高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学（下册）

习题解答

· 高等数学编写组 编 ·

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学(下册)

习题解答

• 高等数学编写组 编 •

编者 张义侠 丁茂震 牛玉玲 陈凡红

中国人民大学出版社

• 北京 •

前　言

本书是由中国人民大学出版社出版、高等数学编写组编写的《高等数学》下册的配套习题解答。书中选入了覆盖面较全的不同深度的习题。每章后所附习题分（A）、（B）两部分。为了保证教学的基本要求，我们认为，习题（A）的大部分应作为学生作业；习题（B）可以根据不同层次、不同的教学要求选用其中少部分或大部分。

演算习题，一是为了熟练和巩固所学的基本知识；二是训练逻辑思维、分析、推理的能力；三是培养综合运用数学工具分析解决实际问题的能力。演算足够数量和深度的习题，是十分必要的，但是应注意，要首先把学过的数学内容充分复习，在对其概念理论和思维方法有较好的理解的前提下，再演算习题，这样，才能达到演算习题的上述目的。课后不复习，立刻做作业，不是正确有效的学习方法。面对习题，首先应尽可能独自分析、思考去求解这一问题，然后与解答核对运算结果正确与否，再加以认定或修正。只有在找不到思路、无法入手的情况下，才可以借助解答。在对所学基本内容没有理解的情况下去抄袭解答，这对学习知识毫无裨益，是自误的做法。

编写解答过程中，我们参考、借鉴了国内部分优秀的传统教材，如同济大学数学系主编的《高等数学》及中国人民大学赵树嫄教授主编的《微积分》等书，在此谨致谢忱。

编者

目　录

第八章

空间解析几何与向量代数

习题八（A）

1. 设平行四边形的两条对角线向量为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，求其四条边向量.

【解】 如图 8—1 所示，由向量的几何加减法知

$$\begin{cases}\vec{c}+\vec{d}=\vec{a}\\ \vec{c}-\vec{d}=\vec{b}\end{cases},$$

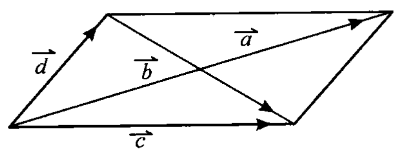


图 8—1

故 $\vec{c}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\vec{d}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$

即平行四边形的四条边向量为：

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};\quad \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};\quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2};\quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$$

2. 设$\vec{m}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{n}=-3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示$-2\vec{m}+3\vec{n}$.

【解】
$$\begin{aligned}-2\vec{m}+3\vec{n}&=-2(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+3(-3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})\\&=-4\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}-9\vec{a}+3\vec{b}-6\vec{c}\end{aligned}$$

$$=-13\vec{a}+5\vec{b}-8\vec{c}$$

3. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

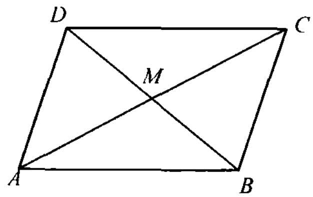


图 8—2

【证明】 如图 8—2 所示，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$，故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$$

即 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

4. 自点 (2，−4，5) 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

【解】 在 xOy，yOz，zOx 坐标面的垂足坐标分别为 (2，−4，0)，(0，−4，5)，(2，0，5)；在 x 轴，y 轴，z 轴上的垂足的坐标分别为 (2，0，0)，(0，−4，0)，(0，0，5).

5. 求 $M_1(-2, 0, 3)$，$M_2(4, -5, -1)$ 两点的距离.

【解】 $|M_1M_2|=\sqrt{(4+2)^2+(-5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{77}$.

6. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

【解】 点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

7. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$，试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

【解】 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0, -1-1, 0-2\}=\{1, -2, -2\}$，

$$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2\{1, -2, -2\}=\{-2, 4, 4\}.$$

8. 证明：三点 $A(1, 0, -1)$，$B(3, 4, 5)$，$C(0, -2, -4)$ 共线.

【证】 $\overrightarrow{AB}=\{2, 4, 6\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-1, -2, -3\}$，

故 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有共同的始点 A，可知 A、B、C 三点共线.

