平面几何一题多变

光明日报出版社

平面几何一题多变

主　编　翟连林　李寿高
副主编　薛东年　仇如海　徐正华
编　者　吴家美　刘建忠　刘尚宽

光 明 日 报 出 版 社

(京）新登字101号

内容简介

本书从初中《几何》课本里精选出部分有代表性的平面几何题，在观察、联想、类比、猜想等基础上进行了科学的变换，并对变换后的命题给予分析、比较、证明、归纳总结. 纵观这些千姿百态、饶有趣味的变式题，有的形同实异，有的又形异实同，有的则将错杂在课本里那些无甚关联的题目串联在一起，读者从中可以领略到几何命题的“定”中有“动”与“动”中有“定”的变化之妙，对创造性思维能力与灵活应变能力的培养、开阔知识视野、提高解题技法等都将起着积极的作用. 本书不仅可供中学教师、教学教研人员备课、命题时参考，也可供初中学生及自学青年阅读.

全文通俗易懂，富有启发性.

平面几何一题多变
翟连林 李寿高 主编

光明日报出版社出版发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
冶金部地球物理勘查院激光照排
河北省保定市满城县东方印刷厂

开本：787×1092毫米 1/32 9.9375印张 283千字
1992年2月第1版 1992年2月第1次印刷
ISBN7-80091-311-9/G·546
印数：1-10000册 定价：4.00元

引　言

一、一题多变在平面几何教学中的作用

在浩瀚如海的平面几何命题里，如逐一渲证，则费时耗力，大可不必；应以一当十、举一反三，才不失为良法．问题是以谁为“一”．《几何》教科书是平面几何教学的根据，课本上的例题、习题具有很强的典型性、普遍性、可变性，对强化双基、开发智力、培养能力都有很好的功用．其他参考书中的命题多少也出于其中．因此，我们把课本中某些具有重要参考价值的命题作为举一反三的“资本”，充当“以一当十”中的“一”．那么，有了“一”，又怎样当“十”呢？这就是一题多变．通过一题多变：

一是让学生更加深刻地掌握原题（课本中的例题、习题）及其变式题的构成形式、图形特征、证明思路，易于总结某一类题的解题经验、解题规律及思想方法，加深对原题的理解与领会；

二是揭示数学知识领域里的内在联系，串联形“同”实“异”与形“异”实“同”等部分平面几何题，使分散的同类题加以集中，便于区分与联系，有利于形成技能技巧；

三是有利于提高学生的应“变”能力．经常进行一题多变训练，有利于学生娴熟地揭开“陌生”命题的“面纱”，识别它是由哪个命题（或基本图形）变化而成，从而可以敏捷地把不熟悉的问题转化为熟悉的问题，以顺利地完成解题任务；

四是有利于学生发散性思维能力及创造性思维能力的提高．进行一题多变，可以培养和提高学生的审题能力，激发学习兴趣，帮助学生开拓思路，提高分析问题、判断问题、解决问题的能力；

五是有利于教师进行题组教学，在平面几何教学中，教师充分发挥题组的作用，让学生进行一题多变的题组训练，把学生的思维由平易浅近的“原题”坦途，不知不觉地引入一个色彩斑斓的数学王宫，从而形成系统的“题库”，而“钥匙”往往只有一把或几把，有效地提高教

学效果.

总之，进行一题多变训练，对巩固双基、挖掘课本习题、例题的潜在宝藏，配合平面几何教学，提高师生应变水准，丰富题组教学内容，都将起到积极的作用.

二、一题多变的基本做法

本书变式题主要来源于课本，即对新编初中《几何》课本（本书简称《几何》）第一、二两册里某些代表性的例、习题（本书称"原题"）进行多方位的变换而产生一系列的变式题. 那么，怎样进行一题多"变"呢?

首先，要对课本里的基本概念、公理、定理、性质等基础知识有一个比较系统完整的认识，能在理解的前提下熟练地用自己的语言说出这些内容，并能正确地运用几何符号表述相关的几何语言，还要掌握平面几何证题的一般技法.

其次，要掌握命题的组成形式，即由题设与结论两部分组成，明白命题中各条件要彼此相对独立，命题或题目中的条件不多余，不欠缺，了解基本题型的结构，如证明题、计算题、标准化题型等.

