全国十二大考研辅导机构指定用书

2011全国硕士研究生入学统一考试

概率论与数理统计

辅导讲义

主编　曹显兵

★ 紧扣《考试大纲》的要求及动向
★ 紧密结合概统特点和学生的需要
★ 全面指导考研复习备考
★ 帮助考生迅速掌握考试内容
★ 在最短的时间内提高应试能力

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国十二大考研辅导机构指定用书

2011全国硕士研究生入学统一考试

概率论与数理统计

辅导讲义

主编　曹显兵

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义/曹显兵编著. —西安:西安交通大学出版社,2010.5

ISBN 978-7-5605-3560-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 083329 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

概率论与数理统计辅导讲义

主　　编:曹显兵
策　　划:张伟　陈丽
责任编辑:王欣
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:9.25
字　　数:220 千字
版　　次:2010 年 6 月第 1 版
印　　次:2010 年 6 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5605-3560-9/O·337
定　　价:18.00 元

前　言

考研数学课程中，概率论与数理统计是理工科（数学一）、经济类（数学三）必考的，分值为 34 分，占总分的 22.7%。从往年的考试情况看，这门课程一般都没有高等数学（或微积分）考得理想，究其原因，可能是考生对这门课程重视程度不够、特点了解不够造成的。

概率论与数理统计是专门研究随机现象及其数量规律的一个数学分支。学好这门课程的关键是将基本概念、定理及方法和实际例子联系起来，掌握用概率统计的语言来描述实际问题，即把问题表示为随机事件、概率、条件概率、数字特征以及概率分布等，然后选择合适的概率统计模型及正确的定理、公式进行计算。

编者主讲考研数学课程——概率论与数理统计已有十余年，积累了较为丰富的教学实践经验。本书正是根据编者这十余年来的辅导讲稿精心提炼、浓缩而成的，目的是让考生在复习备考时，节省时间，少走弯路，在较短时间内复习好概率论与数理统计，最终取得优异成绩，实现自己的人生梦想。

本书共分六章，编写特点如下：

一、本书在每章的开头给出了最新考研大纲所规定的考试内容与考试要求，并且对考试内容作了规范的描述与讲解。

二、本书力求用最少的篇幅帮助考生理解基本概念，掌握基本原理、基本方法和公式。一方面，编者通过精心选取、重新编制设计题目，使得本书所选例题更具代表性，考生更容易理清解题思路、熟悉常用方法与技巧；另一方面，借助于许多典型例题的评注，帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而达到举一反三、触类旁通的效果。另外，对于真正掌握一门课程内容并通过相关考试来说，做一定数量的习题是必不可少的。为此，编者按照填空题、选择题和解答题的顺序编制了一定数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立完成大部分习题。

三、针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论。特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结，目的在于帮助考生更好地把握考试的重点、难点，掌握解题的基本方法。

在成书过程中，编者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于编者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

曹显兵

2010 年 5 月于北京

目　录

第一章　随机事件和概率

■ 考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

■ 考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式,以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

■ 重要概念、性质、定理与公式

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验

自然界中的客观现象一般可分为必然现象和随机现象,必然现象是指在一定的条件下必然出现的现象,而随机现象是指在一定的条件下可能出现也可能不出现的现象,概率论是研究大量随机现象的统计规律性的数学学科. 概率论中将满足下列三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**,通常用 E 或 $E_1, E_2 \cdots\cdots$ 来表示,这三个特点如下:

(1) 试验可在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但所有的结果是明确可知的;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果所组成的集合称为 E 的**样本空间**,常记为 Ω,Ω 中的元素即

E 的每一个结果称为**样本点**,常记为 ω,于是有 $\omega \in \Omega$.

3. 随机事件

样本空间的子集,即试验的满足某些条件的可能结果称为**随机事件**,简称**事件**,常用大写英文字母 A、B、C 等表示,有时用{……}表示事件,大括号中用文字或式子描述事件的内容.在每次试验中,当且仅当事件中的一个样本点出现时,称这个事件发生.由一个样本点组成的单点集称为基本事件;由多于一个样本点组成的集合称为复合事件.

显然,Ω 和空集 $\varnothing$ 都是 Ω 的子集,从而也是事件,它们分别称为必然事件 —— 每次试验中一定发生的事件,不可能事件 —— 每次试验中一定不发生的事件.

