



全国教育科学“十五”规划课题研究成果

有限元法 基本原理及应用

主 编 尹飞鸿



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

有限元法基本原理及应用

Youxianyuanfa Jiben Yuanli ji Yingyong

主 编 尹飞鸿

副主编 郭 魂 杨小斌 王占军



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书首先系统地阐述了有限元分析的基本理论,在此基础上详细地介绍了通用有限元分析软件 ANSYS 的具体应用。全书分为上下两篇。上篇阐述了有限元法的基本原理,包括有限元法的基本思想、特点及其应用领域,弹性力学基本理论,弹性力学有限元法,有限元分析中的若干问题等内容。下篇以 ANSYS 为平台,系统论述了有限元求解问题的基本方法,内容包括 ANSYS 概述, ANSYS 建模与网格划分, ANSYS 加载与求解, ANSYS 工程应用实例及其动力学分析等。

本书可以作为理工类院校本科生、研究生及教师学习有限元法的基本原理及 ANSYS 软件的教材,也可以作为机械工程、土木工程、交通运输工程、电力电子、航空航天、石油化工、水利工程等领域的科研人员和工程技术人员使用 ANSYS 软件的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法基本原理及应用/尹飞鸿主编. —北京:高等教育出版社, 2010. 7

ISBN 978 - 7 - 04 - 029098 - 1

I. ①有… II. ①尹… III. ①有限元法 - 高等学校 - 教材 IV. ①O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 075836 号

策划编辑 段博原 责任编辑 边晓娜 封面设计 于涛
责任绘图 尹莉 版式设计 余杨 责任校对 俞声佳
责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市文林印务有限公司

开 本 787 × 960 1/16
印 张 17.5
字 数 330 000

购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010年7月第1版
印 次 2010年7月第1次印刷
定 价 27.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29098 - 00

前 言

随着 CAD/CAE/CAM 技术的日益成熟以及计算机技术的不断发展, 产品的设计与制造方法、方式也随之发生了根本性的改变。为了更好地满足用户的需求, 现代企业越来越关注产品质量、产品的开发周期和开发成本, 有限元法及其软件作为产品开发的重要技术之一, 其应用价值日益显现。

本教材以工程实际运用为背景, 系统介绍了有限元法基本原理、基本方法及其应用软件。全书分为上下两篇共九章。上篇共分四章, 系统地阐述了有限元法的基本原理。第 1 章概述, 主要介绍了有限元法的基本思想、特点及其应用领域; 第 2 章弹性力学基本理论, 主要介绍了弹性力学的基本假设、基本概念、基本方程、求解平面问题的基本理论和弹性力学中的能量原理; 第 3 章弹性力学有限元法, 主要介绍了有限元求解问题的基本步骤, 包括连续体离散化、单元分析、整体分析、边界约束条件处理及求解和后处理等内容; 第 4 章有限元分析中的若干问题, 主要介绍了有限元建模的基本原则和简化策略。下篇共分五章, 主要以 ANSYS 为平台, 系统论述了有限元求解问题的基本方法。第 5 章 ANSYS 概述, 主要介绍 ANSYS 的主要功能、界面及使用与设置; 第 6 章 ANSYS 建模与网格划分, 主要介绍 ANSYS 的坐标系统、ANSYS 的建模和网格划分; 第 7 章 ANSYS 加载与求解, 主要介绍 ANSYS 的载荷的概念、加载、求解与后处理; 第 8 章 ANSYS 工程应用实例, 主要对常见的平面梁架类、一般平面类、板壳类等工程问题进行了详细的分析; 第 9 章动力学分析简介, 简单介绍了动力学分析过程中的一些常见问题。

本书的指导思想是: 先讲清原理, 进而理论联系实际, 最终达到学以致用目的。其结构体系力求体现基础性、知识的连贯性和应用性的特点, 既强调理论阐述, 又注重案例分析和实际操作, 适合各个层次的读者学习。

本书第 1 章由常州工学院尹飞鸿编写, 第 2、4 章由河海大学王占军编写, 第 3 章由常州工学院杨小斌编写, 第 5、6 章由江苏技术师范学院朱福先编写, 第 7 章由常州工学院尹飞鸿、刘峰编写, 第 8 章由常州工学院尹飞鸿及南京航空航天大学在读博士后郭魂共同编写, 第 9 章由常州工学院何亚峰编写; 各章习题由常州工学院何亚峰及黑龙江大学数学科学学院李锐编写; 书后附录由尹飞鸿与王占军两人共同编写。全书由尹飞鸿负责统稿。

