单墫 主编

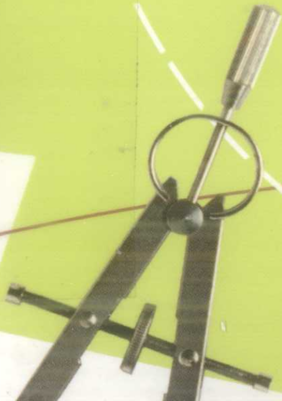
数学奥林匹克

命题人讲座

代数不等式

陈计 季潮丞 著

上海科技教育出版社

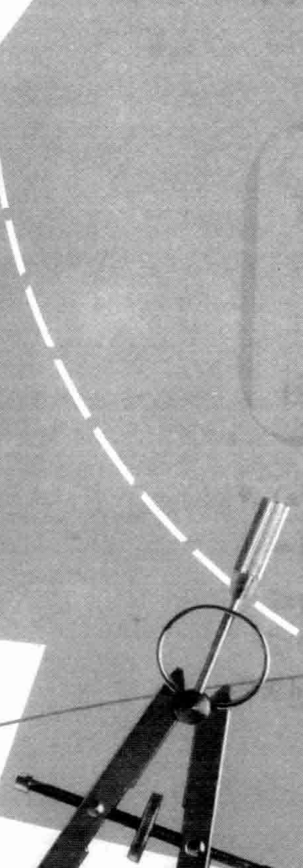


单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

代数不等式

陈计 季潮丞 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数不等式/陈计著. 一上海:上海科技教育出版社,2009.8

(数学奥林匹克命题人讲座/单墫主编)

ISBN 978-7-5428-4848-2

Ⅰ.代… Ⅱ.陈… Ⅲ.不等式—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第098698号

责任编辑：卢　源　李　凌
封面设计：童郁喜

＊数学奥林匹克命题人讲座＊
代数不等式
单　墫　主编
陈　计　季潮丞　著
上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版发行
（上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235）
www.ewen.cc　www.sste.com
全国新华书店经销　上海市印刷七厂有限公司印刷
开本 890×1240　1/32　印张 7.375　字数 190 000
2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5428-4848-2/O·613
定价：18.00 元

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社，1980 年)问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套"数学奥林匹克命题人讲座"丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的书名与作者初定如下：

陆洪文	《解析几何》
施咸亮	《代数函数与多项式》
熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计　季潮丞	《代数不等式》
曹　纲　叶中豪	《重心坐标与平面几何》
冯志刚	《初等数论》
单　墫	《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰　张永芹	《组合问题》
任　韩	《图论》

田廷彦　　　　　　　　《组合几何》
唐立华　　　　　　　　《向量与立体几何》
邵嘉林　　　　　　　　《复数·三角函数》

显然,作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生、施咸亮先生都是博士生导师。他们不仅在代数数论、函数逼近等领域的研究上取得了卓越的成绩,而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式,叶中豪先生于平面几何,都是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是 2008 年 IMO 中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献,培养了很多的人才。2008 年 9 月 14 日,“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立,担任这个研究中心主任的正是多届 IMO 中国国家队领队、华东师范大学数学系副教授熊斌。又如邵嘉林先生,他指导过的张成同学获得了第 49 届 IMO 的金牌。

这些作者有一个共同的特点:他们都为数学竞赛命过题。

如:

设数 a 具有以下性质:对于任意四个实数 x_1,x_2,x_3,x_4,总可以取整数 k_1,k_2,k_3,k_4,使得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2\leqslant a,$$

求这样的 a 的最小值。

这是施咸亮先生供给我国国家集训队选拔的试题。

又如:

设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$。若 S 中任意 n 个两两互素的数组成的集合中都至少有一个素数,试求 n 的最小值。

这是唐立华先生供给西部数学奥林匹克的试题。

叶、熊、冯等几位先生供给竞赛的题举不胜举,这里就不罗列了。

命题人讲座,是田廷彦先生的创意。

命题人写书,富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新,是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识,产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景（如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景），写来能够深入浅出，“百炼钢化为绕指柔”。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的“读书得间”，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单 墫

2008年10月

前 言

八十年来，哈代(G. H. Hardy)、贝尔曼(R. Bellman)等许多数学家花了不少时间与精力，系统地研究不等式，写下了一些名著. 1993 年米特里诺维奇(Mitrinović)、佩查里奇(Pečarić)与芬克(Fink)的《经典与全新不等式》(*Classical and New Inequalities*)更是一部近乎词典式的工具书. 然而，人们似乎很难从中找到所需要的东西.

在各级数学竞赛中，不等式是一个重要的考点. 笔者参与过一些竞赛的命题工作. 如"三角形周界的三等分点，构成的三角形面积，大于原三角形面积的$\frac{2}{9}$."罗承辉及笔者将其特例提供给 1988 年全国高中数学联赛作为第 2 试第 2 题，原题则刊登在了《美国数学月刊》(*Amer. Math. Monthly*)的问题栏(1990 年 E3397 题).

