高等数学

——线性代数、概率论与数理统计

主编　李树冬

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

高等数学

——线性代数、概率论与数理统计

主编　李树冬

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:线性代数、概率论与数理统计/李树冬主编.
—上海:立信会计出版社,2010.3
ISBN 978-7-5429-2476-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学②线性代数
③概率论④数理统计 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第034586号

责任编辑　蔡莉萍
封面设计　周崇文

高等数学:线性代数、概率论与数理统计

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路2230号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www. lixinaph. com	E-mail	lxaph@ sh163. net
网上书店	www. shlx. net	Tel:	(021) 64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	上海申松立信印刷有限责任公司
开　　本	787毫米×960毫米　1/16
印　　张	12.75
字　　数	250千字
版　　次	2010年3月第1版
印　　次	2010年3月第1次
印　　数	1—3 100
书　　号	ISBN 978-7-5429-2476-6/O
定　　价	19.00元

前　言

本书依据教育部颁布的“高等数学课程教学基本要求”，组织长期在高校教育第一线的教师编写。该教材适用于成人高等教学高起本、专升本以及高职高专各类专业的高等数学教学。

高等数学是各类专业的一门基础课，该课程有一定的难度，在编写过程中，我们力求做到由浅入深，循序渐进；概念明了，叙述简洁。为了使学生易于掌握高等数学知识，增强用数学解决实际问题的能力，我们在每一章中按教学内容进程安排了课堂练习，编写了有针对性的每一章习题和总复习题，并在书后附有习题答案。

本书共有9章，内容包括线性代数、概率论与数理统计基础。

参加本书编写的有：李树冬（数理统计部分），金兴华（概率论部分），沈爱玲（线性代数部分）。

全书最后由李树冬汇总定稿。

由于我们水平有限，书中难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2010年春

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是线性代数中的基本概念和基本工具之一，其理论起源于线性方程组的求解。本章主要介绍行列式的定义、基本性质及其计算方法，以及解线性方程组的克莱姆法则。

§1.1 二阶行列式与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

考虑用消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

由此引入二阶行列式的概念。

定义 1.1 由 2^2 个数组成的式子 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，它表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

按此法则，二元一次方程组(1-1)式的唯一解(1-2)式可表示成：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例 1 解线性方程组$\begin{cases} x_1+4x_2=-3 \\ 2x_1+3x_2=7 \end{cases}$。

解 因为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times3-2\times4=-5$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-3\times3-4\times7=-37$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=1\times7-2\times(-3)=13$$

所以线性方程组的解为 $x_1=\frac{-37}{-5}=\frac{37}{5}$，$x_2=-\frac{13}{5}$。

1.1.2 三阶行列式

类似地，通过讨论三元一次线性方程组的求解问题，可以引入三阶行列式的定义。

定义 1.2 由 3^2 个数组成的式子 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为**三阶行列式**，它表示数值 $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

结合(1-3)式，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-5}$$

对于(1-5)式三阶行列式的值可按下述对角线法则来记忆。

在下图 1-1 中，由实线上的三个元素的乘积组成的三项取正号，由虚线上三个元素的乘积组成的三项取负号，其代数和就是三阶行列式的值。

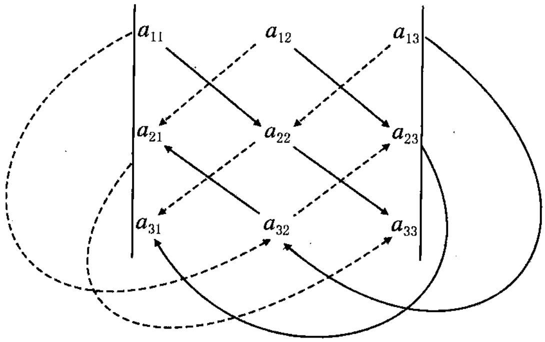

图 1-1 对角线法则

例 2 计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$。

解 由三阶行列式的定义,即(1-4)式,得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2\times[1-(-2)]-1\times[-4-(-1)]+3\times(-4\times2-1)=$$

$$6+3-27=-18$$

也可以由(1-5)式即对角线法则来解,得

原式$=2\times1\times1+1\times(-1)\times1+3\times(-4)\times2-3\times1\times1-1\times(-4)\times 1-2\times2\times(-1)=2-1-24-3+4+4=-18$

