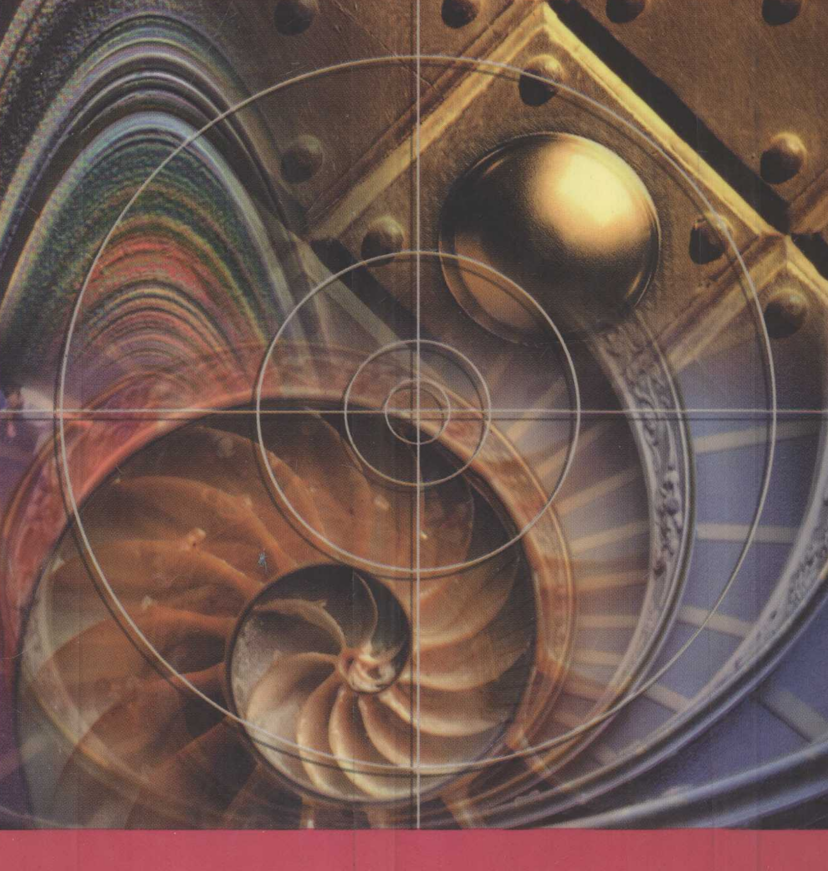
中等职业技术学校教材

·试用本·

应用数学（基础部分一）

第二版



高等教育出版社 ☆ 复旦大学出版社

内容提要

本套教材是受上海市职业技术教育课程改革与教材建设委员会的委托，根据中等职业学校的培养目标和教学基本要求，在大量社会调查的基础上，结合三类学校（中专、职高、技校）数学教学的共性编写的.

本册为第一册，主要内容包括：集合与不等式的解集、函数、指数函数与对数函数、三角函数、平面向量、复数共六章.

本书可供中等职业学校（中专、职高、技校）作为数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学.基础部分Ⅰ/张又昌主编，方绮绿等编.
—2版.—北京：高等教育出版社，2000.7
ISBN 7-04-008573-9

Ⅰ.应… Ⅱ.①张… ②方… Ⅲ.应用数学-专业学校-教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 26699 号

应用数学（基础部分一）第二版
张又昌 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店上海发行所		
印　刷	商务印书馆上海印刷股份有限公司		
开　本	787×1092　1/16	版　次	1998 年 7 月第 1 版
印　张	14.75		2000 年 7 月第 2 版
字　数	350 000	印　次	2000 年 7 月第 1 次印刷
		定　价	17.50 元

第二版说明

《应用数学》(基础部分一)在两年的试教中，由上海市教委课程改革办公室多次组织同行、专家及试教老师座谈，他们对本教材提出了很多中肯而宝贵的意见，编者们在认真听取意见的基础上，对本教材进行了修订.

一、对全书内容进行了适当的修订，其中三角函数部分作了较大的调整，使之更有利于教与学.

二、对全书各章节的例题、习题作了筛选、调整和充实，删去了部分过难的习题，结合教材中的例题，补充和调整了习题的编排，并把习题分为A和B两组，A组题目紧扣教材基本内容，适合全体学生使用，B组题目具有一定难度，适合学有余力的学生使用.

三、教材中的部分数学符号按国家标准进行了修改.

四、教材后面附有部分习题的参考答案和提示.

这次修订工作得到了市教委课程改革办公室的指导、试教老师的帮助以及高等教育出版社的大力支持，在此一并致谢. 同时也希望同行、专家以及试教老师继续对本教材提出宝贵意见，使之更适合中等职业学校的教学.

