九年义务教育三年制初级中学

代数解题思想策略方法（第二册）

张国旺　王岳庭　主编

北京师范大学出版社

九年义务教育三年制初级中学

代数解题思想策略方法

第二册

主编　张国旺　王岳庭
编著　项昭义　屠新民

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

九年义务教育三年制初级中学　代数解题思想策略方法　第2册/张国旺,王岳庭主编;项昭义,屠新民编著.—北京:北京师范大学出版社,1997.8

ISBN 7-303-04418-3

Ⅰ.代…　Ⅱ.①张…②王…③项…④屠…　Ⅲ.代数课-初中-解题　Ⅳ.G634.625

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第05206号

北京师范大学出版社出版发行

(100875　北京新街口外大街19号)

北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本:787×1092 1/32　印张:6.625　字数:135千

1997年8月北京第1版　1997年8月北京第1次印刷

印数:1—5 000册

定价:6.50元

前　言

《代数解题思想策略方法》与**《几何证题思想策略方法》**是一套专门讲述九年义务教育三年制初级中学教科书的《代数》、《几何》各册中的解题思想和方略的辅助读物. 相应地按照教科书的册数和章节顺序撰写,每章中所涉及到的思想和方略仅限于用本章的基本知识和基本技能以及之前学过的“双基”内容范围之内可解的题型. 也就是说,对于每一思想和方法的出现,不作全面系统地阐述该方法的理论,而是只讲本章知识范围内可能用到的一些侧面. 随着日后“双基”学习的不断增长,在以后的各章中将这一方法逐步加以补充和完善. 不过,每章从不同角度所介绍的方法,总的说来,不仅可以满足于课本中的复习题、与课本相配套的课外习题集中的综合题以及与课本相适应的基础训练中有一定难度的题目的需要,而且,对于在此“双基”之上的竞赛题型,也提供了相应的解题思路与途径. 特别是学生理应掌握,而在配套练习中又未曾出现过的题型,也有范例以资弥补. 总之,期望用这套书所阐述的思想和方略之矢,足以能射题海中之的.

每章分为五大部分.

一、数学思想及其唯物辩证观

将突出用本章出现的数学思想来解的题目以及较为显著体现唯物辩证法的题目归入这一部分. 重在分析用其思想之巧妙以及唯物辩证法在解题中的作用.

二、数学思维方法

集中表现用数学思维方法来解的题目归入这一部分. 重在阐述此类题型的解题策略上.

三、一般数学方法与技巧

常用数学方法可解的题目归入这一部分. 全面阐述方法步骤,并指明应用中的技巧.

四、特殊数学方法与技巧

必须用特殊的数学方法来解的题目归入这一部分. 重在介绍特殊方法以及解题过程中的一些特殊技巧.

五、一题一议

这种题目只能用一种特殊的途径来处理. 可是,在阐发这种思路之后,确有举一反三,深化题目之效.

这里需要说明的是数学方法、数学思维方法和数学思想这三者没有严格的界定,仅在其层次和应用的意义上有所不同. 数学方法就是直接应用于解数学题的做法,它有一定确切的内涵,有具体的、可操作的步骤和作法,应用起来更直接有效. 如代入法、比较法、配方法、待定系数法和换元法等等. 数学思维方法是抽象程度较高,更具有一般性的提供解题策略和思路的方法. 如抽象与概括、归纳与演绎、递推与类比等等. 数学思想是解数学题的指导思想,它更抽象更概括,只是提示一种思考的方向,并不具备实施操作的步骤,但其应用却更为广泛. 如数形结合的思想、函数和方程的思想、分类讨论的思想以及等价转化的思想等等. 不过,每种思想一旦在某一侧面构成具体的模式,也就形成一种具体的方法.

在这套书中,对于思想和方法不给予理论上的探讨. 仅在每节的标题中出现,对提到的思想和方法仅在内文中略加说明. 主要是通过有限的可能出现的各种题型的实例,以提供足

量的感性材料，用以充实学生对所述方法的感性认识和悟性.使学生在不知不觉的逐步学习之中，潜移默化地培养他们的唯物辩证观和科学的思维.通过他们自己的学习，以逐步形成他们的创造思维的广阔天地.