9. 设 $\vec{a}=-\vec{i}+4\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，求向量 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$ 在 y 轴上的投影及其在 x 轴，z 轴上的分向量.

【解】 $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{k}-2(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

$$=-\vec{i}+4\vec{k}-4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

$=-5\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

$\vec{c}$ 在 y 轴上的投影为 2，在 x 轴，z 轴上的分向量分别为 $-5\vec{i}$ 及 $2\vec{k}$.

10. 设 $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{c}=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$，求与 $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ 平行的单位向量.

【解】 $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\{3+2-4,\ 5+2+1,\ -1+3+3\}=\{1,\ 8,\ 5\}$，于是与 $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ 平行的单位向量为 $\pm\left\{\frac{1}{3\sqrt{10}},\ \frac{8}{3\sqrt{10}},\ \frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$.

11. 已知向量 $\vec{a}$ 的模为 6，与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{4}$，与 y 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求向量 $\vec{a}$.

【解】 设向量 $\vec{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$.

由于 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$，于是

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}=6\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right\}.$$

12. 已知两点 $M_1(2,\ -1,\ 3)$，$M_2(3,\ 0,\ 1)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模，方向余弦以及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

【解】 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-2,\ 0-(-1),\ 1-3\}=\{1,\ 1,\ -2\}$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

已知与 $\vec{a}$ 同向的单位向量为 $\vec{e}_{\vec{a}}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$，所以与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量为 $\vec{e}_{\overrightarrow{M_1M_2}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$.

13. 设 $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$，问 λ 与 M 有怎样的关系，能使得 $\lambda\vec{a}+M\vec{b}$ 与 z 轴垂直?

【解】 $\lambda\vec{a}+M\vec{b}=\lambda\{3,\ 5,\ -2\}+M\{2,\ 1,\ 4\}=\{3\lambda+2M,\ 5\lambda+M,\ -2\lambda+4M\}$，若要 $\lambda\vec{a}+M\vec{b}$ 与 z 轴垂直，即要 $(\lambda\vec{a}+M\vec{b})\perp\{0,\ 0,\ 1\}$，即 $(\lambda\vec{a}+M\vec{b})\cdot\{0,\ 0,\ 1\}=0$，亦即 $\{3\lambda+2M,\ 5\lambda+M,\ -2\lambda+4M\}\cdot\{0,\ 0,\ 1\}=0$.

故 $-2\lambda+4M=0$，因此当 $\lambda=2M$ 时能使 $\lambda\vec{a}+M\vec{b}$ 与 z 轴垂直.

14. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,\ 1,\ 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,\ 4,\ 2)$，计算重力所做的功（长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向）.

【解】 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-3, 4-1, 2-8\}=\{-2, 3, -6\}$,

$\vec{F}=\{0, 0, -100\times 9.8\}=\{0, 0, -980\}$,

$\overrightarrow{W}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\{0, 0, -980\}\cdot\{-2, 3, -6\}=5\,880$(焦耳).

15. 已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，求$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角.

【解】 由于

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=-2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=4$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=4.$$

所以，$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角α的余弦，$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{-2}{2\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$

故 $\alpha=\dfrac{\alpha}{3}$.

16. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

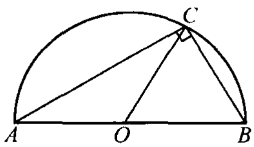


图 8—3

【证明】 如图 8—3 所示，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. 只要证$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可. 由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=-|\overrightarrow{AO}|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=0\end{aligned}$$

故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\angle ACB$ 为直角.

17. 求向量$\vec{a}=\{4, -3, 4\}$在向量$\vec{b}=\{2, 2, 1\}$上的投影.

【解】 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{\{4, -3, 4\}\cdot\{2, 2, 1\}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

18. 设$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，求

(1) $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$；　　(2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})$.

【解】 (1) $2\vec{a}+\vec{b}=\{4, 0, -7\}$，$\vec{a}-2\vec{b}=\{-3, 5, -6\}$，从而有 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=30$.