编写组

2000年5月

前　　言

我国的社会主义现代化建设不但需要高级科学技术专家，而且迫切需要中、初级技术人员、管理人员和技术工人，而这类人才的培养主要是通过职业技术教育来实现的，所以党和国家非常重视职业技术教育的改革和发展. 努力培养出各行各业所需的职业人才，是社会、经济发展对职业技术教育提出的迫切要求. 我国的职业技术教育长期实行的是“学科本位”的教学模式，这种模式重理论轻实践，重知识轻技能，培养出的学生不适应社会、经济发展的要求. 因此，职业技术教育要深化改革，办出特色，为社会培养出既有理论又有技能，德、智、体全面发展的一代新人.

职业技术教育要办出自己的特色，关键在于课程改革与教材建设. 为此，1996 年上海市教委启动了职业技术教育课程改革与教材建设工程（简称“10181”工程），即用五年左右的时间，完成 10 门普通文化课程的改革及示范教材的编写工作；完成 18 个典型专业（工种）的课程改革以及同步编写出部分典型示范性教材；经过十年左右的改革实践，基本形成一个具有职教特色的课程结构和教材体系.

这次课程改革与教材建设是以社会和经济发展需要为出发点，以职业（岗位）需求为直接依据，以现行中等职业技术教育课程、教材的弊端为突破口，积极学习并借鉴国外职教课程、教材改革的有益经验，以实现办出职教特色的根本目的. 在充分研究和广泛征求意见的基础上，确立了“能力为本位”的改革指导思想. 目的是为了克服职教长期存在的重理论轻实践、重知识轻技能的倾向，真正培养出经济和社会发展所需要的中等职业技术人才.

在各方面的共同努力下，新的教材终于与广大师生见面了. 这些新的教材并不是职业技术教育课程改革与教材建设的全部，它只是典型的示范性教材，因为职业技术教育的专业门类繁多，不可能在较短的时间内，依靠少数编写人员解决职教中全部的课程、教材问题. 职教的课程改革和教材建设是一项系统的长期的工作，只有充分发挥广大教师的改革积极性，在教学过程中不断用“能力本位”的教育思想，主动进行课程与教材的改革，我们的课程、教材改革才能全面、持续而深入，才可能真正全面提高教学质量和效益，以不断适应社会、经济发展的需要. 因此，“10181”工程对于我市的职教课程改革来讲只起着一个领导、指导和引导的作用.

新的教材代表新的思想、新的教法和学法. 希望通过这些教材，给大家一些启迪，同时也希望大家对新教材提出宝贵的意见.

在课程改革与教材建设过程中，得到了各方面的大力支持，特别是广大编审人员为此付出了辛勤的劳动. 在此，向他们表示衷心的感谢！

上海市教育委员会副主任
上海市职业技术教育课程改革与教材建设委员会主任　薛喜民

1998 年 6 月

编者的话

受上海市职业技术教育课程改革与教材建设委员会的委托，根据现代化职业教育的要求和中等职业学校的培养目标，我们重新编写了以能力为本位，注重学生全面素质提高的中等职业学校的数学教材.

这套教材是在大量社会调查的基础上，结合三类学校（中专、职高、技校）的教学共性，注意与九年义务教育制的数学课程的衔接，按照降低理论，强化能力，适度更新，兼顾体系的原则确定教学内容.

本课程分为核心数学（基础部分）和专业数学两大部分. 选取在现代生活和生产中得到广泛使用的初等数学的基础知识和基本方法为核心数学，专业数学以模块结构出现，尽量做到各模块互相独立，以便按专业要求，适当选用.

本教材在处理教学内容时，按编写原则，淡化理论，删去难度较高的运算技巧，强化基本概念、基本运算、数形结合和实际应用能力. 在讲授基本概念和基础知识时，力求从实际问题引入，又应用于实际. 本教材中的基本运算一般要求学生用计算器求解，以提高学生使用计算器的能力，减轻学生负担. 本套教材配备了足够的例题和习题，供教师和学生按专业及学生的基础水平适当选用，不再另编练习册.

本套教材的核心数学部分共分两册，即应用数学（基础部分一）和应用数学（基础部分二），教学内容分别是：

应用数学（基础部分一）：集合与不等式的解集，函数，指数函数与对数函数，三角函数，平面向量，复数.

应用数学（基础部分二）：空间图形，直线，二次曲线，排列和组合，概率.

专业数学初步定为六种模块：

微积分初步；

级数与拉氏变换简介；

矩阵与线性规划；

概率与统计简介；

空间向量初步；

逻辑代数简介.

本教材适用于招收初中毕业生三年制或四年制的中等职业学校数学课使用，最低时数为160学时. 根据专业、工种特点及实际需要，也可选学专业数学模块，学时要适当增加，但总学时不宜超过210学时.

我们编写的这套教材有一定的弹性. 正文中用宋体字排印的内容和习题是应该基本掌握的；正文中用楷体字排印的内容和习题是供各学校根据需要选学的内容.

由于编写时间仓促，水平有限，本书难免存在不少缺点和错误，尚需经过一段时间的试用，听取广大师生的意见后再进一步修改和完善.