再其次，要善于运用运动变化的观点观察事物，于"动"中体察出"静"，又于"静"中窥测出"动". 如题设中有"P点是$\odot O$上的一动点"这一模式条件，就可把 P 点看成是某个定点 M 经过移动变化而得；又如题设中有"Q 是等腰$\triangle ABC$ 底边 BC 上的中点"模式条件，我们则可看成"Q 点是 BC 上的一个动点". 如此见"静"思"动"，见"动"盼"静"，"动"、"静"有致，定能将"原题"装扮得更加艳丽多姿，令人爱不释手.

此外，对典型习题要勤于思考，善于钻研，不断地展开联想，通过探索、猜测而抓住事物本质的联系.

一题多变的具体做法是:

第一，让原题题设发生变化，而结论保持不变，我们称之为"正向变换". 在正向变换里，可以增强题设条件，也可以减弱条件，既可把一般条件改变成特殊条件，也可以把特殊条件改变成一般条件而得变式题.

例如，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，AD 中点为 M，CM 的延长线交 AB 于点 K，求证：$AB=3AK$(《几何》第二册 P. 65 第一题)

本例可变换成：

$\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的高，AD 的中点为 M，CM 的延长线交 AB 于点 K，求证：$AB=3AK$.

这道变式题显然把原题中条件减弱了，即等腰$\triangle ABC$ 变成了任意$\triangle ABC$ 了，而结论却未有改变.

又如，在已知锐角三角形 ABC 的外面作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$，CE 和 BG 交于 O 点，求证：(1) $CE=BG$；(2) AO 平分$\angle EOG$.

本例可变换成：

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=$Rt$\angle$，分别以 AB、AC 为边向形外作正三角形 ABE 与 ACG，CE 与 BG 相交于 O 点，求证：(1) $CE=BG$；(2) AO 平分$\angle EOG$.

这个变式题把原题条件变换了两处，一是把锐角三角形变成直角三角形（条件增强了），二是把形外的正方形 $ABDE$ 与 $ACFG$ 变成正三角形 ABE 和 ACG（条件转换了），其结论仍未发生改变.

第二，让题设不变而结论发生改变，我们称这种变换也叫“正向变换”. 此时的变换，关键是根据原题的“可塑性”大小，尽可能地向原题索取其他结论.

例如，已知矩形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于点 O，E、F 分别是 OA、OD 的中点，求证：$BE=CF$.

本例可变换成：

已知矩形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于点 O，E、F 分别是 OA、OD 的中点，求证：四边形 $EBCF$ 是等腰梯形.

第三，让题设与结论变换位置，我们称这种变换叫“逆向变换”. 这样变换出来的命题是原命题的逆命题（或逆命题之一），在此，需要说明两点：一是一个命题的逆命题的真假性与原命题不一定一致；二是当一个命题的题设条件不止一个，结论也不止一个时，则其逆命题

就不止一个．此时，原命题的逆命题中，有的是真命题，有的可能是假命题，这就要通过推理方能作出决断．

例如，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=AD+BC$，M 为 CD 的中点，求证：AM、BM 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle CBA$．

由于本题题设有三个，结论有两个，故其逆命题就有十一个，不难证明这些逆命题都是真命题．

又如，直角三角形中成比例线段定理(《几何》第二册 P. 45)：

已知：AB 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边，CD 是高．

求证：(1) $CD^2=AD \cdot BD$；

(2) $AC^2=AD \cdot AB$，$BC^2=BD \cdot AB$．

它的逆命题有六个，而下列命题就是一个假命题．

若 AB 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边，D 是 AB 上一点，且满足 $CD^2=AD \cdot BD$．则 $CD \perp AB$．

第四，题设与结论都改变，我们称这种变换叫“双向变换”，一般地说，一个命题的题设发生变化，则结论亦将发生相应变化，这样的变换比比皆是，不可胜数．

如：从▱$ABCD$ 的顶点 A、B、C、D 向形外的任意直线 MN 分别引垂线 AA'、BB'、CC'、DD'，垂足分别是 A'、B'、C'、D'．

求证：$AA'+CC'=BB'+DD'$ (《几何》第一册 P. 204 28)．

将本题题设中的平行四边形变成三角形，则有变式题：

从 $\triangle ABC$ 的重心 G 及顶点 A、B、C 向形外的任意直线 MN 分别引垂线段 GG'、AA'、BB'、CC'．

求证：$AA'+BB'+CC'=3GG'$．

在进行双向变换时，往往把题设中的某些特殊条件变换成一般条件，或者把某些一般条件改成特殊条件，此时原题的结论也将随着变化成一般性结论或特殊性结论．

如《几何》第二册 P.65 1，当“AD 为 BC 边上的高”变成“D 是 BC 上的点，且 BD：$DC=m$：n (m、n 为自然数)”时，有结论

“$AB=\frac{2m+n}{m}AK$”.