本书由东南大学博士生导师陈南教授主审, 在审阅过程中, 陈南教授提出了很多珍贵的建议和意见, 在此表示衷心感谢。在编写过程中本书还得到了南

京航空航天大学机械学院在软件和设备方面的帮助，并得到高等教育出版社的大力支持，在此一并表示诚挚的感谢。

本书可以作为理工类院校本科生、研究生及教师学习有限元法的基本原理及 ANSYS 软件的教材，也可以作为机械工程、土木工程、交通运输工程、电力电子、航空航天、石油化工、水利工程等领域的科研人员和工程技术人员使用 ANSYS 软件的参考书。

鉴于作者的经验有限，本书存在不足是在所难免的，恳请读者指正。

编 者

2010 年 4 月

目 录

上篇：有限元法基本原理

第1章 概述	3
1.1 有限元法的基本思想	3
1.2 有限元法的特点	4
1.3 有限元法的发展及其应用领域	6
1.3.1 有限元法的发展	6
1.3.2 有限元法的应用领域	8
1.4 本章小结	9
第2章 弹性力学基本理论	10
2.1 弹性力学的基本假设	10
2.2 弹性力学的基本概念	11
2.2.1 体力	11
2.2.2 面力	12
2.2.3 应力	12
2.2.4 应变	14
2.2.5 位移	14
2.2.6 主应力	15
2.2.7 主应变	16
2.3 弹性力学基本方程	17
2.3.1 平衡微分方程	17
2.3.2 几何方程	17
2.3.3 物理方程	18
2.3.4 边界条件	19
2.4 平面问题的基本理论	20
2.4.1 平面应力问题	20
2.4.2 平面应变问题	21
2.4.3 平面问题的基本方程	21
2.5 弹性力学中的能量原理	23

2.5.1	虚位移原理	24
2.5.2	极小势能原理	25
2.6	本章小结	26
第3章	弹性力学有限元法	27
3.1	有限元法求解问题的基本步骤	27
3.2	连续体离散化	28
3.2.1	杆状单元	28
3.2.2	平面单元	29
3.2.3	薄板弯曲单元和薄板单元	30
3.2.4	多面体单元	31
3.2.5	等参单元	31
3.2.6	轴对称单元	32
3.3	单元分析	33
3.3.1	单元的插值函数	33
3.3.2	单元分析	35
3.3.3	载荷移置	37
3.4	整体分析	38
3.5	边界条件处理	40
3.5.1	划行划列法	40
3.5.2	对角线元素置1法	40
3.5.3	对角线元素乘大数法	41
3.6	求解、计算结果的整理和有限元后处理	41
3.7	本章小结	42
第4章	有限元分析中的若干问题	43
4.1	有限元计算模型的建立	43
4.1.1	有限元建模的准则	44
4.1.2	边界条件的处理	44
4.1.3	连接条件的处理	46
4.2	减小解题规模的常用措施	47
4.2.1	对称性和反对称性	47
4.2.2	周期性条件	49
4.2.3	降维处理和几何简化	50
4.2.4	子结构技术	51
4.2.5	线性近似化	53
4.2.6	多种载荷工况的合并处理	53

4.2.7 节点编号的优化	53
4.3 本章小结	55

下篇：有限元技术应用

第5章 ANSYS 概述	59
5.1 ANSYS 的功能	59
5.1.1 基本功能	59
5.1.2 高级功能	61
5.2 ANSYS 界面介绍	61
5.3 ANSYS 使用与设置	64
5.3.1 启动与退出	64
5.3.2 图形拾取操作	67
5.3.3 ANSYS 图形控制	69
5.3.4 ANSYS 文件管理	71
5.3.5 ANSYS 单位制	75
5.4 本章小结	75
5.5 习题	76
第6章 ANSYS 建模与网格划分	77
6.1 ANSYS 的坐标系统	77
6.1.1 总体坐标	77
6.1.2 局部坐标	78
6.1.3 显示坐标	78
6.1.4 节点坐标	79
6.1.5 单元坐标	80
6.1.6 结果坐标	80
6.1.7 工作平面	80
6.2 ANSYS 的建模	83
6.2.1 实体建模	83
6.2.2 自底向上建模	83
6.2.3 自顶向下建模	90
6.2.4 布尔运算	96
6.3 网格划分	102
6.3.1 定义单元属性	102
6.3.2 网格划分	107
6.3.3 直接生成节点和单元	116