编者

1998 年 5 月

目　　录

第一章　集合与不等式的解集

集合是数学中重要的基本概念之一，它已被运用于数学的很多领域．本章主要学习集合的初步知识——集合的有关概念及基本运算．

§1-1　集　　合

一、什么叫集合

在日常生活中，往往把具有某种确定属性的对象放在一起，作为一个整体加以研究，例如：

（1）某校一年级的全体学生；

（2）掷面值为壹圆的硬币，所有可能出现的结果．

这里所用的"全体"、"所有"都是指具有某种确定属性的对象的总体．

把具有某种确定属性的对象所组成的总体叫做**集合**（简称集），把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的**元素**．

如（1）某校一年级全体学生所组成的集合，这个学校一年级的每个学生都是这个集合中的元素；

（2）由出现国徽面（正面）和币值面（反面）两种结果所组成的集合，正面、反面都是这个集合中的元素．

在数学中遇到的集合很多，例如：

（3）所有锐角三角形所组成的集合，任何一个锐角三角形都是这个集合中的元素；

（4）不等式 $x-4>0$ 的所有解所组成的集合（简称解集），每个大于 4 的实数都是这个集合中的元素；

（5）全体正整数所组成的集合，每个正整数都是这个集合中的元素．

一般常用英文大写字母 A、B、C 等表示集合，而用小写字母 a、b、c 等表示集合中的元素．

给定集合与考察对象间存在下面的关系：

（i）如果对象 a 具有集合 A 的确定属性，那么，a 是集合 A 的元素，记为"$a\in A$"，读作 a 属于 A．

（ii）如果对象 a 没有集合 A 的确定属性，那么，a 不是集合 A 的元素，记为"$a\notin A$"，读作 a 不属于 A．

上述五个集合中，（4）、（5）两个集合的元素都是由数组成的．我们规定，由数所组成的集合叫做**数集**．

为了使用方便，常用表 1-1 中的字母来表示正整数集、整数集、有理数集、实数集．

如果上述数集中（除正整数集 $\mathbf{N}^*$ 外）的元素只限于正数，就在集合记号的右上角加上

表 1-1

集合名称	正整数集	整数集	有理数集	实数集
字母记号	$\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

“+”号，如正有理数集记为 $\mathbf{Q}^+$，同样 $\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集，$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集等等. 注意，$\mathbf{Z}^+$ 和 $\mathbf{N}^*$ 都可表示正整数集.

例 1 在下列各题的横线上填入符号“$\in$”“$\notin$”：

(1) $\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}^-$；　(2) $-\frac{1}{2}$ ____ $\mathbf{Z}^-$；　(3) π ____ $\mathbf{Q}$；

(4) 10 ____ $\mathbf{N}^*$；　(5) $2-\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}^+$；　(6) $\frac{7}{8}$ ____ $\mathbf{N}^*$.

解 (1) $\because \sqrt{2}>0$，$\therefore \sqrt{2}\notin \mathbf{R}^-$.

(2) $\because$ $-\frac{1}{2}$ 不是整数，　$\therefore$ $-\frac{1}{2}\notin \mathbf{Z}^-$.

(3) $\because$ π 是无理数，　$\therefore$ $\pi\notin \mathbf{Q}$.

(4) $\because$ 10 是正整数，　$\therefore$ $10\in \mathbf{N}^*$.

(5) $\because$ $2-\sqrt{2}>0$，　$\therefore$ $2-\sqrt{2}\in \mathbf{R}^+$.

(6) $\because$ $\frac{7}{8}$ 不是正整数，　$\therefore$ $\frac{7}{8}\notin \mathbf{N}^*$.

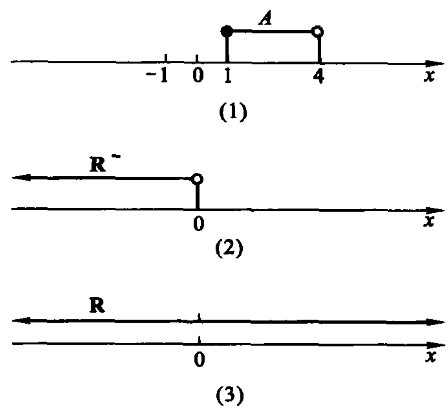


图 1-1

我们规定：由数轴上的点所组成的集合叫做**点集**.

我们知道，一个实数可以在数轴上找到唯一点和它对应，反之，数轴上任意一点也有唯一的实数和它对应. 所以，数集常用数轴上的点集来表示. 例如满足不等式 $1\leqslant x<4$ 的解集可用数轴上的点集 A 表示，$x=1\in A$，用实心点表示，$x=4\notin A$ 用空心点表示，为了使用方便，把点集 A 画在数轴的上方，见图 1-1 (1). 又如数集 $\mathbf{R}^-$，$x=0\notin \mathbf{R}^-$，用空心点表示，把 $\mathbf{R}^-$ 画在数轴上方，见图 1-1 (2). 实数集 $\mathbf{R}$ 就用整个数轴来表示，见图 1-1 (3).

在以后各章中，都用上述方法来画出数轴上的点集.

例 2 求下列不等式的解集，并用在数轴上表示它们：

(1) $x-3>0$；　(2) $x+1\leqslant 0$.

