全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数

linear algebra

孙洪波 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数

Xianxing Daishu

孙洪波　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书针对应用型人才培养的特点及当前应用型本科、独立学院线性代数的实际教学情况，注重概念、理论背景，强调线性代数基本思想、方法，恰当介绍线性代数的基本应用和计算机实验。本书结构和内容吸收了近年来线性代数课程及教材建设的经验和成果，在满足线性代数教学基本要求的前提下，注重培养学生的线性代数素养和解决实际问题的基本能力。

本书内容体系结构新颖，分为矩阵及其运算、线性方程组与向量组和相似矩阵与二次型三章，突出矩阵及其运算，内容紧凑、简练，衔接紧密、自然，由浅入深，由易到难，由具体到抽象，同时，难点分散，叙述通俗，在每章开头增加本章知识结构和内容提要，并对重要的概念、结论、方法以提示形式予以强调，便于学生自主学习。

本书教学参考学时约为 32 ~ 48 学时，可供应用型本科高等院校以及独立学院理工、经管类各专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/孙洪波主编. —北京：高等教育出版社，2010.7

ISBN 978-7-04-029665-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 097601 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申
责任绘图 黄建英 **版式设计** 范晓红 **责任校对** 刘 莉
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	三河市骏杰印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2010 年 7 月第 1 版
印 张	14.75	印 次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字 数	270 000	定 价	20.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 29665-00

前 言

本书是由全国高等学校教学研究中心组织实施的全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”子课题——“独立学院线性代数教学基本要求与教学方法研究”的成果之一,可作为普通本科院校、独立学院、高等职业教育、成人高等教育等理工、经管类各专业线性代数课程的教材,也可供工程技术人员自学阅读。

一直以来,线性代数的教学模式、教学内容以及教材体系没有太大改变。虽然其内容不多,但由于其较高的抽象性,大多数学生感到线性代数比较难学。而另一个不容忽视的现实是,由于社会和科技的进步与发展,学生的学习环境发生了较大改变;计算机和互联网的发展与普及,改变了大多数学生的学习习惯和学习方法,也导致其理解问题和思考问题的方式、方法发生了改变。面对这些变化,重新审视线性代数教学模式乃至线性代数教材,使之体现这些改变已成当务之急。

本教材在遵循本科理工类、经管类线性代数教学基本要求的前提下,对传统线性代数教材体系进行了改革和调整,目的是既能充分体现线性代数的基本思想和基本体系结构,同时,又力争做到尊重读者的认知规律,符合认知者的思维习惯和思考方式;变灌输为说理,循循善诱,化抽象为自然,教师便于组织教学,学生便于阅读与自学。

基于上述考虑,本书在以下几个方面进行了尝试:

1. 在既兼顾线性代数的传统内容,又注重体现对线性代数的应用要求前提下,重新调整了内容体系结构,尽量使之更清晰、更顺畅、更合理,而又不失其数学严谨性。具体而言:

(1) 全部内容重新划分为三章,第一章矩阵及其运算是基础,第二章线性方程组与向量组、第三章相似矩阵与二次型是核心。相关内容紧密组织在一起,以此强调线性方程组和相似矩阵理论在讨论向量组与二次型问题中的理论基础与工具作用。

(2) 以矩阵开篇,行列式作为矩阵的一种运算和数字特征进行介绍,并以归纳法给出行列式递归定义。对初学者而言,这样的安排使得开篇不难,矩阵与行列式融合更好,便于读者把握二者的关系。

(3) 对于线性方程组，先介绍其求解方法和解的存在性，在此基础上，通过直观分析其通解的特征，初步指出线性方程组解的结构。在学习了向量组的秩后，再从向量组的最大无关组角度，给出齐次线性方程组基础解系的定义，讨论解的结构的本质。最后，从向量空间的基及生成空间的高度，再次讨论齐次线性方程组基础解系和解的结构。这样处理是为了化解初学者关于解的结构的困难，循序渐进，使读者逐步加深对解的结构的理解与认识，同时，也兼顾了不同层次教学的要求。

(4) 借助欧氏空间的概念，引出向量内积以及向量正交性等概念和理论，使得这部分内容的引入自然、合理；紧接向量空间，再安排作为阅读内容的线性空间简介一节，并以最小的篇幅，在不过多涉及线性空间具体内容的前提下，着重阐述了由向量空间推广到线性空间的目的和意义。这样的安排使得该部分内容衔接紧密，一气呵成。