二、事件的关系及其运算

事件是一个集合,因此事件间的关系和运算自然按照集合间的关系和运算来处理.

1. 事件的关系和运算

(1) **包含**　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 为 B 的子集,则称事件 B 包含事件 A,也称 A 为 B 的子事件,记作 $A \subset B$,图 1-1(称为文氏图)表示了事件的包含关系,显然,对任何事件 A 有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

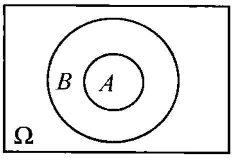


图1-1

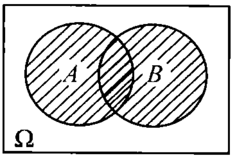


图1-2

(2) **相等**　若两个事件 A、B 满足 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$.此时 A 与 B 包含的样本点完全相同,即表示同一个事件.

(3) **和(并)**　事件 A、B 中至少有一个发生的事件称为 A 与 B 的和(并),记作 $A \cup B$(或 $A + B$),即

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

类似有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.图 1-2 表示了 A 与 B 的和事件(阴影部分).

(4) **积(交)**　事件 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积(交),记作 $A \cap B$(或 AB),即

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

类似有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.图 1-3 表示了 A 与 B 的积事件(阴影部分).

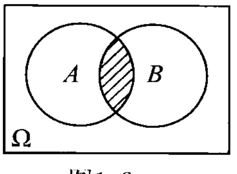


图1-3

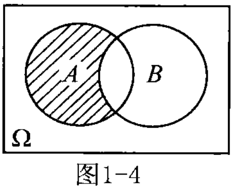


图1-4

(5) **差**　事件 A 发生但 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{\omega \mid \omega \in A \text{ 但 } \omega \notin B\}$$

图 1-4 表示了 A 与 B 的差事件(阴影部分).

(6) **互不相容(互斥)**　若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A \cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容(或互斥),记作 $A \cap B=\varnothing$ 或 $AB=\varnothing$. 图 1-5 表示了 A,B 的互斥关系.

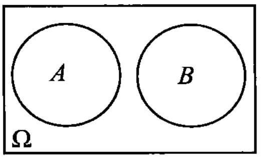


图1-5

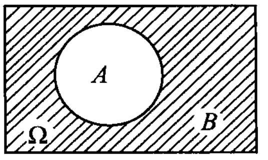


图1-6

(7) **对立(互逆)**　若事件 A,B 不能同时发生,且必有一个发生,即 A,B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A \cup B=\Omega$,则称 A 与 B 互为对立事件(或互逆事件),记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$,即 A 的对立事件 $\overline{A}$ 就是 A 不发生的事件:

$$\overline{A}=\{\omega \mid \omega \notin A\}=\Omega-A$$

图 1－6 表示了 A 的对立事件为 B(阴影部分).

(8) **完全(备)事件组**　若有限个或可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 满足 $A_iA_j=\varnothing(i \neq j)$,且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\Omega$,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个完全事件组或完备事件组.

2. 事件运算的性质

(1) 交换律　$A \cup B=B \cup A$,　$AB=BA$.

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)=A \cup B \cup C$,

$$(AB)C=A(BC)=ABC.$$

(3) 分配律　$A(B \cup C)=AB \cup AC$,

$$A \cup (BC)=(A \cup B)(A \cup C),$$

$$A(B-C)=AB-AC,$$

$$A(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n} AA_i.$$

(4) 对偶律(De・Morgan 律) $\overline{A \cup B}=\overline{A}\overline{B}$,　$\overline{AB}=\overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}(i \geqslant 1).$$

(5) 吸收律　$A \cap (A \cup B)=A$,　$A \cup (A \cap B)=A$.

(6) 双重否定律　$\overline{\overline{A}}=A$.

(7) 排中律　$A \cup \overline{A}=\Omega$,　$A\overline{A}=\varnothing$.

(8) 差积转换律　$A-B=A\overline{B}$.

三、事件的概率及其性质

概率是事件发生的可能性大小的定量描述,是事件的本质特征,它客观存在,我们常用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率.

1. 概率的统计定义

在相同条件下,独立重复进行 n 次试验,则事件 A 在 n 次试验中发生的次数称为 A 发生

的频数，记为 μ_A，比值 $f_n(A)=\frac{\mu_A}{n}$ 称为 A 发生的频率. 当试验次数 n 增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出某种稳定性，即它在某一常数 p 附近波动，且 n 越大，波动的幅度越小，则称 p 为事件 A 发生的概率. 显然，p 固然存在，但实际中无法精确确定它，于是多用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值.