解 (1) 设不等式 $x-3>0$ 的解集为 A_1，

因为 $x-3>0$，即 $x>3$，

所以 A_1 是大于 3 的实数所组成的集合（图 1-2).

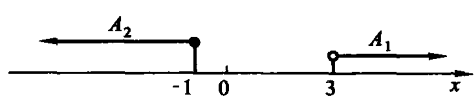


图 1-2

(2) 设不等式 $x+1\leqslant 0$ 的解集为 A_2，

因为 $x+1\leqslant 0$，即 $x\leqslant -1$，

所以 A_2 是小于或等于 -1 的实数所组成的集合（图 1-2)

从引入集合概念的例子 (1) ～ (5) 中，可以知道：

(1)、(2) 集合中元素的个数是有限的，我们把这类集合叫做**有限集**. 在有限集中只含一个元素的集合叫做**单元素集**. 如方程 $x+1=0$ 在 $\mathbf{R}$ 内的解集是单元素集，它只含一个元素 -1.

不含任何元素的集合叫做**空集**，记为 $\varnothing$. 如方程 $x^2+1=0$ 在 $\mathbf{R}$ 内的解集是 $\varnothing$.

(3)、(4) 和 (5) 集合中的元素有无限个，我们把这类集合叫做**无限集**.

二、集合的表示法

1. 列举法

把属于集合的元素一一列举出来，写在括号 $\{\quad\}$ 内，每个元素仅写一次，不考虑元素排列顺序，这样的集合表示方法叫做**列举法**.

引入集合概念的五个例子中，(2) 可以写成 {正面，反面}，(4) 正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以写成 $\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

列举法也告诉我们，集合中的元素不仅是确定的，互异的，且与元素的排列顺序无关.

例 3 用列举法表示下列集合：

(1) 所有小于 5 的正整数所组成的集合；

(2) 某射手一次射击可能命中的环数所组成的集合.

解 (1) 设所有小于 5 的正整数所组成的集合为 A_1，

因为小于 5 的正整数是 1，2，3，4，

所以 A_1 可以写为 $\{1, 2, 3, 4\}$.

(2) 设某射手一次射击可能命中环数所组成的集合为 A_2，

因为一次射击可能命中的环数是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，

所以 A_2 可以写为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$（省略单位“环”).

2. 描述法

在生活或生产中遇到的许多集合是不能用列举法表示出来的，如 $x-4>0$ 的解集就不能用列举法表示出来. 下面介绍集合的另一种表示法.

把集合中元素所具有的确定属性描述出来，写在括号 $\{\quad\}$ 内，这样的集合表示方法叫做**描述法**.

引入集合概念的五个例子中，(1) 可以写成 {某校一年级的学生}，(3) 可以写成 {锐角三角形}. 用描述法表示集合的一般形式是：如 (4) 中不等式 $x-4>0$ 的解集可以写成 $\{x \mid x>4, x\in\mathbf{R}\}$，其中 $\{\quad\}$ 内竖线“|”的左边表示集合所含元素的一般形式，竖线“|”右边表示集合元素所具有的确定属性.

注意，在 $\mathbf{R}$ 集内，用描述法表示数集时，$x\in\mathbf{R}$ 可以省略，如 $\{x \mid x>4, x\in\mathbf{R}\}$ 可写为 $\{x \mid x>4\}$.

例 4 指出下列集合中，哪些是空集，哪些是单元素集：

(1) $\{x \mid x^2+3=0, x\in\mathbf{R}\}$；　　(2) $\{x \mid x+3=0, x\in\mathbf{R}\}$；

(3) $\{x \mid x+3=0, x\in\mathbf{N}^*\}$.

解 (1) $\{x \mid x^2+3=0, x\in\mathbf{R}\}$ 表示集合的元素是方程 $x^2+3=0$ 在实数范围内的解.

因为 $x^2+3=0$ 在实数范围内无解，

所以集合 $\{x|x^2+3=0, x\in\mathbf{R}\}$ 是空集$\varnothing$.

(2) $\{x|x+3=0, x\in\mathbf{R}\}$ 表示集合的元素是方程 $x+3=0$ 在实数范围内的解.

因为 $x+3=0$ 在实数范围内只有一个解 $x=-3$,

所以集合 $\{x|x+3=0, x\in\mathbf{R}\}$ 是单元素集 $\{-3\}$.

(3) $\{x|x+3=0, x\in\mathbf{N}^*\}$ 表示集合的元素是方程 $x+3=0$ 在正整数范围的解.

因为 $x+3=0$ 在正整数范围内无解,

所以集合 $\{x|x+3=0, x\in\mathbf{N}^*\}$ 是空集$\varnothing$.

例 5 写出下列方程和不等式在实数范围内的解集:

(1) $4x^2-9=0$;

(2) $5x-1\leqslant x+3$.