(5) 通过简要介绍线性变换的概念，使得正交变换的引入自然而不生硬。

(6) 注意结合具体内容，选取通俗易懂，篇幅短小的实际问题，着眼其原理，恰到好处地介绍线性代数的应用，使读者在学习过程中不用花费太多时间和精力，达到开阔视野，启迪思维和想象力的目的。

(7) 个别概念和理论，虽超出了传统线性代数内容，但从线性代数基本体系结构角度，做简单介绍，或作为阅读内容，还是有益的。本书这些内容大都用星号或异体字排版体现，跳过这些部分不会影响后续知识的学习。

2. 注重说理与解释，尽量避免直接给出定义或定理，尽可能从实际问题或几何直观的讨论展开相应的概念和理论；另外，在不失数学严密性的前提下，尽量采用通俗的语言，便于读者理解和接受，增强教材的可读性。

3. 本书采用先按节配备思考题和基本习题，再按章配备具有自测自检作用的基础复习题和具有一定灵活性的综合应用题，题目由浅入深。这种循序渐进的习题编排方式，实践表明，符合学生的认知规律和学习习惯，便于教师根据教学目的和要求组织教学以及学生自主学习。

4. 在有限学时的线性代数教学过程中，如何体现教学内容的计算机实验性，体现计算机对线性代数应用和研究的辅助作用，是近年来国内外线性代数教学改革和教材编写的一个热点。本书在顺应这一趋势和潮流的同时，有所改变，把数学实验内容化整为零，紧密安排在相应的正文之后，借此希望加强读者的注意和兴趣。本书该部分内容以 Mathematica7.0 为软件平台，只涉及与本节内容有关的基本命令与操作，无需教师讲授。有关数学软件的更多知识，请读者自行参阅有关资料和软件自身的帮助文件。这种抛砖引玉的做法，其目的是给有这方面兴趣的读者留有更大的自主探索和学习的空间。这种尝试，有待实践的检验。

5. 与本书配套的电子资源正在整理、研究和制作当中，届时将提供给广大读者，希望能从另一个层面为线性代数的学习提供帮助。

本书编写过程中，系统地总结了多年线性代数教学的经验教训，主客观分析了教学中遇到的各种问题，也借鉴了国内外线性代数教学改革研究以及教材编写的成功经验和成果。虽然出发点是好的，但是由于时间紧张并限于编者水平，不妥之处，甚至谬误在所难免。恳请广大读者和使用该教材的教师提出宝贵的意见和建议，编者不胜感激！

最后，感谢全国高等学校教学研究中心给编者一个平台和机会，得以系统地总结多年的线性代数教学，并思考线性代数的教学改革；感谢高等教育出版社为该教材的出版所给予的支持和帮助；感谢北京理工大学珠海学院对该课题的资助。感谢课题组，特别是北京理工大学珠海学院基础部数学教研室全体教师，在本书行稿以及试用过程中不断给予的改进意见和建议。另外，赵志红讲师多次校对书稿，并提出了许多有益的建议；刘大勇博士演算了全部习题，并给出了解答；杨骅飞教授、张文国副教授、赵志红讲师以及刘大勇博士等与作者一起通读了书稿并就有关内容提出修改意见和建议，在此特别致谢！

编者于北京理工大学珠海学院

2010年1月

目 录

第1章　矩阵及其运算

正如微积分是处理连续量的重要数学工具, 线性代数则是研究线性离散量的主要数学理论和方法. 如果问题由关联着的多个因素引起, 并且所研究的关联性是线性的, 那么, 该问题即可称为线性问题. 历史上线性代数的基本问题之一就是关于线性方程组的问题. 实际问题刺激了线性代数的诞生与发展, 近现代数学分析与几何学等数学分支的需求, 又促使了线性代数进一步发展. 反过来, 它又广泛应用于数学的许多分支, 以及自然科学、经济学、管理学和其他工程技术领域.

线性代数研究对象主要包括线性方程组、向量组的线性相关性、向量空间、线性变换和二次型等方面的问题.

这些问题的系统研究无法离开线性代数的最基本概念和工具——矩阵. 矩阵在线性代数中具有极其基础的地位和作用. 系统地学习、深入理解并掌握矩阵的基本理论与基本运算, 是学好线性代数并利用其解决实际问题的首要任务和基本保证.

本章介绍矩阵及其基本运算和基本理论, 并根据内容的需要, 在随后章节, 还要不断地对矩阵的运算和理论进行深化和扩充.

本章知识结构与内容提要

矩阵的概念和各种基本运算构成本章核心内容.