这套书可读性强，可以丰富假日益趣，开阔知识视野，拓宽思维途径和增进能力基础.因此，这套书是教师理想的教学参考；是学生期望的自学良师；是家长渴求的辅导帮手.

这套书的设想与撰写还是首次，难免有不尽如人意之处.在此诚恳地希望读者提出宝贵意见.我们满怀信心，相信通过不断修订是会得到充实和完善的.

主编　张国旺　王岳庭

1997年4月6日

目　录

第八章　因式分解

§1　数学思想及其唯物辩证观

一、转化的数学思想及其“顺”、“逆”运算的辩证关系

本章突出的数学思想是转化，也就是将高次运算转化为较低次的运算. 即将高次的多项式分解而转化为若干个较低次的因式的乘积. 这种转化通常要通过观察、分析、尝试，应用提取公因式、乘法公式、十字相乘、分组分解等方法来达到目的.

例 1　计算：

(1) $\dfrac{181^2-61^2}{319^2-209^2}$；　(2) $\dfrac{17.5^2-9.5^2}{131.5^2-3.5^2}$；

(3) $202^2-54^2+256\times352$；

(4) $621^2-769\times373-148^2$.

分析：此题中有 181^2-61^2，319^2-209^2；$17.5^2-9.5^2$，$131.5^2-3.5^2$；202^2-54^2；621^2-148^2. 使我们考虑到多项式的乘法公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

它的逆变形是　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

应用上述变形式，我们就可以将较为复杂的平方运算，降价转化为简单的加、减运算和乘法运算.

解：(1) $\dfrac{181^2-61^2}{319^2-209^2}=\dfrac{(181+61)\times(181-61)}{(319+209)\times(319-209)}$

$$=\frac{242\times120}{528\times110}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\frac{17.5^2-9.5^2}{131.5^2-3.5^2}=\frac{(17.5+9.5)\times(17.5-9.5)}{(131.5+3.5)\times(131.5-3.5)}$

$$=\frac{27\times8}{135\times128}=\frac{1}{80}.$$

(3) $202^2-54^2+256\times352$

$=(202+54)\times(202-54)+256\times352$

$=256\times148+256\times352$

$=256\times(148+352)$

$=256\times500=128000.$

(4) $621^2-769\times373-148^2$

$=(621+148)\times(621-148)-769\times373$

$=769\times473-769\times373$

$=769\times(473-373)$

$=769\times100=76900.$

通过例 1，我们不难得出解此类题目的方法：(1)逆用平方差公式，化平方运算为乘法运算；(2)约分化简或提取因数结合运算求值．同时，例 1 也反映出分解因式的方法，在简化运算时的重要性．

例 2 求证：(1) $7^{10}-7^9-7^8=7^8\times41$；

(2) $10^9+10^8+10^7=5\times10^6\times222$；

(3) 25^7-5^{12}能被 120 整除；

(4) $81^7-27^9-9^{13}$能被 45 整除．

分析：根据乘法的分配律、对多项式运算有

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc,$$

反过来，我们可以得到

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

应用上述结论，能够恰到好处的达到降低次数，解决本例问题的目的.

解：(1) ∵ $7^{10}-7^{9}-7^{8}=7^{8}\times(7^{2}-7-1)$

$=7^{8}\times(49-8)=7^{8}\times41$,

∴ $7^{10}-7^{9}-7^{8}=7^{8}\times41$.

(2) ∵ $10^{9}+10^{8}+10^{7}=10^{7}\times(10^{2}+10+1)$

$=10^{7}\times(100+11)=10^{6}\times10\times111$

$=5\times10^{6}\times222$,

∴ $10^{9}+10^{8}+10^{7}=5\times10^{6}\times222$.

(3) ∵ $25^{7}-5^{12}=(5^{2})^{7}-5^{12}$

$=5^{14}-5^{12}=5^{11}\times(5^{3}-5)$

$=5^{11}\times(125-5)=5^{11}\times120$,

∴ $25^{7}-5^{12}$能被 120 整除.

