概念

§1.1 映射与函数

知识桥

一、映射

映射是数学中最重要的概念之一. 在数学研究中,很重要的一个方面是去研究元素之间的关系,而映射正是这一概念的数学刻画.

定义 1.1 设 A 和 B 是两个给定的集合,如果按照某种对应法则 φ,使得对于每一个 $x \in A$,都存在唯一的一个 $y \in B$ 与之对应,则称 φ 是从 A 到 B 的一个**映射**(map),记作

$$\varphi: A \to B.$$

这样的 $y \in B$ 称作 $x \in A$ 在映射 φ 下的**像**,记作 $y = f(x)$ 或者

$$\varphi: x \mapsto y.$$

以下我们用几个例子来加深对映射这一概念的理解.

训练营

例 1 设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$,判断下列对应是不是映射.

(1) $a_1 \mapsto b_1$, $a_2 \mapsto b_2$, $a_3 \mapsto b_1$, $a_4 \mapsto b_1$;

(2) $a_1 \mapsto b_1$, $a_2 \mapsto b_3$, $a_4 \mapsto b_3$;

(3) $a_1 \mapsto b_1$, $a_2 \mapsto b_3$, $a_3 \mapsto b_3$, $a_4 \mapsto b_1$, $a_4 \mapsto b_2$.

解 (1) 是一个映射. 虽然这里 $b_3 \in B$ 并没有 A 中的元素与之对应，但这和定义并无矛盾.

(2) 不是一个映射，因为 A 中的元素 a_3 在 B 中没有定义像.

(3) 不是一个映射，因为 a_4 的像不唯一.

例 2 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

(1) 从 A 到 B 的不同映射共有多少个?

(2) 其中满足 $\varphi(a) > \varphi(b) \geqslant \varphi(c)$ 的映射共有多少个?

解 (1) a, b, c 的像分别有四种不同选择，因此根据乘法原理，不同的映射共有 $3^4 = 81$ 个.

(2) 我们对 a 的像进行讨论：

使得 $\varphi(a) = 1$ 的满足题意的映射不存在；

使得 $\varphi(a) = 2$ 的映射中，$\varphi(b) = \varphi(c) = 1$，这样的映射只有 1 个；

使得 $\varphi(a) = 3$ 的映射中，$\varphi(b) = 2$ 的映射有 2 个，$\varphi(b) = 1$ 的映射有 1 个；

使得 $\varphi(a) = 4$ 的映射中，$\varphi(b) = 3, 2, 1$ 的映射分别有 3, 2, 1 个，共 6 个.

因此，满足题意的不同映射共有 $1 + 3 + 6 = 10$ 个.

定义 1.2 设 φ 是 A 到 B 的映射.

如果对任意的 $a_1, a_2 \in A$，当 $a_1 \neq a_2$ 时，必然有 $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$，则称 φ 是 A 到 B 的**单射**(injective map).

如果对任意的 $b \in B$，都存在 $a \in A$，使得 $\varphi(a) = b$，则称 φ 是 A 到 B 的**满射**(surjective map).

如果 φ 既是单射又是满射，则称之为**双射**，或**一一对应**(bijective map).

此外，为了方便起见，我们还定义所谓的恒等映射.

定义 1.3 设映射 φ 是从 A 到 A 的，如果对于任意的 $a \in A$，都有 $\varphi(a) = a$，那么称 φ 是**恒等映射**(identity map). 记作 I 或者 id.

容易知道，恒等映射是最典型的一种双射.

例 3 设 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3\}$，求 A 到 B 的满射个数及 B 到 A 的单射个数.

解 经过分析我们知道，如果 φ 是从 A 到 B 的一个满射，那么 B 中的三个元素里，有一个在 A 中有两个原像，有两个在 A 中有一个原像. 因此根据乘法原理，满射的个数为

$$3 \times C_4^2 \times 2 = 36.$$

计算从 B 到 A 的单射的个数相对简单. b_1 的像有四种选择，之后 b_2 的像有三种选择，最后 b_3 的像有两种选择. 根据乘法原理，总数为 $4 \times 3 \times 2 = 24$.

点评 我们来对单射、满射和双射进行一些深入的讨论. 容易知道，如果从有限集 A 到有限集 B 存在一个单射，那么集合 A 的元素个数不大于集合 B 的元素个数，即 $|A| \leqslant |B|$. 反之，如果从有限集 A 到有限集 B 存在一个满射，那么集合 A 的元素个数不小于集合 B 的元素个数，即 $|A| \geqslant |B|$. 因此可以推断，如果在有限集合 A 和有限集合 B 之间存在一个双射，那么 $|A| = |B|$.

粗略地说，有关无限集元素多少（势，cardinality）的比较，就是用上面这一性质来定义的. 也就是说，如果 A 到 B 有单射，那么 A 的势不大于 B 的势，有满射则相反. 如果能构造一个双射，那么认为 A 的势等于 B 的势. 但是无限集会存在一个集合的真子集的势和自己相当的情况，因此讨论起来复杂了很多，有兴趣的读者可以自行参阅有关“集合的势”的文献资料.