- **知识结构**

矩阵	概念, 几种常用特殊矩阵
矩阵运算	基本运算: 线性运算 (加法, 减法, 数乘), 乘法, 转置.
	其他运算: 方阵的幂, 方阵的逆, 矩阵分块, 初等变换.
矩阵数字特征	方阵行列式, 矩阵的秩.

- **内容提要**

本章介绍线性代数最基本的内容: 矩阵及其运算. 读者应注意掌握每种运算的定义与规则, 性质与结论, 具体的运算方法以及应用. 由于线性代数同微积分相比, 内容区别较大, 概念、定理和结论较多, 读者应注意调整思维方式和学习方法; 更加注重概念和理论的理解和掌握, 而不仅仅是计算.

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的引入

矩阵是线性代数中重要的基本概念和主要研究对象, 也是线性代数研究和应用的重要工具. 矩阵这一术语首先由西尔维斯特 (J.J.Sylvester,1814 — 1897) 首先发明并使用. 凯莱 (Arthur Cayley,1821 — 1895) 较早给出了关于矩阵的一系列研究成果, 一般被公认为矩阵论的创立者. 特别需要指出的是, 凯莱出生于一个古老而有才能的英国家庭, 就读大学时已发表了 3 篇论文. 为了谋生,1849 年他转从律师职业, 工作卓有成效, 并利用业余时间研究数学, 在他当律师的 14 年间, 发表了约 250 篇数学论文, 他一生发表的论文超过 900 篇.

为了对矩阵的由来加深认识和理解, 首先看几个工程技术和经济管理中的有关问题.

引例 1 线性方程组的表达形式问题

历史上公认的线性代数的第一个问题是关于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

的求解问题. 如果关注其整体结构, 则线性方程组可以看作是由未知数系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$ 和右端常数项 $b_j(j=1,2,\ldots,n)$ 完全确定. 这样, 一个线性方程组和位于下面的矩形数表可以建立一一对应的关系

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{matrix}$$

这样的数表包含了线性方程组的所有信息.

引例 2 电脑显示器的分辨率问题

电脑显示器的显示分辨率从早些时候的 640×480 发展到今天的 1920×1080, 甚至更高. 实际上, 显示画面由像素点构成, 以后者为例, 其中数字 1920 表示屏幕水平方向上可显示的像素点数, 数字 1080 表示垂直方向上可显示的像素点数. 显而易见, 分辨率决定了显示画面的解析度. 该数值越大, 像素点就越多, 图像也就越清晰. 如果以像素点为元素, 分辨率为 1920×1080 的显示器, 其屏幕即可与一张具有 1080 行,1920 列的矩形数表

$$\begin{array}{cccccccl}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1080\text{行} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot & \\
 & & & & 1920\text{列} & & &
\end{array}$$

一一对应. 这种对应的结果, 奠定了计算机图形学的代数基础.

引例 3 城市间客运班线问题

某客运公司在 A,B,C,D 四个城市间开辟了若干条客运班线. 若从 A 到 B 有班线, 则用从 A 指向 B 的有向线段连接 A 与 B. 如图 1–1 所示. 该问题也可用二维表格来表示, 表格上方的 A 、 B 、 C 、 D 表示到达城市, 左边 A 、 B、C 、 D 表示出发城市,× 表示没有班线,√ 表示有班线.

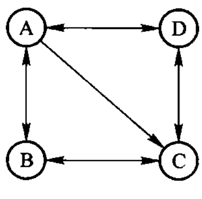

图 1–1

	A	B	C	D
A	×	√	√	√
B	√	×	×	×
C	×	√	×	×
D	√	×	√	×

进一步, 把城市间班线连接特征数量化, 令

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{从}i\text{市到}j\text{市有一条单向班线;}\\0,\text{从}i\text{市到}j\text{市没有单向班线.}\end{cases}$$

$i,j=1,2,3,4$ 分别对应 A,B,C,D 四个城市. 这样一来, 在明确表格所表述的意义后, 便可以把问题简化并抽象为如下一张矩形数表

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

并且, 后面会看到, 在引入矩阵的运算之后, 基于该矩形数表的运算还可以表达各城市间客运班线更多的信息.

引例 4 产品的产销状况问题

在经济管理领域, 也经常构造和利用这样的矩形数表. 例如, 某种产品, 有 m 个产地 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$, 其销售地有 n 个 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_n$, 则其产销的总体情况可用 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

表示, 其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 表示由产地 A_i 销往 B_j 的数量.

以上例子虽来自不同领域, 但其表现形式都与一张抽象的矩形数表有关. 在数学上, 称这样的数表为矩阵, 其目的是为了从数学的角度对其表现形式所呈现的数量特征加以深入研究.