解 (1) 因为 $4x^2-9=0$ 在实数范围内有两解, $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$,

所以解集 $\{x|4x^2-9=0, x\in\mathbf{R}\}$ 为$\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$;

(2) 解不等式 $5x-1\leqslant x+3$, 得 $x\leqslant 1$,

所以, 不等式 $5x-1\leqslant x+3$ 的解集是 $\{x|x\leqslant 1\}$.

例 6 用列举法写出下列集合:

(1) 掷一枚均匀骰子所有可能出现的点数所组成的集合;

(2) $\left\{x|x=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n\leqslant 3, 且\ n\in\mathbf{N}^*\right\}$

解 (1) 通过投掷试验可得所有可能出现的点数是: 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点. 所以, 由它们所组成的集合为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 从给出的集合可知, 集合中元素 x 的一般形式是 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 同时也告诉我们 n 只能取 1、2、3, 所以, 这个集合有三个元素组成, 即 $n=1$, $x=\frac{1}{2}$; $n=2$, $x=\frac{1}{4}$; $n=3$, $x=\frac{1}{8}$. 写成列举法形式是$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$.

例 7 用描述法的一般形式表示下列集合:

(1) {正偶数};

*(2) {被 5 除后余 1 的正整数}.

解 (1) 根据题意, 该集合的元素是:

2, 4, 6, 8, …, 它们可以写成 2×1, 2×2, 2×3, 2×4, …其一般形式为 $x=2n$, 所以该集合可以写成 $\{x|x=2n, n\in\mathbf{N}^*\}$

(2) 根据题意, 该集合的元素是:

1, 6, 11, 16, 21, …, 它们可写成 $5\times1-4$, $5\times2-4$, $5\times3-4$, $5\times4-4$, $5\times5-4$, …其一般形式为 $x=5n-4$, 所以该集合可以写成 $\{x|x=5n-4, n\in\mathbf{N}^*\}$.

练习 1-1

1. 在下列各题横线上填入符号"$\in$"或"$\notin$":

2 __ $\mathbf{N}^*$; $\sqrt{2}$ __ $\mathbf{Q}^+$; $-\frac{1}{2}$ __ $\mathbf{R}^+$; 1 __ $\mathbf{Z}$; 1 __ $\mathbf{Q}^-$; $\sqrt{2}-1$ __ $\mathbf{R}$.

2. 写出下列集合的所有元素：

(1) 一年中有 31 天的月份所组成的集合；

(2) 我国古代四大发明所组成的集合；

(3) 我国三大岛屿所组成的集合.

3. 用列举法表示下列的集合：

(1) $\{x|x^2=x, x\in\mathbf{R}\}$；　(2) $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2, x\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $\{x|2x^2-x-1=0, x\in\mathbf{Q}\}$；　(4) $\{x|x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$；

(5) {大于 3 小于 20 的偶数}.

4. 用描述法的一般形式表示下列集合：

(1) {正奇数}；(2) {负偶数}.

习题　1-1

A　组

1. 用列举法表示下列各集合：

(1) 本班所有姓王的学生所组成的集合；

(2) 20 之内所有能被 5 整除的正整数所组成的集合；

(3) 所有大于 3 小于 13 的偶数所组成的集合.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 满足不等式 $-1\leqslant x<2$ 的实数所组成的集合；

(2) 方程 $x^2-2x=0$ 在实数范围内的解集.

3. 在数轴上表示下列各数集：

(1) $\{x|-3\leqslant x\leqslant 3, x\in\mathbf{R}\}$；　(2) $\{x|x\leqslant -1, x\in\mathbf{R}\}$；

(3) $\{x|-1<x<2, x\in\mathbf{R}\}$；　(4) $\{x|x>4, x\in\mathbf{R}\}$.

4. 选择题：

(1) $x^2+1=0$ 在实数范围内的解集是（　　）

(A) $\varnothing$；(B) 有限集；(C) 无限集；(D) 以上三个都不对.

(2) 集合 {本班全体女同学} 是（　　）

(A) $\varnothing$；(B) 有限集；(C) 无限集；(D) 以上三个都不对.

(3) $\mathbf{N}^*$ 是（　　）

(A) $\varnothing$，(B) 有限集；(C) 无限集；(D) 以上三个都不对.

B　组

1. 用列举法表示下列各集合：

(1) 掷一枚骰子时，所有小于 4 点的结果组成的集合；

(2) $\{x|x=\frac{n}{n+1}, n<5, n\in\mathbf{N}^*\}$；

*(3) $\{x|1\leqslant\sqrt{x}<4, x\in\mathbf{N}^*\}$.

2. 把下列集合用列举法表示：

(1) {小于 9.5 的正整数}；

(2) $\{x|x^2+x-1=0, x\in\mathbf{R}\}$；

(3) $\{x|x=5n+2, n\in\mathbf{N}^*\}$.

3. 用描述法表示下列集合：

(1) 在实数范围内，不等式 $3x-1\leqslant x+2$ 的解集；

(2) 能被 3 整除的正整数的集合.

4. 用数轴表示下列不等式的解集：

(1) $5x-1\leqslant 4x+1$；　　(2) $\frac{1}{2}x+1>\frac{1}{3}x-2$.