6.4	耦合与约束	119
6.4.1	耦合	119
6.4.2	约束	120
6.5	本章小结	121
6.6	习题	121
第7章	ANSYS 加载与求解	122
7.1	载荷的概念	122
7.1.1	ANSYS 中的载荷类型	122
7.1.2	载荷步和子步	122
7.1.3	时间的作用	123
7.1.4	阶跃载荷与斜坡载荷	124
7.2	加载	125
7.2.1	自由度约束	125
7.2.2	集中力加载	127
7.2.3	面载荷	128
7.2.4	其他载荷的加载	130
7.2.5	删除载荷和其他操作	131
7.3	求解	132
7.3.1	求解器	132
7.3.2	分析类型	133
7.3.3	求解	134
7.3.4	多载荷步结构分析实例	135
7.4	后处理	140
7.4.1	通用后处理器	140
7.4.2	通用后处理器的选项控制	141
7.4.3	图形显示结果数据	143
7.4.4	结果查询	148
7.4.5	结果浏览器	149
7.4.6	单元表	150
7.4.7	路径操作	152
7.4.8	载荷工况	158
7.4.9	时间 - 历程后处理器	159
7.5	本章小结	164
7.6	习题	165
第8章	ANSYS 工程应用实例	166
8.1	平面梁架类问题	166

8.1.1	平面梁架类问题的有限元分析要点	166
8.1.2	平面梁架类工程实例	166
8.2	一般平面类问题	180
8.2.1	一般平面类问题的有限元分析要点	180
8.2.2	一般平面类问题工程实例	181
8.3	板壳类问题	190
8.3.1	板壳类问题的有限元分析要点	190
8.3.2	板壳类问题工程实例	191
8.4	三维实体类问题	198
8.4.1	三维实体类问题的有限元分析要点	198
8.4.2	三维实体类问题工程实例	200
8.5	复杂结构类问题	212
8.5.1	复杂结构类问题的有限元分析要点	212
8.5.2	复杂结构类问题工程实例	212
8.6	本章小结	224
8.7	习题	225
第9章	动力学分析	226
9.1	动力学分析简介	226
9.1.1	动力学分析概述	226
9.1.2	动力学分析类型	226
9.2	结构动力学分析的基本过程	227
9.2.1	模态分析	227
9.2.2	谐响应分析	230
9.2.3	瞬态动力学分析	232
9.2.4	谱分析	234
9.3	涡轮壳体模态分析实例	236
9.3.1	问题描述	236
9.3.2	求解过程	236
9.4	推进器叶片动力学综合分析实例	244
9.4.1	叶片模态分析	245
9.4.2	叶片谐响应分析	251
9.4.3	叶片瞬态动力学分析	253
9.4.4	叶片谱分析	256
9.5	本章小结	261
9.6	习题	261

附录	262
附录 1 常用物理量名称及其常用符号	262
附录 2 常用的数据量纲关系	263
附录 3 结构静力学中常用的单元类型	264
附录 4 ANSYS 常见术语/命令对照表	265
参考文献	266
后记	268

上篇：有限元法基本原理

第 1 章

概 述

1.1 有限元法的基本思想

有限元法 (FEM, Finite Element Method) 是一种结构分析的方法, 其基本思想是将连续的求解区域离散为一组由有限个单元组成并按一定方式相互连接在一起的单元组合体来加以分析。假想将物体划分为小的单元, 然后对各个单元进行分析, 最后再把单元分析结果整合到整个对象的分析结果中。有限元法的一个重要特点是利用每一个单元内的近似函数来分片地表示全求解域上的待求未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在单元的各个结点的数值及其插值来表示。这样一来, 在针对一个问题的有限元分析中, 未知场函数或其导数在各个结点上的数值就成为新的未知量, 从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一旦求解出这些未知量, 就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值, 从而得到整个求解域的近似值。