2. 概率的古典定义

若试验 E 的样本空间 Ω 只包含有限个样本点，即有限个基本事件，且每个样本点出现的可能性相同，则称试验 E 为古典概型. 此时，事件 $A\subset\Omega$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}$$

上式计算出的概率称为古典概率.

3. 概率的几何定义

若试验 E 的样本空间 Ω 为几何空间中的一个有界区域（这个区域可以是一维、二维、三维、甚至 n 维的），且 Ω 中每个样本点，即基本事件出现的可能性相同，则称试验 E 为几何概型，此时，事件 $A\subset\Omega$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量（长度、面积、体积）}}{\Omega\text{ 的度量（长度、面积、体积）}}$$

上式计算出的概率称为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对 E 的任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：对任意两两互不相容的事件列：$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的基本性质

(1) 对于不可能事件 $\varnothing$，$P(\varnothing)=0$；对于必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$.

(2) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(5) 广义加法公式（多除少补原理）：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),$$

特别有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)$

$$+P(ABC).$$

(6) 减法公式：　　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别当 $B\subset A$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(B)\leqslant P(A)$.

四、条件概率与乘法公式

1. 条件概率

对于任意两个事件 A 和 B，其中 $P(A)>0$，事件 B 在“事件 A 已发生”的条件下发生的概率，简称为“事件 B 关于 A 的条件概率”，定义为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

对于固定的事件 A，条件概率 $P(B\mid A)$ 具有(无条件) 概率的一切性质.

2. 乘法公式

设 A,B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

若 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

五、全概率公式和 Bayes 公式

1. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 为一个完全事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n,\cdots$ 则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

2. Bayes 公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 为一完全事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,\cdots,n,\cdots,P(B)>0$，则有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i)},\ j=1,2\cdots$$

六、事件的独立性与伯努利(Bernoulli) 概型

1. 事件的独立性

(1) 对于两个事件 A,B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

(2) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意两个事件相互独立，即对 $\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$，均有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意 k 个事件($2\leqslant k\leqslant n$)：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots A_{i_k}$ 均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(4) 对于事件序列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$，如果对任意正整数 $n(n\geqslant 2)$，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则称事件序列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立.

2. 独立事件的性质

(1) 若 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i}).$$

3. 试验的独立性

(1) 如果试验 E_1 和 E_2 分别产生的任意两个事件 A_1 与 A_2 都相互独立，则称试验 E_1 和 E_2 相互独立，其直观含义是一个试验结果的发生不影响另一个试验结果发生的概率.

(2) 对于 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，如果它们分别产生的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都相互独立，则称 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相互独立.

4. 伯努利(Bernoulli)概型

(1) 伯努利概型 只考虑两个对立的结果：A(成功)和 $\overline{A}$(失败)的试验称为伯努利概型，或伯努利试验，将这样一个伯努利试验独立重复进行 n 次就称为一个 n 重(次)伯努利试验，或 n 重伯努利概型，有时也简称为伯努利概型. 在这里，“独立”是指试验之间相互独立，“重复”是指每次试验中 A 发生的概率保持不变.

(2) 伯努利概型概率计算公式 在 n 重 Bernoulli 概型中，设 $P(A)=p$，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为 $\quad P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n.$

■ 例题讲解

一、古典概型与几何概型

【例 1.1】 某班有 50 名同学，其中正、副班长各 1 名，现从中任意选派 5 名同学参加假期社会实践活动，试求正、副班长至少有一个被选派上的概率.

【详解】 设 $A=\{$正、副班长至少有一个被选上$\}$，

方法一：基本事件总数为 C_{50}^5，有利事件数为 $C_2^1C_{48}^4+C_2^2C_{48}^3$，故

$$P(A)=\frac{C_2^1C_{48}^4+C_2^2C_{48}^3}{C_{50}^5}=\frac{47}{245}.$$

方法二：因为 $\overline{A}$ 的有利事件数为 C_{48}^5，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{48}^5}{C_{50}^5}=1-\frac{198}{245}=\frac{47}{245}.$$

【例 1.2】 袋中有 a 个红球，b 个白球，现从袋中每次任取一球，取后不放回，试求第 k 次取到红球的概率 $(1\leqslant k\leqslant a+b)$.