课堂练习 1.1

1. 计算下列行列式的值。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$__________ (2) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=$__________

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=$__________ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=$__________

2. 用行列式的值解下列线性方程组。

(1) $\begin{cases}2x_1+4x_2=3\\3x_1+5x_2=2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2=4\\2x_1+3x_2=5\end{cases}$

§1.2　n 阶 行 列 式

分析一下三阶行列式的定义(1-4)式，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

可发现：

其一，D 的展开式由三项组成，即由 D 的第一行的三个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$分别与三个二阶行列式相乘得到，而所乘的二阶行列式是 D 中划去 a_{1j}所在的第一行与第 j 列元素后余下的元素组成的，$j=1,2,3$。

其二，每一项之前的符号是$(-1)^{1+j}$，1 和 j 分别是元素 a_{1j}的行标和列标。

通过上面的分析，我们可以以此类推，得到 **n 阶行列式**的定义。

定义 1.3　用 n^2 个数组成的式子

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$a_{1n}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3,n-1}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,n-1}\end{vmatrix}\tag{1-6}$$

称为 **n 阶行列式**。

定义 1.4　在 n 阶行列式 D 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素之后，剩下的元素按照原相对位置所组成的$(n-1)$阶行列式，称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij} 。

即
$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$，称 A_{ij} 为 a_{ij} 的**代数余子式**。

由此，n 阶行列式的递推式(1-6)可以表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1-8}$$

等式(1-8)称为 n 阶行列式按第一行元素的展开式。

例 3 写出四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 A_{32}，A_{24}，并计算 D 的值。

解 $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-8$，$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8$

将 D 按照第一行展开，得

$$D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}+$$
$$1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$2\times(-5)+1\times13-11+12=4$$

注：(1) 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$。

(2) n 阶行列式可按任意一行或者一列展开，定义成 $D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，或者 $D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,n)$。

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$（称之为**下三角行列式**）。

解　因为第一行中除第一项 a_{11} 可能不为零外其余元素全部为零，因此按照第一行展开只有一项 $a_{11}A_{11}$，而 A_{11} 和 D 具有相同的类型，故可类推得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{。}$$

例 5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

解　$D=(-1)^{1+n}\times 1\times(-1)^{2+n-1}\times 2\times(-1)^{3+n-2}\times 3\cdots(-1)^{n+1}\cdot n=(-1)^{n(n+1)}n!$

课堂练习 1.2

1. 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$，求：

(1) D。

(2) 写出 a_{21}，a_{32} 的代数余子式。

2. 计算下列行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

§1.3　行列式的性质

在解决行列式的计算应用等问题时，若能与行列式的相关性质结合运用，会使问题简

化很多。

定义 1.5 将行列式 D 的行与列互换后，所得的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T。即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如，若 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$，则

$$D^T=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$

由此性质可知，行列式中“行”与“列”的地位相同，对“行”成立的性质，对“列”也成立；反之亦然。由于下三角行列式转置后变成上三角行列式，故上三角行列式的值也是对角线元素的乘积。

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值。

解 由性质 1 知

$$D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 2 交换行列式的两行（或两列），行列式的值变号。

规定用 r_i，c_j 分别表示行列式的第 i 行和第 j 列。第 i 行和第 j 行互换，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；第 i 列和第 j 列互换，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$。

推论 如果行列式 D 中有两行的对应元素相等，则 $D=0$。

证明 交换行列式 D 中对应元素相等的两行，那我们仍然得到行列式 D。而由性质 2 可知，行列式的值应该变号，即 $D=-D$，故只能有 $D=0$。

性质 3 行列式 D 等于它的任意一行（或列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和。

推论 1 行列式 D 的某一行（或列）的元素全为零，则 $D=0$。

推论 2 行列式的某一行元素与另一行元素所对应的代数余子式的乘积之和为零。即

若 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则\ a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ 的值。

解 因为第二行中只有一个非零元，故按照第二行展开，得

$$D=2\times(-1)^{2+4}\times\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=2\times2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$4\times(2\times3-1\times5)=4$$

性质 4 行列式中某一行所有元素的公因子可以提到行列式外面，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 上式左边按照第 i 行展开，可得

左边 $=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=$

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=右边$$