(4) ∵ $81^{7}-27^{9}-9^{13}=(3^{4})^{7}-(3^{3})^{9}-(3^{2})^{13}$

$=3^{28}-3^{27}-3^{26}=3^{24}\times(3^{4}-3^{3}-3^{2})$

$=3^{24}\times(81-27-9)=3^{24}\times45$,

∴ $81^{7}-27^{9}-9^{13}$能被 45 整除.

通过例 2，我们可以看出，解决此类整除问题的主要思路是：(1)提取适当的因数；(2)将提取因数后的其他数的代数和化简，得到我们能够说明问题的结论，从而解决问题.

二、等价转换的数学思想

将多项式化为若干个因式的乘积，是等价转换的数学思想方法的一种体现. 这种转换往往能使复杂的展开运算，转换为一次因式中的简单加减运算，从而大大减化运算过程.

例 3 已知 $a=\frac{22}{75}, b=\frac{25}{44}$，求 $(a+b)^2-(a-b)^2$ 的值.

解：$(a+b)^2-(a-b)^2$

$=[(a+b)+(a-b)][(a+b)-(a-b)]$

$=2a\cdot 2b=4ab$，

$\therefore\quad (a+b)^2-(a-b)^2=4\times\frac{22}{75}\times\frac{25}{44}=\frac{2}{3}$.

例 4 解方程：

(1) $(65x+63)^2-(65x-63)^2=260$；

(2) $(78x+77)(77x-78)=(78x+77)(77x+78)$.

解：(1) 逆用平方差公式，把原方程化为其等价形式

$[(65x+63)-(65x-63)][(65x+63)+(65x-63)]=260$，

即 $126\times 130x=260$，$\therefore\quad x=\frac{1}{63}$.

(2) 原方程可化为

$(78x+77)(77x-78)-(78x+77)(77x+78)=0$，

即 $-78\times 2\times(78x+77)=0$，

$78x+77=0$，$\therefore\quad x=-\frac{77}{78}$.

通过例 4 可见，应用等价转化思想来因式分解，往往可以将较高次的方程，巧妙转化为最简方程，从而求出方程的根.

三、应用题蕴含的数学思想

例 5 (1) 已知矩形的面积是 $6x^2+13x+5(x>0)$，其中一边长是 $2x+1$，求表示该矩形的另一边的代数式.

(2) 已知正方形的面积是 $9x^2+6xy+y^2(x>0,y>0)$，求表示该正方形的边长的代数式.

解:(1) 由矩形的面积＝长×宽,知 $2x+1$ 是 $6x^2+13x+5(x>0)$ 的一个因式,我们考虑用“十字相乘法”,即

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 3 & & 5 \end{array}$$

可得 $6x^2+13x+5=(2x+1)(3x+5)$,

故表示该矩形的另一边的代数式为 $3x+5$.

(2) 仿(1),得

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 1 \\ & \times & \\ 3 & & 1 \end{array}$$

$\therefore \quad 9x^2+6xy+y^2=(3x+y)(3x+y)$,

故该正方形的边长的代数式为 $3x+y$.

此例给我们一种启示. 在此题中,无论是长方形或正方形,其面积和边长都是以多项式的形式给出的.这种用代数式表示数的方法,不仅体现了从特殊到一般的数学推理思想,更为重要的是体现了一种“整体运算”的思想方法.

§2　数学思维方法

我们知道一个数学命题成立,需要有一个十分科学严密的论证,不能有丝毫漏洞.

从否定一个命题的角度出发,可以这样想象,只需出一个反例即可否定命题的正确性. 这种利用某一特例否定命题的方法,称之为特殊性解题策略,是一种十分重要的数学思维方法. 下面就这种思维方法的应用,我们来看一个例题.

例 1　把 $a^6-2a^3b^3+b^6$ 分解因式,结果是(　　).

(A) $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$;

(B) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$;

(C) $(a-b)(a^2+ab+b^2)^2$;

(D) $(a+b)(a^2-ab+b^2)^2$.

解:经观察,知(C)、(D)的次数不对,显然是错的,再判定(A)、(B)正确与否.