此外，对变换后的变式题，在联想、类比、归纳推理等基础上，加以判断与解答或证明，及时总结解题经验与解题规律或变式题的变化规律，力求细致观察，把握重点，变出新意，达到激发学习兴趣，启迪思维，发展、提高能力的目的.

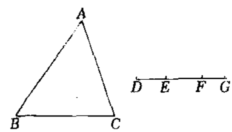
目　　录

第一章　基本概念

【例 1】（《几何》第一册 $P.6$　2）

【原题】 如图　1-1，甲、乙两图中各有几条线段？用字母表示各条线段.

【寻变一】 对于乙图，在线段 DG 上再增添几个点（假设共有 n 个点）DG 上有几条线段？



（甲）　　（乙）

图　1-1

【变换一】 线段 DG 上有三个点 E、F、H，其上共有几条线段？试用字母表示各条线段.

【解】 如图　1-2，有 10 条线段，它们分别是 DE、DF、DH、DG；EF、EH、EG；FH、FG；HG.

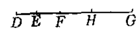


图　1-2

【评注】 显然，在线段 DG 上，除端点外，其上只有一个点时，可组成 $2+1=3$ 条线段；有两个点时，可组成 $3+2+1=6$ 条线段；有三个点时，可组成 $4+3+2+1=10$ 条线段；……由此类推，有 n 个点时，可组成 $(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 条线段.

另外，如果把线段改成直线，并在直线上添加若干个点，此时，组成的射线的条数将按怎样的规律去数呢？如果在一个角的顶点添加若干条射线，共可以组成多少个角？这些问题读者通过实践，不难总结出类似的解题方法.

【变换二】 将图　1-1（乙）向左右两方延长，数出图中共有几条射线（类似《几何》$P.14$　4)？若一直线上有 n 个点，那么该直线上共有多少条射线？

【解】 略.

【寻变二】 将原题图 1-1(乙)改成计算题得

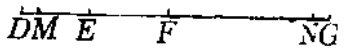


图 1-3

【变换三】 如图 1-3，E、F 为线段 DG 上两点，且 $DE=5\text{cm}$，$EF=6\text{cm}$，$FG=12\text{cm}$，求 DF 与 FG 中点间的距离（类似 P.15 13），又在 DE 上找一点 M，使 $DM=\frac{1}{5}DE$，在 FG 上找一点 N，使$NG=\frac{1}{6}EF$，求 MN 的长.

【解】 DF 与 FG 中点间的距离为 $\frac{DF+FG}{2}=\frac{5+6+12}{2}=11.5(\text{cm})$.

$MN=DG-DM-GN=DG-\frac{1}{5}DE-\frac{1}{6}EF=(5+6+12)-\frac{1}{5}\times 5-\frac{1}{6}\times 6=21\ (\text{cm})$.

【寻变三】 在图 1-2 中，若已知某些线段之比，能否求出另一些线段的比或长度？线段之间有无其他关系式存在？

【变换四】 若 $DF:FG=5:7$，$DE:EG=5:11$，$EF=15\text{cm}$，求 DG 的长.

【解】 $\because$ $DF:FG=5:7$，则 $DF=\frac{5}{12}DG$.

又 $DE:EG=5:11$，$\therefore$ $DE=\frac{5}{16}DG$，而 $EF=DF-DE$，$EF=15\text{cm}$，

$\therefore$ $\frac{5}{12}DG-\frac{5}{16}DG=15\text{cm}$. 故 $DG=144\text{cm}$

【变换五】 如图 1-4,已知 A、B、C、D 是一直线上顺次的四点.