在用单元把求解区域离散化方面, 存在一个自由度数量的选取问题。如果自由度选得太少, 近似解的误差很大, 导致结果没有应用价值; 而如果自由度取得过多, 解的近似程度相应增大, 方程的求解规模也随之增大。

有限元法适合解决区域比较复杂的偏微分方程的定解问题。有限单元能按不同的连接方式进行组合, 且单元本身又可以有不同的形状, 因而可以适用于几何形状复杂的求解区域, 有限元法在网格划分方面也比较灵活。有限元法首先体现的是一种思想, 可以基本归纳为如下几点。

(1) 有限元法体现了一种有限与无限统一的思想。

有限与无限是一个对立的统一体。它们的对立主要表现在量上, 统一表现在质上。数学中的极限、级数等是这方面的典型代表, 而有限元法就是这一思想的具体体现。有限元法将研究对象划分为有限个相互联系的个体 (单元), 如果这些单元的形函数及其他方面精确的话, 采用有限个划分和无限个划分是统一的; 如果它的形函数及其他方面近似, 采用单元数越多, 则越接近无限多

的情况，也就越接近精确解。如果插值函数选得合适，单元分得越多、越细，得到的计算结果就越精确，当单元数趋于无穷时，计算结果就收敛于精确解。但是，随着单元数、节点数的增加，计算工作量、存储信息量也会迅速地增加，因此一般都是根据具体问题对精度的要求，选取一定数量（有限个）的单元和节点进行分析。由于这种方法需要求解大型联立方程组，因此，只有在解决了计算机的运算速度和存储容量等问题后，这种方法才有实用意义，才能得到迅速发展。

(2) 有限元法体现了一种应用已知求解未知的思想。

在弹性力学领域，已经能用数学中的偏微分方程将问题加以表达，但是运用解析方法求解这些方程有时会很难甚至无法求解。而有限元法是应用人们对事物规律的已有认识并结合研究对象的各种约束条件，组织一个运用已知的参量和规律来求解未知问题的过程。

(3) 将上述两种思想结合转化为具体的解决方法。

将研究对象划分为有限个单元，这些单元在力学行为等方面具有一定的共性，而在形状、尺寸等方面具有一定个性；同时这些单元与外界还有“消息”的交流。明确了已知参量和未知要求解参量的前提下，有限元法在单元共性表达的基础上，运用已有的对物质运动的规律认识，将未知量表达为一种能够方便求解的形式加以求解。

1.2 有限元法的特点

有限元法具有以下特点：

(1) 物理概念清晰，容易掌握。有限元法一开始就从力学角度进行简化，可以通过非常直观的物理途径来学习并掌握这一方法。

(2) 普通有限元法最后得到的大型联立方程组，其系数矩阵是一个稀疏矩阵，其中所有元素都分布在矩阵的主对角线附近，它是一个对称的正定矩阵，各方程间的联系较弱。这种方程组计算的工作量小、稳定性好、便于求解，而且占用的计算机内存也少。

(3) 建立于严格理论基础上的可靠性。由于用于建立有限元方程的变分原理或加权余量法在数学上证明是偏微分方程和边界条件的等效积分形式，所以只要原问题的数学模型是正确的，同时用来求解有限元方程的算法是稳定、可靠的，则随着单元数目的增加，即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度数目的增加及插值函数阶次的提高，有限元解的近似程度将不断地被改进。如果

单元是满足收敛准则的，则近似解最后收敛于原函数模型的精确解。

(4) 有限元法具有极大的通用性和灵活性。对于各种复杂的因素（如复杂的几何形状，任意的边界条件，不均匀的材料特性，不同类型构件的组合），有限元法都能灵活地加以考虑，而不会发生处理、求解上的困难。由于单元在空间上可以是一维、二维、三维的，而且每一种单元可以有不同的形状（如三维单元可以是四面体、五面体或六面体），各种单元之间可以采用不同的连接方式（如两个面之间可以是场函数保持连续，可以是场函数的导数保持连续，还可以仅是场函数的法向分量保持连续），因此可对计算区域做任意形状的划分，以便处理复杂边界。总之，有限元法具有很强的适应能力。这样一来，工程实际中遇到的非常复杂的结构，都可以离散为单元组合体表示的有限元模型。例如，它不仅能成功地处理如应力分析中的非均质材料、各向异性材料、非线性应力-应变关系及复杂边界条件等难题，而且随着其理论基础和方法的逐步改进和完善，还能够成功地应用于求解热传导、流体力学以及电磁场领域的许多问题。现在它几乎适用于求解所有的连续介质及场问题。