矩阵理论是线性代数中最重要和最基础的内容, 也是线性代数解决问题的核心工具.

1.1.2 矩阵的概念

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数排成的如下形式的 m 行 n 列矩形数表

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}, \mathrm{row}_i(\boldsymbol{A}) \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ \text{第 } j \text{ 列}, \mathrm{col}_j(\boldsymbol{A}) & \end{array} \tag{1.1}$$

称为 $m\times n$ 矩阵, 或 m 行 n 列矩阵, 简称矩阵. 其中, 数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵第 i 行第 j 列的元. 矩阵通常可简记为

$$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_{m\times n},(a_{ij})_{m\times n},(a_{ij}).$$

☞ 提示: 为了整体表示矩形数表, 矩阵总是在其上加一个括弧, 并注意总是用大写黑体字母表示矩阵.

本书中所涉及的矩阵, 除特别说明外, 其元都为实数, 也称为实矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相等, 都等于 n, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵, 可简记为 $\boldsymbol{A}_n$. 此时, 元 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 构成了方阵 $\boldsymbol{A}_n$ 的对角线. 如果两个矩阵具有相同的行数和列数, 则称这两个矩阵为同型矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵, 并且对应元相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\ \ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.3 几种重要的特殊矩阵

1. 零矩阵 元全为零的矩阵称为零矩阵, 记为 $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}_{m\times n}$, $(0)_{m\times n}$.

2. 列 (行) 矩阵 只有一列的矩阵

$$\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix}$$

称为列矩阵, 也称为列向量, 用小写黑体字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots$ 表示;

只有一行的矩阵

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

称为行矩阵, 也称为行向量, 与列矩阵对应, 用符号 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}},\cdots$ 表示.

3. 三角形矩阵 方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为三角形矩阵. 前者称为上三角形矩阵, 后者称为下三角形矩阵.

4. 对角阵 方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 n 阶对角阵. 对角阵也记为 $\mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$, 或用大写黑体希腊字母 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示.

5. 单位阵 形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

的对角阵称为单位阵, 通常记为 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}_n$(或 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}_n$).

☞ 提示: 由上述定义容易看出, 零矩阵未必是方阵, 而三角形矩阵, 对角阵, 单位阵必须是方阵.

Mathematica 求解与实验

命令输入结束, 可以通过组合键 “ Shift+Enter ” , 立即得到该命令的执行结果.

以矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 为例, 输入

```
A={{1,-2,0},{4,3,5}}
```

则输出

$$\{\{1,\text{-}2,0\},\{4,3,5\}\}.$$

而键入

```
MatrixForm[A]
```

则输出

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

该命令只用于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 直观显示成通常矩阵形式, 不能参与运算. 而命令

```
IdentityMatrix[3] 和 DiagonalMatrix[{1,2,3}]
```

分别生成 3 阶单位阵和相应的对角阵. 命令

```
Table[a[i,j],{i,4},{j,3}]   或   Array[a,{4,3}]
```

生成抽象矩阵, 其输出为

$$\begin{bmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] \\ a[4,1] & a[4,2] & a[4,3] \end{bmatrix}.$$

习题 1.1

A. 思考题

1. 就本节内容而言, 哪些矩阵要求必须是方阵?

B. 练习题

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & b \\ 3a & -c \end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 求 a,b,c.

3. 当 a,b,c 分别满足什么条件时, 方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

是上三角形矩阵, 下三角形矩阵, 对角阵和单位阵?

1.2 矩阵的基本运算

本节我们介绍矩阵的各种基本运算及其性质. 矩阵的运算是矩阵理论的基础, 矩阵丰富的运算决定了矩阵应用的广泛性.

1.2.1　矩阵线性运算

矩阵的加法及数乘两种运算统称为矩阵的线性运算.

定义 2.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{1.2}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的加法运算. 称

$$k\boldsymbol{A}=(k\,a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} k\,a_{11} & \cdots & k\,a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k\,a_{m1} & \cdots & k\,a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{1.3}$$

为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法运算, 简称为矩阵的数乘运算.

利用加法及数乘运算, 可以定义矩阵的减法运算 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

☞ 提示: 只有同型矩阵才能进行矩阵的加减运算.

由于矩阵线性运算的本质是对应元素的线性运算, 假定运算可行, 不难验证它满足如下运算律

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;　　(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;　　(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;　　(6) $k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})=kl\boldsymbol{A}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;　　(8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, 满足 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解　化简 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$, 得 $3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$, 即所求

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}).$$

从而