利用这一性质，在进行比较复杂的计数时，构造双射是一个相当常见的技巧. 以下两个例子将说明这一点.

例 4 求 $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ 的非负整数解的组数.

解 首先作第一个一一对应，设 $y_i=x_i+1$，$i=1, 2, 3, 4$，这样，我们所求的答案相当于方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=19$ 的正整数解的组数.

然而这个答案也并不直接，我们继续做第二个对应，将新得到的方程的每一组解 (y_1, y_2, y_3, y_4) 对应到一个 $\{1, 2, \cdots, 18\}$ 的三元子集 $\{z_1, z_2, z_3\}$（不妨设 $z_1<z_2<z_3$）如下：

$$z_1=y_1, z_2=y_1+y_2, z_3=y_1+y_2+y_3.$$

这相当于在一个排成一列的19个小球的18个间隔中插三块木板，将小球从前到后分成四组. 容易验证，这是一个双射，因此所求的组数等于 $C_{18}^3=816$.

点评 这个例子中所使用的方法可以解决一切求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的整数解组数的问题，其中 m，n 是正整数，要求方程满足 $x_i \geqslant y_i$，$i=1, 2, \cdots, m$，y_i 是预先给定的. 如在本例中，$m=4$，$n=19$，$y_1=y_2=y_3=y_4=0$.

例 5 设集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和称为 X 的“容量”（规定空集的容量为 0）. 若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集.

（1）求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等；

（2）求证：当 $n \geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等；

（3）当 $n \geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

（1992 年全国高中数学联赛试题）

解 （1）设 A 是 S_n 的任一奇子集，我们作从奇子集全体到偶子集全体的映射 φ 如下：

$$若\ 1\in A,\ 则\ A\to A\cup\{1\};$$
$$若\ 1\notin A,\ 则\ A\to A\setminus\{1\}.$$

由定义出发,容易验证这样定义的 φ 是奇子集全体到偶子集全体的一个双射. 这样，奇子集与偶子集的个数相等，因此均为 2^{n-1} 个.

(2) 我们用 a_n 和 b_n 分别表示 S_n 的奇子集与偶子集的容量之和.

若 n ($\geqslant 3$) 是奇数，则 S_n 的奇子集有如下两类：S_{n-1} 的奇子集，以及 S_{n-1} 的偶子集与 $\{n\}$ 的并. 于是我们有

$$a_n=a_{n-1}+(b_{n-1}+n\times 2^{n-2}),$$

注意在上式中我们用了(1) 的结论. 同理可得

$$b_n=b_{n-1}+(a_{n-1}+n\times 2^{n-2}).$$

若 n ($\geqslant 3$) 是偶数，和上面类似，我们会得到

$$a_n=a_{n-1}+(a_{n-1}+n\times 2^{n-2}),$$
$$b_n=b_{n-1}+(b_{n-1}+n\times 2^{n-2}).$$

由此,再加上 $a_3=b_3=12$，根据数学归纳法，对于一切 $n\geqslant 3$ 都有 $a_n=b_n$.

(3) 根据(2) 的结论，我们只需要把 S_n 的所有子集的容量计算出来,除以 2，即得所求. 而这是一个经典的问题,因为 1 到 n 的每个元素在计算总和时恰被计算了 2^{n-1} 次，所以所有子集的容量之和为 $\frac{1}{2}n(n+1)\times 2^{n-1}$. 故而,奇子集的容量之和为 $n(n+1)\times 2^{n-3}$.

最后,我们举一个有些“奇妙”的例子,来说明无限集之间的一一对应可以将一个集合映射到它的真子集. 其中的一些技巧很值得借鉴.

例 6 试构造一个从单位圆周 $\{\exp(\mathrm{i}\pi\alpha)\mid\alpha\in[0,2)\}$ 到有两个端点的半圆周 $\{\exp(\mathrm{i}\pi\alpha)\mid\alpha\in[0,1])\}$ 的一一映射.

解 我们先找出一个从$[0,2)$ 到$[0,1]$ 的一一对应 φ. 这可以按如下的方式定义：

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}, & \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 2),\\ \dfrac{x}{2}, & \text{其他 } x,\end{cases}$$

其本质是先把$[0, 2)$通过除以 2 的映射对应到$[0, 1)$，再从中抽取一个和自然数列相仿的子集作“移位”变换. 于是定义

$$\varphi:\ \exp(\mathrm{i}\pi\alpha)\mapsto\exp(\mathrm{i}\pi\varphi(\alpha))$$

即为所求.

知识桥

二、函数

前面所定义的映射是在任意两个集合之间的.在数学中,我们经常会遇到研究两个数集之间的关系的状况,因此,我们特别给两个数集之间的映射一个名称.