(5) 对于各种物理问题具有广泛的应用性。由于用单元内近似函数分片地表示全求解域的未知场函数，并未限制场函数所满足的方程形式，也未限制各个单元所对应的方程必须是相同的形式，所以尽管有限元法最初是对线弹性的问题提出的，但很快就发展应用到弹塑性问题、粘弹塑性问题、动力问题、屈服问题等，并进一步应用于流体力学问题、热传导问题等，而且可以利用有限元法对不同物理现象耦合的问题进行有效的分析。

(6) 不受物体几何形状和结构的限制。物体的几何形状可以用大大小小的多种单元进行拼装，所以有限元法可以分析包括各种特殊结构的复杂结构体。有限元法中单元之间材料的性质可以有跳跃性的变化，所以它能处理许多物体内部带有间断性的复杂问题，以适应不连续的边界条件和载荷条件。

(7) 适合计算机的高效计算。由于有限元分析的各个步骤，可以表达成规范化的矩阵形式，因此求解方程可以统一为标准的矩阵代数问题，特别适合计算机的编程和执行。随着计算机软硬件技术的高速发展，以及新的数值计算方法的不断出现，大型复杂问题的有限元分析已成为工程技术领域的常规工作。

有限元法的这些特点，正好可以克服工程科学计算中所遇到的许多困难。已有方程描述的物理问题解不出来，主要是因为几何形状复杂、边界条件复杂、本构关系复杂，而利用有限元离散化的手段，用各种小单元来适应这些复杂多变的情况，用分块近似插值函数来逼近全域上的连续函数，问题就可以迎刃而解了。

1.3 有限元法的发展及其应用领域

1.3.1 有限元法的发展

有限元法经历了诞生、发展和完善 3 个历史时期，其理论已日趋完善，并广泛应用于各个领域。

1. 有限元法的诞生

有限元法基本思想的提出，可以追溯到 1943 年 Courant 的工作。他首先从应用数学角度尝试应用一系列三角形区域上定义的分片连续函数和极小势能原理相结合来求解 Saint - Venant 扭转问题，并第一次提出了单元的概念。1945—1955 年，Argyris 等人在结构矩阵分析方面取得了很大进展。Turner 等人于 1956 年将刚架分析中的位移法推广到弹性力学平面问题，并应用于飞机结构的分析。他们首先给出了采用三角形单元法求解平面应力问题的正确解答，其研究工作开创了利用电子计算机求解复杂弹性力学问题的新阶段。1960 年 Clough 进一步求解了平面弹性问题，并第一次提出了“有限元法”这一名称，将其描述为“有限元法 = Rayleigh Ritz 法 + 分片函数”，从而使人们更清楚地认识到有限元法的特性和功能。此后，不少应用数学家、物理学家和工程师分别从不同角度对有限元法的离散理论、离散方法及其应用进行了研究。

2. 有限元法的发展和完善

20 世纪 60 年代末至 70 年代初，人们加强了对有限元分析（FEA, Finite Element Analysis）数学基础的研究，如大型线性方程组和特征值问题的数值方法、离散误差分析、解的收敛性和稳定性等，于是出现了大型通用有限元程序，它们以功能强、使用方便、计算结果可靠和效率高的优势逐渐形成一种新的技术商品，成为结构工程强有力的分析工具。

20 世纪 70 年代到 80 年代中期，随着计算机工作站的出现和广泛应用，原来运行于大型机、中型机上的 FEA 系统得以在工作站上运行，从而推动了有限元法向着深度和广度发展。有限元分析方法从最早的结构化矩阵分析，逐步推广到板、壳各实体等连续体的固体力学分析，同时也出现了一批通用的 FEA 软件，如 SAP、ASKA、NASTRAN、ANSYS - PC 等，这些 FEA 软件可用于许多领域的结构强度、刚度分析，从而推动了有限元法在工程中的实际应用。

从 20 世纪 80 年代后期到 90 年代，一方面，在理论上，随着科学技术的