【详解】 **方法一**:排列法

设各个球是有区别的，比如对每个球进行了编号，把取出的球依次排列在一直线上的 $a+b$ 个位置上，则样本空间中基本事件总数为 $a+b$ 个球在 $a+b$ 个位置上的全排列数:$(a+b)!$ 令 $A=\{$第 k 次取到红球$\}$. 第 k 次取到红球相当于首先在第 k 个位置上排红球，共有 a 种排法;其次在其余的 $a+b-1$ 个位置上排剩下的 $a+b-1$ 个球，共有 $(a+b-1)!$ 种不同排法，由乘法原理得有利于事件 A 的事件数为 $a\cdot(a+b-1)!$，故

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法二:组合法

除了颜色之外，将各个球看作没有区别，将取出的球还是依次放在直线上的 $a+b$ 个位置上，此时 a 个红球在 $a+b$ 个位置上的所有不同放法为组合数 C_{a+b}^a(因 a 个红球之间没有区别，也就是不须考虑其排列次序，所以是组合数)，而这个数就是 a 个红球被取出的所有不同取法总数，即样本空间中基本事件总数. 令 $A=\{$第 k 次取到红球$\}$. 第 k 次取到红球，即在第 k 个位置上必须放红球，其余的 $a-1$ 个红球可放在其余的 $a+b-1$ 个位置的任意 $a-1$ 个位置上，其所有不同的放法为组合数 C_{a+b-1}^{a-1}，即有利于事件 A 的基本事件数，故

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b}.$$

【评注】 (1) 本例说明不放回取球模型中，第 k 次取到红球的概率与次序 k 无关，它是一个常数，这正说明了在实际中抽签或抓阄问题的公平性.

(2) 本例说明同一个试验，样本空间的选取可以不同，但若都按古典概型求解，则必须保证都满足“等可能性”和“有限性”，而且求解时基本事件总数和有利事件数的计算要一致，即要么都用排列，要么都用组合.

(3) 本例也可以利用全概率公式，对 k 用归纳法求得概率为 $\frac{a}{a+b}$.

【例 1.3】 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求此 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

【分析】 本例的基本事件总数容易计算，即为 C_{10}^4，但有利事件数相对较难，下面给出几种不同解法.

【解法一】 首先从 5 双鞋中取出一双，并将此两只鞋全部取出，然后从剩下的 4 双中取出两双，再在每双中各取 1 只，于是取法共有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$ 种. 显然，这样取得的 4 只鞋仅有一双成对，而 4 只鞋配成两双的取法有 C_5^2 种，故取得的 4 只鞋至少有一双的取法为 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2$. 故所求概率

$$P=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

【解法二】 设A表示“至少有两只鞋子成一双”，于是$\overline{A}$表示“没有成双的鞋子”，故有利于$\overline{A}$的基本事件数为$C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，即从5双中取出4双，再从每双中各取一只的取法总数，所以

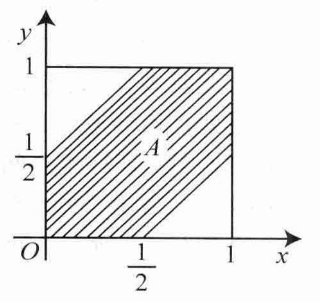
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

【评注】 本例再次说明，概率的求逆公式可使问题的求解大为简化，因此务必熟练掌握此技巧. 另外，本题有下面很迷惑人的错误解法，请自己分析错误所在：首先从5双鞋中任取1双，其2只全部取出，然后在剩下的8只鞋中任取2只，于是总的取法为$C_5^1C_2^2C_8^2$，并且这样取出的4只鞋可保证至少有两只成一双，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_8^2}{C_{10}^4}=\frac{2}{3}\neq\frac{13}{21}.$$

【例1.4】 (2007数1,3) 在区间(0,1)中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为________.

【详解】 显然，这是一个几何概型，设x，y为所取的两个数，则样本空间$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x,y<1\}$，记$A=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega,\ |x-y|<\frac{1}{2}\}$.

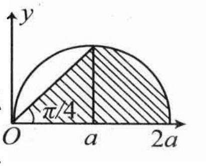


故$P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1}=\dfrac{3}{4}$，其中$S_A$，$S_\Omega$分别表示$A$与$\Omega$的面积.