本书的主题是代数不等式，这不仅是当下数学奥林匹克的命题热点，也是几何不等式的基础. 书中还涉及一些分析不等式的内容，这是卢源编辑根据笔者 1989 年在宁波大学的讲稿整理的.

数学竞赛中的不等式，已有许多论著，特别值得提出的是：

单墫，《数学竞赛研究教程》

Hojoo Lee，《*Topics in Inequalities*》

Pham Van Thuan, Le Vi，《*Olympiad Inequalities*》

Vasile Cirtoaje，《*Algeraic Inequalities*》

本书的写作深受其影响，但无意掠人之美，努力给出一些原创的东西，就教于方家. 本书承叶一超先生校对，感谢.

陈计

2009 年 7 月于怡江春色

目 录

前言

第一讲　不等式与恒等式 / 1

§1.1　柯西不等式与拉格朗日恒等式 / 3
§1.2　一些简单不等式的证明 / 12
§1.3　算术平均-几何平均不等式 / 19

第二讲　变换 / 34

§2.1　三角变换 / 34
§2.2　代数变换 / 38
§2.3　增量变换 / 50
§2.4　建立新的有效不等式 / 61

第三讲　齐次化与正规化 / 88

§3.1　齐次化 / 88
§3.2　舒尔不等式和米尔黑德定理 / 93
§3.3　正规化 / 105

第四讲　数列中的不等式 / 115

第五讲　凸函数及一些复杂不等式 / 134

§5.1　凸函数 / 134
§5.2　赫尔德不等式 / 140

§5.3 幂平均单调性定理 / 144
§5.4 闵科夫斯基不等式 / 149
§5.5 切比雪夫不等式 / 154

第六讲 arqady 的不等式技巧 / 158

参考答案及提示 / 192

第一讲 不等式与恒等式

不等式与恒等式有密切的联系，将一个恒等式略去一些项或一些因式，就可以产生一个不等式. 利用一些完全平方式的和非负的特性，可以产生或证明几乎所有的不等式.

但是，不等式的证明仍然比恒等式困难得多，因为“恒等式一旦写出来，就成为显然的.”但不等式，甚至外形极简单的不等式，证明起来也可能不那么简单，这是因为我们不知道相应的恒等式.

本讲中，我们主要通过一些例子的讨论，试图探求找出这些相应恒等式的蛛丝马迹.

我们会用到 $\sum\limits_{\text{cyc}}$ 和 $\sum\limits_{\text{sym}}$ 两个符号，分别表示轮换求和与对称求和. 同时把多项式中的第一个变量换成第二个变量，第二个变量换成第三个变量，……，最后一个变量换成第一个变量，这种变换叫做轮换，把所有轮换的式子相加，即轮换求和. 把多项式中的任意两个变量互换位置，可得到另一个多项式，把所有经过这种变换的式子相加，即对称求和.

例如，对有三个变量 a,b,c 的情况：

$$\sum_{\text{cyc}} f(a,b,c)=f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b),$$

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} f(a,b,c)=&f(a,b,c)+f(a,c,b)+f(b,a,c)\\&+f(b,c,a)+f(c,a,b)+f(c,b,a).\end{aligned}$$

特别地，当 $f(a,b,c)=f(a,c,b)$ 时，我们记

$$\sum_{\text{sym}} f(a,b,c)=f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)$$

类似地，还有

$$\prod_{\text{cyc}} f(a,b,c)=f(a,b,c)\cdot f(b,c,a)\cdot f(c,a,b).$$

本讲第 3 节专门介绍了极其重要的算术平均-几何平均不等式，以及历史上多位数学家给出的或初等或高深的证明，有些用到了比较现代的数学工具，读者可有选择性地阅读.

§1.1 柯西不等式与拉格朗日恒等式

知识桥

最基本的不等式是用“任何实数的平方是非负的”来证明的. 作为这一原理的实际应用,我们选定 y_1-y_2 作为我们的实数,其中 y_1 和 y_2 是实数. 于是有不等式 $(y_1-y_2)^2\geqslant 0$,展开得

$$y_1^2+y_2^2\geqslant 2y_1y_2, \tag{1}$$

当且仅当 $y_1=y_2$ 时等号成立. 这是连接算术平均和几何平均不等式的最简形式.

下面我们给出一些简单的不等式例题.

训练营

例 1 已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. 求证:

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6. \tag{2}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4\\&+(c+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4\\&+(b-d)^4+(c-d)^4\\&=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,\end{aligned} \tag{3}$$

由式(3)立即得到式(2)成立.

点评 对于类似式(3)的恒等式平时要注意积累.

例 2 设 $a,b,c,d>0$，且 $d=\max\{a,b,c,d\}$，证明：

$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a)<d^2. \tag{4}$$

证明 式(4)右边减去左边，并对 d 整理得

$$d^2-d(a+b+c)+(ab+bc+ca), \tag{5}$$

联想到恒等式

$$\begin{aligned}&(d-a)(d-b)(d-c)\\&=d^3-d^2(a+b+c)+d(ab+bc+ca)-abc,\end{aligned} \tag{6}$$

对比(5)、(6)可知(4)成立.