定义 1.4 从非空数集 X 到非空数集 Y 的一个映射 $f:X\to Y$ 叫做 X 到 Y 的**函数**(function)，记作

$$y=f(x)\ (x\in X,\ y\in Y),$$

其中 X 称为函数 f 的**定义域**(domain)，集合

$$f(X)=\{y\in Y\mid y=f(x),\ x\in A\}$$

称为函数 f 的**值域**(range).

在一般的函数定义中,数集 Y 通常用实数集 $\mathbf{R}$(或者 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$,$\mathbf{C}$) 等等来代替,定义域常用数集 D 来表示,于是能确定一个函数的主要因素事实上有两个：对应法则 f 和定义域 D，两者缺一不可.所以,我们也常用

$$y=f(x),\ x\in D$$

来表示，其中的 x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependent variable).

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点集 $G=\{(x, y)\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 f 的**图像**(graph). 事实上,图像也可以用来表示 f 的所有特征.

在初等数学的研究中,用来表示函数的主要方式有列表法、图像法和解析法三种. 其中,列表法主要用来表示定义域是有限集或者是自然数集的函数,图像法主要用来表示对应关系很容易从图像中解读的函数,如恒等函数 id. 而用解析法表示函数时,常常会遇到函数在定义域的不同部分需要用不同的解析式来表示的情况. 如果定义域能被分为有限个区间,每个区间上的解析式都是某类函数的时候,我们就称这个函数为**分段函数**(piecewise-defined function).

例如,
$$f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ 3x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

是分段线性函数;

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \tan x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

是定义在 $\left(-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的分段三角函数.

函数之间自然可以进行数集上允许的运算,如加减乘除、乘方开方等等. 此外,在很多场合,仅仅对函数进行代数运算还不够,我们还会遇到所谓函数的复合.

定义 1.5 设有两个函数

$$z=f(y),\ y\in E;$$
$$y=g(x),\ x\in D.$$

如果集合 $D^*=\{x\in D\mid g(x)\in E\}$ 非空,那么就可以确定一个以 D^* 中的元素为自变量,经过 g 和 f 的先后作用,以 f 像集中的元素为因变量的一个新的函数,记作

$$z=f(g(x)),\ x\in D^*.$$

这个函数通常也表示为 $f\circ g$,称为 f 和 g 的**复合函数**. 这一过程被

称为函数的复合(function composition).

例如，$z=f(y)=\sqrt{y}$，$y\in E=[0,+\infty)$，$y=g(x)=4-x^2$，$x\in D=\mathbf{R}$. 它们的复合函数是 $z=f(g(x))=\sqrt{4-x^2}$，$x\in D^*=[-2,2]$.

函数的复合有结合律，即 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但绝没有交换律. 通常情况下，$f\circ g$ 和 $g\circ f$ 是不相等的.

训练营

例 7 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

求 $f(f(x))$，$f(g(x))$，$g(f(x))$，$g(g(x))$.

解 因为 $f(x)$ 的取值都不超过 1，所以 $f(f(x))=1$.

$$g(f(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

而 $g(x)$ 在 $|x|\neq 1$ 时，取值严格大于 1，在 $x=\pm 1$ 时取值为 1. 因此，

$$f(g(x))=\begin{cases}0, & x\neq\pm 1,\\ 1, & x=\pm 1.\end{cases}$$

$$g(g(x))=\begin{cases}2, & x\neq\pm 1,\\ 1, & x=\pm 1.\end{cases}$$

这个例子清楚地表明了，函数的复合这一过程通常不可交换.

前面我们介绍过，如果 y 是 x 的函数，那么我们把 x 和 y 分别称作自变量和因变量. 顾名思义，在函数 f 的关系下，y 是随着 x 的变化而产生变化的. 然而在一些场合，这一过程也可以用相反的关系来描述. 比如在确定单价以后，可以通过购买的数量来决定总价，也可以通过总价来决定购买的数量. 这样的背景就引导我们去把 y 当作自变量，x

当作因变量，从而得到反函数的概念.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 是 D 到 $f(D)$ 的单射(因此也是双射)，那么对于值域中的每一个 y_0，在定义域中都存在唯一的 x_0，使得 $f(x_0)=y_0$. 而从 $f(D)$ 映射到 D，把 y_0 对应到 x_0 的函数称为 $f(x)$ 的**反函数**(inverse function)，记作：

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$

或

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

注 一般来说，总是比较习惯于把 x 作为自变量，y 作为因变量，因此通常也把 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$. 这仅仅是表述上的差别而已. 此外，要注意这里的反函数符号“f^{-1}”并不是倒数 $\frac{1}{f}$ 的意思.

根据反函数的定义我们知道，原函数 f 的定义域恰好是反函数 f^{-1} 的值域，反之亦然.

例如，$y=x^3$，$x\in\mathbf{R}$ 的反函数是 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$；$y=x^2$，$x\in[0,2]$的反函数是 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,4]$；$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的反函数是 $y=\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$；而 $y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 因其不是单射所以没有反函数.