(2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & -7\\ -3 & 5 & -6\end{vmatrix}=35\vec{i}+45\vec{j}+20\vec{k}.$

19. 已知$M_1(1, -1, 2)$，$M_2(3, 3, 1)$和$M_3(3, 1, 3)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

【解】 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-1, 3-(-1), 1-2\}=\{2, 4, -1\}$，

$\overrightarrow{M_2M_3}=\{3-3, 1-3, 3-1\}=\{0, -2, 2\}$.

由于$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直，故所求向量可取为

$$\vec{a}=\frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|}.$$

由 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(6, -4, -4)$，故

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17},$$

知 $\vec{a}=\dfrac{\pm1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4)=\pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{17}}, -\dfrac{2}{\sqrt{17}}, -\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$.

20. 已知向量$\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$和$\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$，计算：(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$；(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})$.

【解】 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\{2, -3, 1\}\cdot\{1, -1, 3\}=8$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\{2, -3, 1\}\cdot\{1, -2, 0\}=8$

故 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}=8\{1, -2, 0\}-8\{1, -1, 3\}$

$=\{0, -8, -24\}=-8\vec{j}-24\vec{k}$.

(2) $\vec{a}+\vec{b}=\{2, -3, 1\}+\{1, -1, 3\}=\{3, -4, 4\}$，

$\vec{b}+\vec{c}=\{1, -1, 3\}+\{1, -2, 0\}=\{2, -3, 3\}$，

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & 4\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix}=(0, -1, -1)=-\vec{j}-\vec{k}.$$

21. 写出各坐标平面的方程及各坐标轴的方程.

【解】 xOy 平面：$z=0$，　yOz 平面：$x=0$，　xOz 平面：$y=0$，

x 轴：$\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$，　y 轴：$\begin{cases}z=0\\ x=0\end{cases}$，　z 轴：$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$.

22. 求出满足下列条件的动点的轨迹方程：

(1) 到点 $(2, 0, -1)$ 和 $(-1, 2, 1)$ 的距离相等；

（2）到点（0，0，1）的距离等于到 xOy 平面距离的 2 倍.

【解】（1）设动点 $M(x, y, z)$，$A(2, 0, -1)$，$B(-1, 2, 1)$，则有 $|MA|=|MB|$. 即

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

整理得：$6x-4y-4z+1=0$.

（2）设动点 $M(x, y, z)$，$A(0, 0, 1)$，则有 $|MA|=2|z|$.

即 $$\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}=2|z|$$

整理得：$x^2+y^2-3(z+\frac{1}{3})^2=-\frac{4}{3}$.

23. 求下列球面的中心和半径.

（1）$x^2+y^2+z^2-6z-7=0$；

（2）$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$.

【解】（1）方程化为 $x^2+y^2+(z-3)^2=16$

∴中心（0，0，3），半径 $R=4$.

（2）方程化为 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=16$

∴中心（1，−2，2），半径 $R=4$.

24. 建立以点（1，3，−2）为球心，且通过坐标原点的球面方程.

【解】设以点（1，3，−2）为球心，R 为半径的球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=R^2$. 球面过原点，故 $R^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0+2)^2=14$，从而所求球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$.

25. 求与坐标原点 O 及点（2，3，4）的距离之比为 1 : 2 的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？

【解】设动点坐标为 (x, y, z)，根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2}$$

化简整理得 $$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2,$$

它表示以 $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$ 为球心，以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

26. 指出下列各方程分别表示什么曲面，并画出其图形.

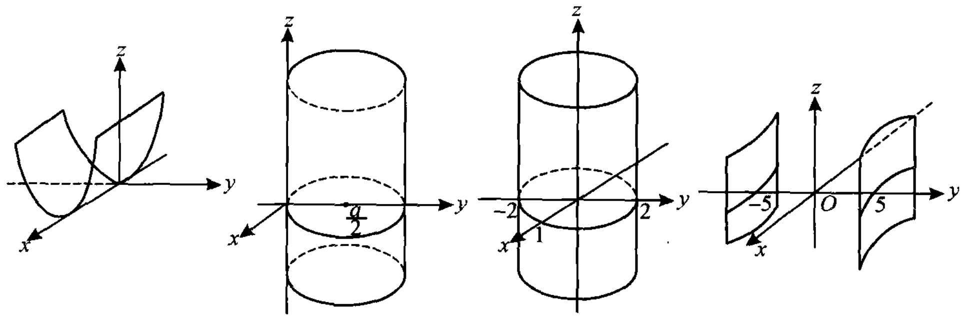
(1) $z=y^2$；　　(2) $x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$；

(3) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$；　　(4) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$.