取 $a=2,b=1$,得

$$a^6-2a^3b^3+b^6=2^6-2\times2^3\times1^3+1^6$$
$$=64-16+1=49.$$
$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$$
$$=(2-1)^2(2^2+2\times1+1)^2=49.$$
$$(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2=(2+1)^2(2^2-2\times1+1)^2$$
$$=9\times3=27.$$

所以(A)是正确的. 故应选(A).

值得一提的是,这里所用的解题思想方法是:(1)要否定一个命题成立,只要举一个反例就够了(如本题,比较 A、B 正确与否时,选用 $a=2,b=1$);(2)选取 $a=2,b=1$ 代入代数式检验的方法,叫做“特殊值法”. 这是解选择题常用的一种方法.

特别应指出的是:对于与因式分解有选择题,解题时要首先排除明显错误的选择支,再对所剩下的少数仅存在符号差异的式子,采用特殊值法进行比较. 否则,将会陷于一种难以分辨的困境之中. 例如,本例中,如果不首先排除(C),则当 $a=2,b=1$ 时,

$$(a-1)(a^2+ab+b^2)^2$$
$$=(2-1)(2^2+2\times1+1^2)^2=49.$$

其值也是 49．这样，(A)、(C)的值都与原式一样，如何取舍？

为使读者对这种方法有所了解，我们再看一个题目．

例 2 把 $a^4-2a^2b^2+b^4$ 分解因式，结果是(　　)．

(A) $a^2(a^2-2b^2)+b^4$； (B) $(a-b)^4$；

(C) $(a+b)^4$； (D) $(a+b)^2(a-b)^2$．

解：(A)不符合因式分解的定义，所以是错的．

取 $a=2,b=1$．得

$$a^4-2a^2b^2+b^4=2^4-2\times2^2\times1^2+1^2=9,$$

$$(a-b)^4=(2-1)^4=1,$$

$$(a+b)^4=(2+1)^4=81,$$

$$(a+b)^2(a-b)^2=(2+1)^2(2-1)^2=9.$$

所以(D)是正确的．故应选(D)．

注：显然，本题可以用公式直接分解因式．$a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2=(a+b)^2(a-b)^2$，故应选(D)．

§3　一般数学方法与技巧

一、因式分解的方法与技巧

把一个多项式化成几个因式连乘积的形式，叫做多项式的因式分解或叫做分解因式．因式分解过程中要注意将相同的因式写成幂的形式．此外，因式分解是多项式的一种形式变化，像这样的形式变化，在数学里属于恒等变形．常见的因式分解的方法与技巧有以下几种：

1．提取公因式法

提取公因式法的特点是：如果一个多项式各项中都有一个相同的因式，即公因式，那么这个多项式就可以分解成公因式与另一个多项式的乘积．即

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

例 1 请你判断：下面是甲、乙、丙三位同学对多项式 $3x^2y^5+2x^3y^4z^2$ 的分解结果，请你回答两个问题：

(1)他们提出的是否公因式？

(2)他们中，谁分解的对？谁分解的不对？为什么？

甲：$3x^2y^5+2x^3y^4z^2=x^2(3y^5+2xy^4z^2)$；

乙：$3x^2y^5+2x^3y^4z^2=x^2y^3(3y^2+2xyz^2)$；

丙：$3x^2y^5+2x^3y^4z^2=x^2y^4(3y+2xz^2)$.

解：(1) 他们提出的都是公因式.

(2) 甲、乙分解的不对，丙分解的对，因为根据分解定义，分解出的各因式必须是质因式或质因式的幂，但甲、乙分解的最后一个因式分别能被 y^4 和 y 整除，所以不是质因式.

通过例 1 可见，只要我们提取的公因式是各项的最高公因式就可以保证分解因式结果的正确性.

而求最高公因式的原则是：(1)求出各式系数的最大公约数；(2)求出各式同底数幂中次数最低者．将之相乘，即得最高公因式.

例 2 把下列各式分解因式：

(1) $4a^3b-6a^2b^2+2a^2b$；

(2) $-12x^3y^3z^3-18x^3y^2z^4+24x^2y^4z^3-6x^2y^3z^4$.

解：(1) 原式 $=2a^2b(2a-3b+1)$.

(2) 原式 $=-6x^2y^2z^3(2xy+3xz-4y^2+yz)$.

例 3 把下列各式分解因式：