5. 选择题：

(1) 集合 $\{x|3<x<10, x\in \mathbf{N}^*\}$ 用列举法表示是（　）

(A) $\{5\}$；　　(B) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$；

(C) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$；　　(D) {大于 3 且小于 10 的整数}.

(2) 集合 $\{a_n|a_n=2n+1, n\in \mathbf{N}^*\}$，用列举法表示是（　）

(A) $\{3, 5, 7, \cdots\}$；　　(B) {奇数}；

(C) {正奇数}；　　(D) {$a_n|a_n$ 大于零的一切奇数}.

(3) 集合 $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ 用描述法表示是（　）

(A) $\{x|x=n^2, n\in \mathbf{N}^*\}$；　　(B) $\{x|x=n^2, n\leqslant 5, n\in \mathbf{N}^*\}$；

(C) $\{x|x=n^2, n\in \mathbf{Z}\}$；　　(D) $\{x|x=n^2, n\leqslant 5, n\in \mathbf{Z}\}$.

(4) 集合 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 用描述法表示是（　）

(A) $\{x|x=\frac{1}{n}, n\in \mathbf{Z}\}$；　　(B) $\{x|x=\frac{1}{n}, n\in \mathbf{R}\}$；

(C) $\{x|x=\frac{1}{n}, n\in \mathbf{N}^*\}$；　　(D) $\{x|x=\frac{1}{n}, n\in \mathbf{Q}^+\}$.

(5) 集合 $\{x|2x^2-1=0, x\in \mathbf{Q}^+\}$ 是（　）

(A) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$；(B) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$；(C) $\varnothing$；(D) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

§1-2　集合间的关系

一、集合的包含关系

观察两个集合：A 为 $\{1, 3, 5\}$，B 为 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 发现集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B. 对于集合间的这种关系，给出下面的定义：

定义 1　对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B，则集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记为 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A).

由定义 1 可知，上例中 A 是 B 的一个子集，即 $A\subseteq B$.

根据定义 1 可得，任何一个集合是自身的一个子集，即 $A\subseteq A$. 为了今后讨论方便，我们规定：**空集是任何集合的子集，即对任何一个集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$.**

例 1　写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集.

解　由定义 1 可知，集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集有：

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$ 共 8 个.

从例 1 中不难发现，集合 $\{1, 2, 3\}$ 中有的元素不属于某些子集，如元素 1 不属于 $\{2\}$，$\{3\}$，$\{2, 3\}$，对于这样的子集，给出下面的定义：

定义 2 集合 A 和集合 B 有如下关系：

$A \subseteq B$，$b \in B$，且 $b \notin A$，则**集合 A 叫做集合 B 的真子集**，**记为 $A \subsetneqq B$**.

显然集合是自身的子集，但不是真子集，空集是任何非空集合的真子集.

例 2 集合 $\{a, b, c, d\}$ 有几个真子集？子集中有几个单元素集？

解 由定义 2 可知，集合 $\{a, b, c, d\}$ 的真子集有：

$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$，$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{a, c, d\}$，$\{b, c, d\}$ 共 15 个，其中单元素集有 4 个，即 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$.

例 3 设集合 A 为 $\{3, 5, 7, 9\}$，试写出符合下列条件的集合 A 的真子集：

(1) 非单元素集；

(2) 真子集中的元素能被 3 整除.

解 (1) $\varnothing$，$\{3, 5\}$，$\{3, 7\}$，$\{3, 9\}$，$\{5, 7\}$，$\{5, 9\}$，$\{7, 9\}$，$\{3, 5, 7\}$，$\{3, 5, 9\}$，$\{3, 7, 9\}$，$\{5, 7, 9\}$ 共 11 个；

(2) 在集合 A 中，只有元素 3 和 9 能被 3 整除，所以符合题意的真子集是 $\{3\}$，$\{9\}$，$\{3, 9\}$.

二、集合的相等

观察两个集合：

A 为 $\{x \mid x^2-5x+6=0, x \in \mathbf{R}\}$，$B$ 为 $\{2, 3\}$.

不难发现，集合 A 是方程 $x^2-5x+6=0$ 在 $\mathbf{R}$ 内的解集，即集合 $\{2, 3\}$，这就是说，集合 A 中的所有元素都是属于集合 B，反之，集合 B 中的所有元素又都属于 A，对于有这样关系的两个集合，给出下面的定义：

定义 3 集合 A 和集合 B 有如下关系：

$A \subseteq B$ 同时 $B \subseteq A$，**则叫做集合 A 和集合 B 相等**，记为 $A=B$.

由定义 3 可知，上例中集合 A 和集合 B 相等，即

$$\{x \mid x^2-5x+6=0, x \in \mathbf{R}\}=\{2,3\}.$$

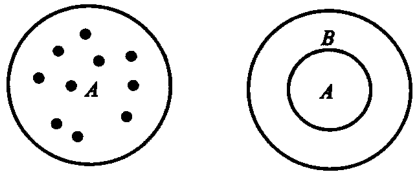
例 4 写出与下列集合相等的集合：

(1) $\{x \mid x^2-x-6=0, x \in \mathbf{R}\}$；　(2) $\{x \mid x+3<0, x \in \mathbf{R}\}$.