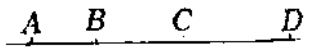


图 1-4

求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

【证明】 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AB\cdot CD+(AB+BD)(BD-CD)=AB\cdot CD+AB\cdot BD-AB\cdot CD+BD^2-BD\cdot CD=BD(AB+BD-CD)=AC\cdot BD$.

【小结】 本变换由数线段到计算线段长度，再到证明线段之间的

关系式，还总结出一些规律性的东西.

【例 2】 (《几何》第一册 $P.28$ 例 2)

【原题】 已知$\angle\alpha=\angle\beta$，$\angle\alpha$的补角是$\angle\beta$的余角的 3 倍，求$\angle\alpha$的大小.

【寻变】 原题设实际上就是已知$\angle\alpha$与$\angle\beta$的两个关系式，这两个关系式能否变化?

【变换一】 已知$\angle\alpha$与$\angle\beta$互为补角，$\angle\alpha$是$\angle\beta$的 1／3 还多 22.5°，求 (1) $\angle\alpha$、$\angle\beta$；(2) $(1/5)\angle\beta+2\angle\alpha$.

【解】 (1) 根据题意，得

$$\begin{cases}\angle\alpha=180°-\angle\beta; \\ \angle\alpha=\frac{1}{3}\angle\beta+22.5°.\end{cases}$$ 解之，得 $$\begin{cases}\angle\alpha=61.875°; \\ \angle\beta=118.125°.\end{cases}$$

(2) 由 (1) 知道$\angle\alpha$与$\angle\beta$的大小，故得

$$\frac{1}{5}\angle\beta+2\angle\alpha=\frac{1}{5}\times118.125°+2\times61.875°=23.625°+123.75°=147.375°.$$

【评注】 根据所给条件与隐含条件 (互补与互余两角的关系)，去建立方程 (或方程组) 等代数手段去解决几何问题，这是研究几何问题的一个重要的思想方法.

【变换二】 如图 1-5，$\angle AOB$是平角，从O点引两条射线，得$\angle BOC$、$\angle AOD$，设$\angle BOC=\angle\alpha$，$\angle AOD=\angle\beta$，当$\angle BOC$绕着顶点O按逆时针方向在平面内旋转，并使$\angle BOC$的边OB与$\angle AOD$的边OD重合，(OC旋转到OC') 时，$\angle COD=105°$，$\angle AOC'=15°$，试求$\angle\alpha$与$\angle\beta$的余角的度数.

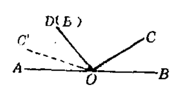


图 1-5

【解】 在$\angle BOC$绕顶点O按逆时针方向旋转的过程中，$\angle BOC$的大小保持不变，因此，当OB边转动到与OD边重合时，$\angle C'OD=\angle BOC=\angle\alpha$，于是，根据题意，得:

$$\begin{cases}\angle\alpha+105°+\angle\beta=180°; \\ \angle\beta-\angle\alpha=15°.\end{cases}$$ 解之，得 $$\begin{cases}\angle\alpha=30°; \\ \angle\beta=45°.\end{cases}$$

因此，$\angle\alpha$、$\angle\beta$ 的余角分别为 60°、45°.

【变换三】 如图 1-6，$\angle AOB$ 是平角，从 O 点引两条射线 OC、OD，且 $\angle BOC=\angle\alpha$，$\angle AOD=\angle\beta$，当 $\angle BOC$ 绕着顶点 O 按逆时针方向旋转，并当 OB 边旋转到与 AOB 垂直时，这边与该角在原位置时的另一边组成的角为 80°，旋转后该角的另一边与 OD 组成的角与 $\angle\beta$ 的比为 3：5，求 $\angle\alpha$、$\angle\beta$ 的大小.

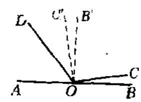


图 1-6

【解】 仔细分析题意，不难发现，$\angle\alpha$ 与 $\angle B'OC$ 互余，且 $\angle B'OC=80°$；$\angle C'OD=\frac{3}{5}\angle\beta$. 但 $\angle AOD+\angle DOC'+\angle B'OC'=\angle\beta+\frac{3}{5}\angle\beta+\angle\alpha=90°$，因此可得

$$\begin{cases}\angle\alpha+80°=90°;\\ \angle\beta+\frac{3}{5}\angle\beta+\angle\alpha=90°.\end{cases}\quad 解之得\ \begin{cases}\angle\alpha=10°;\\ \angle\beta=50°.\end{cases}$$

【小结】 本例的变换，都是通过改变题设条件而得到，其中变换二与变换三则是将原题中直接给出的两角的关系改变成利用图形旋转而间接地给出，但解题基本思想却是一脉相承的，都是设法建立含有这两个角的关系式，通过解方程组获解，这充分体现了平面几何题的"动"中求"定"、"定"中求"动"的思想，对训练思维的灵活性有积极的意义.