【解】 见图 8—4.

(1) 抛物柱面；　　(2) 圆柱面；

(3) 椭圆柱面；　　(4) 双曲柱面.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 8—4

27. 指出下列各方程在平面直角坐标系或空间直角坐标系中分别表示什么图形.

(1) $x^2+y^2=9$；　(2) $y=2x^2$；　(3) $y^2=3x$；　(4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$；

(5) $y=2$；　(6) $2x+y=2$；　(7) $z=y$.

【解】 在平面直角坐标系中，这些方程分别表示：

(1) 圆　(2) 抛物线　(3) 抛物线

(4) 双曲线　(5) 垂直于 y 轴的直线　(6) 直线

(7) yOz 平面上过原点的直线

在空间直角坐标系中，这些方程分别表示：

(1) 圆柱面　(2) 抛物柱面　(3) 抛物柱面

(4) 双曲柱面　(5)垂直于 y 轴的平面　(6) 垂直于 xOy 坐标面的平面

(7) 垂直于 yOz 坐标面过 x 轴的平面

28. 将所给曲线，绕指定的坐标轴旋转，试分别写出旋转曲面的方程.

(1) yOz 坐标面上的椭圆$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 z 轴旋转.

（2）xOy 坐标面上的抛物线 $y^2=x$ 绕 x 轴旋转.

（3）xOz 坐标面上的双曲线$\frac{x^2}{4}-z^2=1$ 绕 z 轴旋转.

（4）yOz 坐标面上的直线 $z=2y$ 绕 y 轴旋转.

【解】（1）旋转曲面方程为$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$，即$\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

（2）旋转曲面方程为$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=x$，即 $x=y^2+z^2$.

（3）旋转曲面方程为$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{4}-z^2=1$，即$\frac{x^2+y^2}{4}-z^2=1$.

（4）旋转曲面方程为$\pm\sqrt{x^2+z^2}=2y$，即 $4y^2=x^2+z^2$.

29. 指出下列各方程分别表示什么曲面.

（1）$2x^2+2y^2+2z^2-x+4y+2=0$；　（2）$z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}$；

（3）$z^2=4(x^2+y^2)$；　（4）$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$；

（5）$z=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$；　（6）$x^2+y^2==4-z$；

（7）$z=3-\sqrt{2x^2+2y^2}$.

【解】（1）球面；（2）椭圆抛物面；（3）圆锥面；（4）椭球面；

（5）上半锥面；（6）抛物面开口向下，顶点在（0，0，4）；

（7）下半锥面，顶点在（0，0，3）.

30. 分别依照下列条件，求平面方程.

（1）过点（1，−1，1），法向量为（1，0，−1）；

（2）过点（3，0，−1）且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程；

（3）过点 $A(0,1,2)$，$B(1,-1,3)$，$C(-4,0,-2)$ 三点的平面；

（4）过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程；

（5）过点（2，1，2），且分别垂直于平面 $x+3y+z=2$ 和平面 $3x+2y-4z=1$；

（6）平行于 x 轴且经过两点（4，0，−2）和（5，1，7）；

（7）过 y 轴且垂直于平面 $4x+5y-2z-3=0$ 的平面.

【解】（1）由平面的点法式方程可知，所求平面的方程为$(x-1)+0(y+1)-1(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

（2）所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 因此所求平面的法向

量可取为 $\vec{n}=\{3,-7,5\}$，设所求平面为 $3x-7y+5z+D=0$，将点 $(3,0,-1)$ 代入上式得 $D=-4$. 故所求平面方程为 $3x-7y+5z-4=0$.

(3) $\overrightarrow{AB}=\{1,-2,1\}$，$\overrightarrow{BC}=\{-5,1,-5\}$，取

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ -5 & 1 & -5\end{vmatrix}=9\vec{i}-9\vec{k},$$

则所求平面为 $9x-9z+18=0$，即 $x-z+2=0$.