【例1.5】 随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}\ (a>0)$内掷一个点，点落在半圆内任何区域的概率均与该区域的面积成正比，求该点与原点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率.

【分析】 题目中“随机地”即表示试验结果的等可能性，“点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比”更强调试验的等可能性，因试验结果非有限个，容易想到用几何概率来计算.

【详解】 如图，设事件A表示“点与原点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$”.



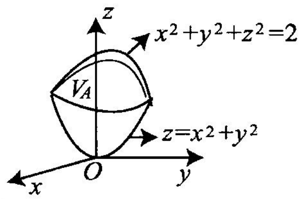
于是样本空间$\Omega=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$，即为图中的半圆，其面积为$\frac{1}{2}\pi a^2$；而$A=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega,x>y\}$，其面积为$\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2$. 由几何概率计算公式有

$$P(A)=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

【例1.6】 随机地向球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 2$内投点，设点落在球体内任何区域的概率与该区域的体积成正比，试求所投点的坐标满足$z\geqslant x^2+y^2$的概率(对经济类考生，本题仅作参考).

【详解】 由题意易知这是一个几何概型，其样本空间为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2\},$$



所求概率的事件为

$$A=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega,z\geqslant x^2+y^2\}$$
$$=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2,z\geqslant x^2+y^2\}.$$

又 Ω 的体积为　$V_\Omega=\frac{4}{3}\pi\cdot(\sqrt{2})^3=\frac{8}{3}\pi\sqrt{2}.$

由于立体 A 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，故 A 的体积为

$$V_A=\iint_D\sqrt{2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

作极坐标变换：$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$有

$$V_A=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi-\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi-\frac{7}{6}\pi.$$

故所求概率为　$$P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}=\frac{1}{2}-\frac{7}{32}\sqrt{2}.$$

【小结】 1. 古典概型中事件概率的计算一般按以下步骤进行：

(1) 正确判断试验为古典概型概率，即试验必须有两个特点：① 试验的所有可能结果只有有限个；② 每个结果发生的可能性相同.

(2) 恰当选取样本空间 Ω，并计算 Ω 中样本点的个数 n.

(3) 计算要求事件 A 中包含的样本点的个数 k.

(4) 由古典概型概率计算公式得到：$P(A)=\frac{k}{n}$.

另外，在具体计算过程中要注意下面几点：

(1) 对比较简单的试验，即样本空间所含样本点的个数很少，这时可直接写出样本空间 Ω 和事件 A，然后数出各自所含的样本点的个数即可.

(2) 对于较复杂的试验，一般不再写出样本空间 Ω 和事件 A 中的元素，而是利用排列组合方法计算出它们各自所含的样本点数，但这时一定要保证 n 和 k 的计算方法一致，即要么都用排列，要么都用组合进行计算，否则就容易出现错误结果.

2. 几何概型中事件概率的计算一般可按以下步骤进行：

(1) 选取合适的模型，即样本空间 Ω.

(2) 在坐标系中正确表示 Ω 与所求概率的事件 A 所在的区域.

(3) 计算 Ω 与 A 的几何度量 $m(\Omega)$，$m(A)$ 得到概率 $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

3. 抽签原理：设一个口袋中有 a 个黄球，b 个白球，不放回地从中任意依次将球摸出，则第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次摸到黄球的概率为 $\frac{a}{a+b}$（与 k 无关）. 在选择和填空题中可直接应用.

二、事件的关系与概率性质

【例 1.7】 已知$(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})+\overline{\overline{A}+B}+\overline{\overline{\overline{A}}+B}=C$,且$P(C)=\frac{1}{3}$，试求$P(B)$.

【详解】 因为$(A+\overline{B})\overline{A}+(A+\overline{B})\overline{B}+\overline{A}\overline{B}+A\overline{B}=C$，于是

$$\overline{B}\,\overline{A}+\overline{B}+(\overline{A}+A)\overline{B}=C,\quad \overline{B}\,\overline{A}+\overline{B}+\overline{B}=C.$$

即 $\overline{B}\overline{A}+\overline{B}=C$， 亦即$\overline{B}=C$.

所以

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(C)=\frac{2}{3}.$$

【评注】 $(A+B)-B\neq A$，事实上，若$A\subset B$，则$(A+B)-B=\varnothing$．若$AB=\varnothing$，则$(A+B)-B=A$.

【例 1.8】 设A，B为两个事件，且$A\neq\varnothing$,$B\neq\varnothing$，则$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$表示

(A) 必然事件.