【例 3】（《几何》第一册 $P.32$　11）.

【原题】 如图 1-7，

已知 $\angle AOB=165°$，$\angle AOC=\angle BOD=90°$，求 $\angle COD$ 的大小.

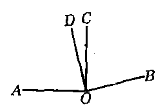


图 1-7

【寻变一】 本题中的 $\angle COD=\angle AOC+\angle BOD-\angle AOB=90°+90°-165°=15°$，在这里，$\angle AOC=\angle BOD=\mathrm{Rt}\angle$，由此可得 $\angle AOD=\angle BOC$（该结论是从《几何》第一册 $P.69$　1（3）），当

$\angle AOC=\angle BOD$ 但都不等于 90° 时，问题将发生怎样的变化？

【变换一】 如图 1–8，过 O 点作四条射线 OA、OB、OC、OD，$\angle AOC=\angle BOD$，问

(1) 若 $\angle BOD=135°$，$\angle AOD=25°$，则 $\angle BOC$ 为多少度？

(2) 若 $\angle DOC=100°$，$\angle BOA=135°$，则 $\angle AOD$ 为多少度？

(3) 若 $\angle AOB$ 的补角为 15°，$\angle AOC=135°$，则 $\angle DOC$ 为多少度？

【解】 略.

【变换二】 如图 1–8，满足什么条件时，$\angle AOD=\angle BOC$？$\angle COD=\angle AOC+\angle BOD-\angle AOB$？

图 1–8

【解】 略.

【评注】 在许多平面几何习题的图形里常包含图 1–8，因此，只要具有 $\angle AOC=\angle BOD$，就可推得结论：$\angle AOD=\angle BOC$，$\angle DOC=\angle AOC+\angle BOD-\angle AOB$，记住这个结论，对分析寻找解（证）题思路是有帮助的.

【寻变二】 如果图 1–7 中的所有角都不是特殊角，我们可以在改变条件的前提下，变换出一些命题.

【变换三】 如图 1–9，$\angle AOB:\angle BOC:\angle COD:\angle DOE=1:2:3:4$，$\angle COD=40°$，求 $\angle AOE$ 的度数.

【分析】 根据已知条件，可设 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$、$\angle DOE$ 的度数分别为 x、$2x$、$3x$、$4x$，则有 $3x=40$，故 $x=\frac{40}{3}$，于是

$\angle AOE=10x=133\frac{1}{3}$(度).

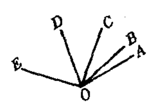


图 1–9

【解】 略.

【变换四】 如图 1-10，OB 是$\angle AOC$ 的平分线，且$\angle 2:\angle 3:\angle 4=1:3:4$，求$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 的度数.

【分析】 注意到$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$，并且$\angle 1=\angle 2$，那么根据题意不难求得$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 分别为 40°、40°、120°、160°.

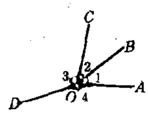


图 1-10

【解】 略.

【变换五】 如图 1-11，OM 是$\angle BOG$ 的平分线，ON 是$\angle AOG$ 的平分线，且$\angle AOB=72°$. 试求$\angle MON$ 的度数，并说明射线 OG 在$\angle AOB$ 内取不同位置，$\angle MON$ 的大小保持不变.

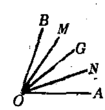


图 1-11

【解】 因为 OM、ON 分别是$\angle BOG$、$\angle AOG$ 的平分线，所以

$$\angle MOG=\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOG, \angle NOG=\angle NOA=\frac{1}{2}\angle AOG.$$

而$\angle BOG+\angle AOG=\angle AOB=72°$,故

$$\angle MOG+\angle NOG=\frac{1}{2}(\angle BOG+\angle AOG)=\frac{1}{2}\times 72°=36°.$$

即$\angle MON=36°$.