(4) $\overrightarrow{OM_0}=\{2,9,-6\}$，所求平面与$\overrightarrow{OM_0}$垂直，可取 $\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}$，设所求平面方程为 $2x+9y-6z+D=0$. 将点 $M_0(2,9,-6)$代入此式，得 $D=-121$，故所求平面方程为 $2x+9y-6z-121=0$.

(5) 设所求平面的法向量为 $\vec{n}$，可取 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4\end{vmatrix}=-14\vec{i}+7\vec{j}-7\vec{k}$，

则所求平面方程为 $-14(x-2)+7(y-1)-7(z-2)=0$，即 $2x-y+z-5=0$.

(6) 所求平面平行于 x 轴，故设所求平面方程为 $By+Cz+D=0$，将点 $(4,0,-2)$ 及 $(5,1,7)$ 分别代入方程，得 $-2C+D=0$ 及 $B+7C+D=0$，从而解得 $C=\frac{D}{2}$，$B=-\frac{9}{2}D$. 因此，所求平面方程为 $-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0$，即 $9y-z-2=0$.

(7) 设所求平面为 $Ax+Cz=0$，$\vec{n_1}=\{4,5,-2\}$，$\vec{n_2}=\{A,O,C\}$，$\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$，

所以　$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$，$4A-2C=0$，$A=\frac{C}{2}$，$\frac{C}{2}x+Cz=0$.

故所求平面为$\frac{1}{2}x+z=0$，即 $x+2z=0$.

31. 指出下列各平面的特殊位置

(1) $y=0$；　(2) $x=2$；　(3) $2z+3=0$；

(4) $x+y=1$；　(5) $2y+3z+4=0$；　(6) $x-y+3z=0$；

(7) $4x-5y=0$；　(8) $2y=3z$.

【解】 (1) xOz 坐标面；

(2) 平面垂直于 x 轴，在 x 轴上的截距为 2；

(3) 即 $z=-\frac{3}{2}$，平面垂直于 z 轴，在 z 轴上的截距为$-\frac{3}{2}$；

(4) 平面平行于 z 轴；

(5) 平面平行于 x 轴；

(6) 平面过原点；

(7) 平面过 z 轴；

(8) 平面过 x 轴.

32. 画出下列曲线在第一卦限内的图形. (1) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\x-y=0\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\x^2+z^2=a^2\end{cases}$.

【解】 图形如图 8—5 所示.

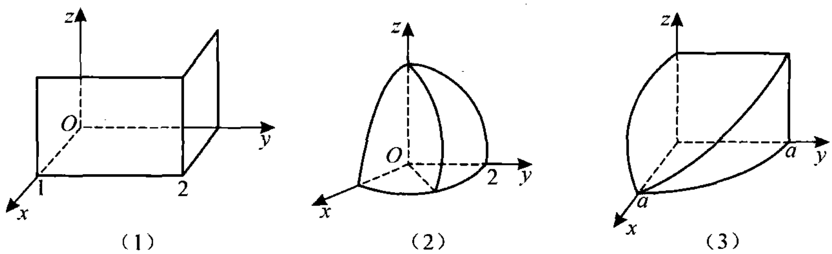


图 8—5

33. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases}y=5x+1\\y=2x-3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\y=3\end{cases}$.

【解】 (1) $\begin{cases}y=5x+1\\y=2x-3\end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点，在空间解析几何中表示两平面的交线即空间直线.

(2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\y=3\end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与其切线 $y=3$ 的交点，即切点，在空间解析几何中表示椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与其切平面 $y=3$ 的交线，即空间曲线.

34. 求下列曲线在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

(1) $\begin{cases}z=x^2+y^2\\z=x+1\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\\z=2\theta\end{cases}$.

【解】（1）曲线在 xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面上的投影曲线方程分别为

$$\begin{cases}x^2+y^2-x-1=0\\ z=0\end{cases};\quad \begin{cases}y^2+z^2-3z+1=0\\ x=0\end{cases},$$

$$\begin{cases}z=x+1\\ y=0\end{cases}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

（2）曲线在 xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面上的投影曲线方程分别为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases};\quad \begin{cases}y=\sin\dfrac{z}{2}\\ x=0\end{cases};\quad \begin{cases}x=\cos\dfrac{z}{2}\\ y=0\end{cases}.$$

35. 将由一般方程表示的曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}\end{cases}$ 转化为用参数方程表示.