解 (1) 集合 $\{x \mid x^2-x-6=0, x \in \mathbf{R}\}$ 表示方程$x^2-x-6=0$在 $\mathbf{R}$ 内的解集，所以，$\{x \mid x^2-x-6=0, x \in \mathbf{R}\}=\{-2, 3\}$.

(2) 集合 $\{x \mid x+3<0, x \in \mathbf{R}\}$ 表示不等式 $x+3<0$ 在 $\mathbf{R}$ 内的解集，所以 $\{x \mid x+3<0, x \in \mathbf{R}\}=\{$小于$-3$ 的实数$\}$.

为了直观地说明集合间的关系，常用圆或封闭曲线来表示集合，圆中的点表示集合中的元素（图 1-3 (1)），这类图形叫做文氏（Venn）图. 图 1-3 (2) 表示集合 A 是集合 B 的真子集，即 $A \subsetneqq B$.



(1)　(2)

图 1-3

练习 1-2

1. 选择正确的符号“$\in$”、“$=$”、“$\subsetneqq$”、“$\supsetneqq$”填入下列空格内：

(1) $\{1, -1\}$ ____ $\{x|x^2-1=0, x\in \mathbf{Z}\}$；

(2) $\{-1, 1\}$ ____ $\{x|x^2-1=0, x\in \mathbf{N}^*\}$；

(3) 1 ____ $\{x|x^2-1=0, x\in \mathbf{R}\}$；

(4) $\varnothing$____ $\{0\}$；

(5) {矩形} ____ {正方形}；

(6) $\{a, 1, 0, b\}$ ____ $\{b, 1, a, 0\}$.

2. 写出集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ 的所有真子集.

3. 已知集合 $B=\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$，写出元素为偶数的所有真子集.

习题 1-2

A 组

1. 写出符合下列条件的 $\mathbf{N}^*$ 的子集：

(1) 元素是小于 9 的奇数所组成的单元素集；

(2) 元素是小于 31 并且大于 5 的奇数所组成的单元素集.

2. 确定下列各题中两个集合间的关系：

(1) $A=\{x|x^2+3x+2=0,x\in\mathbf{R}\},B=\{-1,-2\}$；

(2) $A=\{x|x^2+3x+2=0,x\in\mathbf{N}^*\},B=\{-1,-2\}$；

(3) $A=\{x|x^2+3x+2=0,x\in\mathbf{R}\},B=\{-2\}$.

3. 学生自己设计两个集合,满足下列条件：

(1)两个集合相等；

(2)两个集合存在包含关系而不相等.

B 组

1. 写出符合下列条件的 $\mathbf{N}^*$ 的任何两个真子集

(1)元素是不超过 10 的偶数组成的单元素集；

(2)元素是小于 8 的偶数组成的非单元素集；

(3)元素是被 3 除后余 2 的奇数组成的集合.

2. 比较下列各题中两个集合间的关系：

(1) $A=\{x|x=4n,n\leqslant 6,n\in\mathbf{N}^*\},B=\{2^2,2^3,2^4,12,24\}$；

(2) $C=\{n|n=2k-1,k\leqslant 4,k\in\mathbf{N}^*\}$,$D=\{$小于 10 的正奇数$\}$.

3. 判定集合$\{y|y=n-1,n<3,n\in\mathbf{N}^*\}$与集合$\{x|x^2-x=0,x\in\mathbf{R}\}$相等.

*4. 如 $A=\{0,-1,1\},B=\{0,a,a^2\}$,且 $A=B$,求实数 a 的值.

§1-3 区　间

一、区间的概念

在数学中经常会遇到介于两个实数之间的数集,如$\{x|1<x<4\}$,$\{x|x-4\leqslant 0$ 且 $x+1\geqslant 0\}$

等等，为了使用方便，下面给出一种表示这类数集的记号——区间.

设两个实数为 a 和 b，且 $a<b$，规定：

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 叫做**闭区间**，记为 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}\quad(图 1\text{-}4(1))$$

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|a<x<b\}$ 叫做**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}\quad(图 1\text{-}4(2))$$

(3)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 叫做**右开区间**，记为 $[a,b)$，即

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}\quad(图 1\text{-}4(3))$$

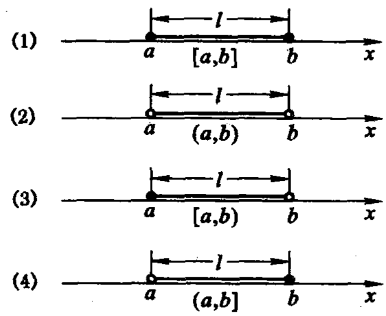


图 1-4

(4)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 叫做**左开区间**. 记为 $(a,b]$，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}\quad(图 1\text{-}4(4))$$

上面的这些数集都叫做区间，其中的 a 与 b 叫做**区间的端点**.