点评　得出式(5)后我们容易误入歧途，试图去证明

$$(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)\geqslant 0, \tag{7}$$

从而判别出式(5)恒正，但事实上式(7)并不成立.

例 3 设 $S_n=1+2+3+\cdots+n$，$n\in\mathbf{N}$，求 $f(n)=\dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值.

（2003 年江苏省夏令营）

解

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}=\frac{n}{(n+32)(n+2)}=\frac{n}{n^2+34n+64}\\&=\frac{1}{n+34+\frac{64}{n}}=\frac{1}{\left(\sqrt{n}-\frac{8}{\sqrt{n}}\right)^2+50}\leqslant\frac{1}{50}.\end{aligned}$$

例 4 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $xyz(x+y+z)=1$，求 $(x+y)(x+z)$ 的最小值.

解

由 $xyz(x+y+z)=1$，可得 $x^2+xy+xz=\dfrac{1}{yz}$，于是

$$(x+y)(x+z)=x^2+xy+xz+yz=yz+\frac{1}{yz}$$

$$=\left(\sqrt{yz}-\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2+2, \tag{8}$$

容易由式(8)得出最小值为 2.

点评

当然式(8)的最后也可以由基本不等式得到最小值为 2,即:$yz+\dfrac{1}{yz}\geqslant 2$.

事实上,类似这样的条件不等式往往变化多端,如果不抓住特点常常会使问题变得很难把握.在后面的内容里我们会特意提到这类条件不等式.

例 5 设 x,y,z 是非负实数,且满足 $\sum\limits_{\text{cyc}} x=32$.试求 $\sum\limits_{\text{cyc}} x^3y$ 的最大值.

解 不妨设 $x=\max\{x,y,z\}$,则

$$\begin{aligned}&27\Big(\sum_{\text{cyc}} x\Big)^4-256\Big(\sum_{\text{cyc}} x^3y\Big)\\&=z(148(xz(x-z)+y^2(x-y))+108(yz^2+x^3)\\&\quad+324xy(x+z)+27z^3+14x^2z+162y^2z+176xy^2)\\&\quad+(x-3y)^2(27x^2+14xy+3y^2)\geqslant 0,\end{aligned}$$

当且仅当 $x-3y=z=0$ 时等号成立.从而

$$\sum_{\text{cyc}} x^3y\leqslant\frac{27}{256}\Big(\sum_{\text{cyc}} x\Big)^4=110592,$$

当且仅当 $x=24,y=8,z=0$ 时等号成立.

知识桥

利用上面的原理,我们来证明一个结果.

作为平方非负性的更生动的应用,我们考虑和式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iu+y_iv)^2=u^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2uv\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+v^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2, \qquad (9)$$

其中所有的量都是实数.

由于上述关于 u 和 v 的二次型非负,所以它的判别式必非正,可表示成

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right), \qquad (10)$$

当且仅当集合$\{x_i\}$和$\{y_i\}$对应成比例时等号成立,即存在不全为 0 的数 λ 和 μ,使得

$$\lambda x_i+\mu y_i=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

这就是柯西(Cauchy)不等式.

训练营

例 6 证明柯西不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2. \qquad (11)$$

证明 式(11)左边减去右边得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\\ =&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^2b_j^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_ia_jb_j\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-2a_ib_ia_jb_j)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\\ =&\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\\ \geqslant&0,\end{aligned}$$

故式(11)成立.

点评

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$
$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2, \qquad (12)$$

这就是拉格朗日(Lagrange)恒等式.

例 7 (纽伯格-佩多(Neuberg-Pedoe)不等式)设$\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别是 a_1,a_2,a_3 和 b_1,b_2,b_3,它们的面积分别记为 S_1 和 S_2.证明:

$$a_1^2(b_2^2+b_3^2-b_1^2)+a_2^2(b_3^2+b_1^2-b_2^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)$$
$$\geqslant 16S_1S_2, \qquad (13)$$

当且仅当$\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

证明 我们将式(13)稍微变形后可以得到其等价形式:

$$16S_1S_2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2). \qquad (14)$$

移项并应用柯西不等式得

$$16S_1S_2+2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)$$
$$\leqslant\sqrt{(16S_1^2+2(a_1^4+a_2^4+a_3^4))(16S_2^2+2(b_1^4+b_2^4+b_3^4))}$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2),$$

当且仅当 $S_1:S_2=a_1^2:b_1^2=a_2^2:b_2^2=a_3^2:b_3^2$,即$\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

点评

这个不等式是 1891 年纽伯格(J. Neuberg)提出的,1943 年佩多(D. Pedoe)重新发现并证明了这个不等式. 本例中应用柯西不等式,为纽伯格-佩多不等式给出了一个极其简洁的证明.

例 8 设$\triangle A_1A_2A_3$ 与$\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3,面积分别为 S_1,S_2,又记