【解】 曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\\ z=2\sin\dfrac{t}{2}\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

36. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

【解】 联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=4\end{cases}$，得 $x^2+y^2=4$. 故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4\\ z=0\end{cases}$，如图 8—6 所示；联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x=0\end{cases}$，得 $z=y^2$，故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z=y^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域；同理联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ y=0\end{cases}$，得 $z=x^2$，故旋转抛物面在 xOz 面上的投影为由 $z=x^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

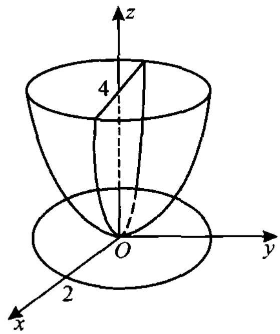


图 8—6

37. 求由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-x^2-y^2$ 所围成的立体在三个坐标面上的投影区域.

【解】 两曲线的交线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=2-x^2-y^2\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$；在 xOy 平面上的投影区域为 $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\ z=0\end{cases}$；在 zOx 面和 yOz 面上

的投影区域分别为$\begin{cases} z=1 \\ y=0 \end{cases}$（$-1\leqslant x\leqslant 1$）；$\begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases}$（$-1\leqslant y\leqslant 1$）.

38. 将直线的一般方程$\begin{cases} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+y-2z-2=0 \end{cases}$化为对称式方程及参数方程.

【解】 所给直线为两个平面的交线，设二平面的法线向量分别为$\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$，

则直线的一个方向向量为 $\vec{S}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\{5, 7, 11\}$.

再在直线上取一点，在直线方程中，令 $z=0$，得点 $M(1, -1, 0)$，于是直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{11}$，参数方程为$\begin{cases} x=1+5t \\ y=-1+7t \\ z=11t \end{cases}$.

39. 求满足下列条件的各直线方程.

(1) 过点 $M_0(2, 4, 0)$且平行于直线 $\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$；

(2) 过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$；

(3) 过点 $(3, 0, -1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+2z-4=0 \\ y+3z-5=0 \end{cases}$；

(4) 过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行；

(5) 过点 $(1, -1, 2)$ 且垂直于平面 $2x+y-2z+1=0$；

(6) 直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线方程；

(7) 过点 $(0, 1, 2)$ 且与直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$垂直相交.

【解】 (1) $\vec{S}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$，

故所求直线为 $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{1}$.

(2) 取所求直线的方向向量 $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1-3, 0-(-2), 2-1\}=\{-4, 2, 1\}$，因此所求直线方程为 $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

(3) 所求直线的方向向量 $\vec{S}$ 可取为 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$，于是所求直线方程为 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

(4) 所求直线与已知的两个平面平行，因此所求直线的方向向量可取

$$\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\{-2, 3, 1\},$$

故所求直线方程为 $\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

(5) 由于直线与平面 $2x+y-2z+1=0$ 垂直，故直线的方向向量 $\vec{S}$ 平行于平面的法向量 $\vec{n}$，取 $\vec{S}=\{2, 1, -2\}$ 由点向式直线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

(6) 作过已知直线的平面束，在该平面束中找出与已知平面垂直的平面，该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$$

经整理得 $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$.

由 $(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0$，得 $\lambda=-\frac{13}{11}$，

代入平面束方程，得 $17x+31y-37z-117=0$.

因此所求投影直线的方程为 $\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0 \\ 4x-y+z=1 \end{cases}$.

(7) 过点 $A(0, 1, 2)$ 且垂直于 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ 的平面方程为 $(x-0)+(-1)(y-1)+2(z-2)=0$，即 $x-y+2z-3=0$.

方程组 $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2} \end{cases}$，此平面与直线的交点为 $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

由此可得 $\overline{AB}=\left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right\}$，过 A，B 的直线为 $\frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-2}{-1}$，