在使用区间记号时要注意：

(1) 左端点的数值要小于右端点的数值.

(2) 方括号表示端点的数值属于这个数集（数轴上这个端点用实心点表示），圆括号表示端点的数值不属于这个数集（数轴上这个端点用空心点表示），两者不能混淆.

例 1 用区间表示下列数集：

(1) $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$；　　(2) $\{x|-1<x<2\}$；

(3) $\{x|0\leqslant x<1\}$；　　(4) $\{x|-\frac{3}{2}<x\leqslant -1\}$.

解 按上述规定得到：

(1) $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}=[1,2]$；　　(2) $\{x|-1<x<2\}=(-1,2)$；

(3) $\{x|0\leqslant x<1\}=[0,1)$；　　(4) $\{x|-\frac{3}{2}<x\leqslant -1\}=(-\frac{3}{2},-1]$.

从图 1-4 可见，图中的四个区间都用数轴上的线段 l 表示，区间两个端点的位置相同，只是两端点的归属状态不同，所以线段 l 的长度是一样的.

区间两端点之间的距离（即图 1-4 中，线段 l 的长度）叫做**区间长**.

不难理解，区间长＝右端点的数值－左端点的数值.

例 2 求例 1 中的四个区间长：

解 (1) 区间 $[1,2]$ 的长为 l_1、$l_1=2-1=1$.

(2) 区间 $(-1,2)$ 的长为 l_2，$l_2=2-(-1)=3$.

(3) 区间 $[0,1)$ 的长为 l_3，$l_3=1-0=1$.

(4) 区间 $(-\frac{3}{2},-1]$ 的长为 l_4，$l_4=-1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

二、无限区间

从区间长定义知道，当区间的两个端点都表示为确定的实数时，这个区间的长度是确定的，

我们把这个区间叫做有限区间.

下面给出无限区间的规定：

(1) 满足不等式 $x \geqslant a$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|x \geqslant a\}$ 记为 $[a,+\infty)$ (记号"$+\infty$"读作正无穷大，$+\infty$ 表示比任何正数大) 见图 1-5(1).

(2) 满足不等式 $x > a$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|x > a\}$ 记为 $(a,+\infty)$ 见图 1-5(2).

(3) 满足不等式 $x \leqslant b$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|x \leqslant b\}$ 记为 $(-\infty,b]$ (记号"$-\infty$"读作负无穷大，$-\infty$ 表示此任何负数小) 见图 1-5(3).

(4) 满足不等式 $x < b$ 的所有实数 x 组成的数集 $\{x|x < b\}$ 记为 $(-\infty,b)$，见图 1-5(4).

(5) 实数集 **R** 可记为 $(-\infty,+\infty)$.

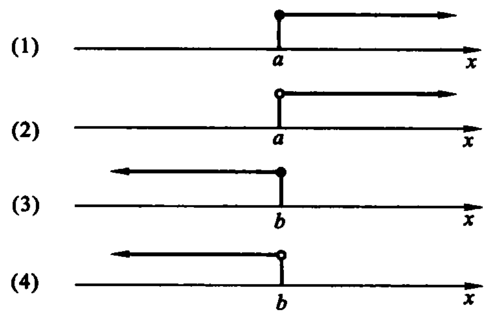


图 1-5

以上(1)～(5)统称为**无限区间**.

例 3 用区间表示下列不等式的解集：

(1) $5x-4>3(x-4)$； (2) $\frac{1}{2}x+2 \leqslant 4-\frac{3}{2}x$.

解 (1) 不等式 $5x-4>3(x-4)$ 的解集是

$$\{x|x>-4\}=(-4,+\infty).$$

(2) 不等式 $\frac{1}{2}x+2 \leqslant 4-\frac{3}{2}x$ 的解集是

$$\{x|x \leqslant 1\}=(-\infty,1].$$

练习 1-3

1. 填空：

(1) 区间 $(1,3)$ 的长是________；

(2) 区间 $[1,3)$ 的长是________；

(3) 区间 $(-4,-1]$ 的长是________；

(4) 区间 $[-4,0)$ 的长是________；

(5) 区间 $[-7,a)$ 的长是 1，$a=$________；

(6) 区间 $(b,3]$ 的长是 5，$b=$________.

2. 选择题：

(1) 右开区间的正确写法是（　）

(A) $(-1,2)$； (B) $(2,-1)$； (C) $[2,-1]$； (D) $[-1,2)$.

(2) 左开区间的正确写法是（　）

(A) $(-\infty,b)$； (B) (a,b)； (C) $(a,b]$； (D) $[-\infty,b)$.

(3) 下列写法中正确的是（　）

(A) $\{x|1<x \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\}=(1,2]$； (B) $\{x|1<x \leqslant 2\}=[1,2)$；

(C) $\{x|1<x \leqslant 2\}=(1,2]$； (D) $\{x|1<x \leqslant 2\}=[1,2]$.

3. 用区间表示下列数轴上的点集：