(B) 不可能事件.

(C) A与B不能同时发生.

(D) A与B中恰有一个发生.

[　　]

【详解】 易得$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{B}+B\overline{A}$. 故选(D).

注意不要错选(C). 事实上(C)表示的是$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，其中包含了$A$与$B$都不发生的情况.

【例 1.9】 (2000 数 1) 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则$P(A)=$ ________.

【分析】 利用事件的运算公式和事件的独立性进行推算即可.

【详解】 由题设，有$P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{9}$,$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$. 因为$A$，$B$相互独立，所以$A$与$\overline{B}$,$\overline{A}$与$B$,$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立. 于是由$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$得

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB),\quad 即\quad P(A)=P(B).$$

又

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-P(A))^2=\frac{1}{9}.$$

解得

$$P(A)=\frac{2}{3}.$$

【例 1.10】 (1990 数 1) 设随机事件A，B及其和事件 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6. 若$\overline{B}$表示B的对立事件，那么积事件$A\overline{B}$的概率$P(A\overline{B})=$ ________.

【分析】 利用公式$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$进行推导即可.

【详解 1】 由已知得：

$$0.6=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-P(AB),$$

得

$$P(AB)=0.1,$$

故 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$

【详解 2】 由加法公式移项可得

$$P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3,$$

即 $P(A\overline{B}) = 0.3$.

【例 1.11】 (2009 数 3) 设事件 A 与 B 互不相容，则

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A) = 1 - P(B)$. (D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$. [ ]

【详解】 因为事件 A 与 B 互不相容，于是 $AB = \varnothing$,即 $\overline{A} \cup \overline{B} = \Omega$,故 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$. 即(D) 正确.

【例 1.12】 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件,且 $0 < P(C) < 1, P(AC) > 0$,则在下列给定的四对事件中不相互独立的是

(A) $\overline{A+B}$ 与 C. (B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$.

(C) $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$. (D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$. [ ]

【详解】 利用排除法,由多个事件相互独立的性质可知(A),(C),(D) 中的三对事件都是独立的,故选(B).

另外,利用独立的定义也可得到答案：

由于 $P(\overline{AC}\,\overline{C}) = P[(\overline{A}+\overline{C})\overline{C}] = P(\overline{C})$,而 $P(\overline{AC})P(\overline{C}) = P(\overline{A}+\overline{C})P(\overline{C})$.

又 $0 < P(C) < 1, P(AC) > 0$, 有 $0 < P(\overline{A}+\overline{C}) < 1$,于是

$P(\overline{AC})P(\overline{C}) < P(\overline{C}) = P(\overline{AC}\,\overline{C})$,故 $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 不相互独立.

【例 1.13】 (2000 数 4) 设 A,B,C 三个事件两两独立,则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是

(A) A 与 BC 独立.

(B) AB 与 $A \cup C$ 独立.

(C) AB 与 AC 独立.

(D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立. [ ]

【详解】 利用排除法即知(A) 为正确答案.因为由多个事件独立性的性质,能够肯定的结论只有(A),从而必要条件中只有(A) 正确,又这是单选题,故选(A),读者不妨作为练习依定义可验证(A) 为正确答案.

【例 1.14】 (2003 数 4) 对于任意二事件 A 和 B

(A) 若 $AB \neq \varnothing$,则 A, B 一定独立.

(B) 若 $AB \neq \varnothing$,则 A, B 有可能独立.

(C) 若 $AB = \varnothing$,则 A, B 一定独立.

(D) 若 $AB = \varnothing$,则 A, B 一定不独立. [ ]

【分析】 本题考查独立与互斥事件之间的关系,事实上,独立与互斥事件之间没有必然的互推关系.

【详解】 $AB \neq \varnothing$ 推不出 $P(AB) = P(A)P(B)$，因此推不出 A, B 一定独立,排除(A)；若 $AB = \varnothing$ 则 $P(AB) = 0$,但 $P(A)P(B)$ 是否为零不确定,因此(C),(D) 也不成立,故正确选项为(B).

【评注】 当 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 时，若 A, B 相互独立，则一定有 $P(AB) = P(A)P(B) \neq 0$,从而有 $AB \neq \varnothing$. 可见，当 A, B 相互独立时，往往 A, B 并不是互斥的.

【例 1.15】 (2002 数 4) 设 A, B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1,证明