又因为不管 OG 在$\angle AOB$ 内的位置怎样变化，$\angle MON$ 的度数始终等于$\angle AOB$ 的度数的一半（即 36°），故$\angle MON$ 的大小不因 OG 在$\angle AOB$ 内的位置改变而改变.

【评注】 本变换也体现了“动”中有“定”.

第二章　相交线、平行线

【例 4】（《几何》第一册 $P.71$　6）

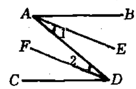


图　2-1

【原题】已知 $AB \parallel CD$，AE、DF 分别是 $\angle BAD$、$\angle CDA$ 的平分线，求证：$AE \parallel DF$.

【证明】如图 2-1，∵　$AB \parallel CD$(　　　)，

∴　$\angle BAD = \angle($　　　$)$（　　　　　）.

∵　AE、DF 分别是 $\angle BAD$、$\angle CDA$ 的平分线（　　　），

∴　$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle CDA$(　　　　　).

∴　$\angle 1 = \angle 2$(　　　　　).

∴　$AE \parallel$（　　　　）（　　　　　　　　　）.

【寻变一】当 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 分别在 $\angle BAD$ 及 $\angle CDA$ 内部按相同的规律变化时，可得如下变式题

【变换一】若 $\angle 1 = \frac{1}{3}\angle BAD$，$AB \parallel CD$，$\angle 2 = \frac{1}{3}\angle CDA$，求证：$AE \parallel DF$.

【证明】∵　$AB \parallel CD$，

∴　（　　　　）=（　　　）（两直线平行，内错角相等）.

∵　$\angle 1 = \frac{1}{3}\angle BAD$，$\angle 2 = \frac{1}{3}\angle CDA$(　　　　　)，

∴　$\angle 1 = \angle 2$(　　　　　).

∴　（　　　　　）$\parallel$（　　　　）（　　　　　）.

【评注】理由同原题，请读者自己完成.

【变换二】若 $\angle 1 = \frac{1}{n}\angle BAD$，$\angle 2 = \frac{1}{n}\angle CDA$（$n$ 为自然数），$AB \parallel CD$.

求证：$AE \parallel DF$.

【证明】 略.

【变换三】 若 $AB \parallel CD$，$\angle DAE : \angle EAB = n : m$，$\angle ADF : \angle FDC = n : m$（$m$、$n$ 均为自然数).

求证：$AE \parallel DF$.

【证明】 $\because$ $AB \parallel CD$(　　　),

$\therefore$ $\angle BAD =$(　　　)(　　　　　　　).

$\because$ $\angle DAE : \angle EAB = n : m$，$\angle ADF : \angle FDC = n : m$.

$\therefore$ $\angle 1 = \dfrac{n}{m+n}\angle BAD$，$\angle 2 = \dfrac{n}{m+n}\angle ADC$(比例的性质).

$\therefore$ $\angle 1 =$(　　　　)(　　　　　　).

$\therefore$ $AE \parallel$(　　　　)(　　　　　　　　).

【变换四】 若 $AE \parallel DF$，$\angle 1 = \dfrac{1}{2}\angle BAD$，$\angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle ADC$. 求证：$AB \parallel CD$.

【评注】 本变换是《几何》第一册 P. 78　19(3).

【证明】 略.

【变换五】 若 $AE \parallel DF$，$\angle 1 = \dfrac{n}{m}\angle BAD$，$\angle 2 = \dfrac{n}{m}\angle ADC$. 求证：$AB \parallel CD$.

【证明】 $\because$ $AE \parallel DF$(　　　　),

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$(　　　　　　　　).

$\because$ $\angle 1 = \dfrac{n}{m}\angle BAD$，$\angle 2 = \dfrac{n}{m}\angle ADC$(　　　　　　),

$\therefore$ $\angle BAD = \dfrac{m}{n}\angle 1$，$\angle ADC = \dfrac{m}{n}\angle 2$(　　　　　).

$\therefore$ $\angle BAD = \angle ADC$(　　　　　).

$\therefore$ $AB \parallel CD$(　　　　　　　　　).

【变换六】 如图 2-1，$AB \parallel CD$，$AE \parallel DF$.

求证：$\angle 1 = \angle 2$，$\angle FDC = \angle BAE$.

【证明】 $\because$ $AB \parallel CD$(　　　　　　),