普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等代数（第2版）

施武杰　戴桂生　编著

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等代数

（第2版）

施武杰　戴桂生　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，内容包括：线性方程组的消元解法、矩阵代数、行列式、n 维向量与线性方程组的一般解法、整数与多项式、二次型、线性空间、线性变换、λ 矩阵、欧几里得空间。书中附有九个阅读材料，分布在各章之后，包括：《九章算术》、复数的矩阵模型、数学归纳法、代数中的几何类比、定理的结构与形式、反证法、等价关系和集合的分类、斐波那契数列、若尔当标准形的应用举例、线性最小二乘法。每节后附有一定数量的习题。

本书可作为高等院校数学类专业的高等代数教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/施武杰，戴桂生编著．—2 版．—北京：高等教育出版社，2009．12

ISBN 978-7-04-027959-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①施…②戴…　Ⅲ．高等代数-高等学校-教材　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 190706 号

策划编辑　杨　波　　**责任编辑**　杨　波　　**封面设计**　张　志
版式设计　余　杨　　**责任校对**　王　雨　　**责任印制**　朱学忠

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
总　　机　010-58581000

经　　销　蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷　北京明月印务有限责任公司

开　　本　787×960　1/16
印　　张　17.75
字　　数　330 000

购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育　http://www.widedu.com

版　　次　2005 年 4 月第 1 版
2009 年 12 月第 2 版
印　　次　2009 年 12 月第 1 次印刷
定　　价　21.20 元

物料号　27959-00

第 2 版前言

本书自 2005 年出版以来，已有近十所高等学校采用它作为高等代数课程的教材。一些教师谈到：本书在第一章讲线性方程组，一年级的学生易于接受。结合课文介绍了一些数学史和重要的研究方法，有利于学生兴趣和能力的培养。与此同时，书中也有不少地方为以后要学的近世代数课程做了铺垫。然而，在使用过程中也发现了一些问题和错误。广大读者和教师，特别是苏州大学代数教研室的同事们向我们提出了许多宝贵的意见。这次再版，除了一些勘误以外，主要增加了一些内容，第七章 §5 中增加了同构关系是等价关系的证明，第十一章 §2 中增加了欧几里得空间同构的内容，第六章 §1 中论述的顺序做了调整。此外，删去了少数的难题，增加了一些计算题。

作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材推出本书，作者深感责任重大。限于水平，本书虽然经过修订，缺点错误仍在所难免。我们衷心希望广大读者和教师关心本书，欢迎大家继续提出宝贵的意见。

最后，作者对高等教育出版社在再版过程中给予的帮助表示感谢。

施武杰　戴桂生

2008 年 12 月

第 1 版前言

本书可作为高等院校数学专业、应用数学专业的高等代数教材或教学参考书。

本书是在总结我们多年高等代数教学实践的基础上，根据“教材要现代化”的要求并吸取其他有关高等代数教材的优点，首先编出讲义，经过多次试用和修改而成。书的蓝本是戴桂生编写的《高等代数讲义》以及施武杰参编的《高等代数》(陈重穆主编，高等教育出版社，1990 年版)。

我们遵循以下的指导思想来编写本书：(1) 高等代数的教学目的是向学生讲授比较系统的、能体现现代数学思想的代数基本知识和代数方法；(2) 培养学生能力（包括自学能力，抽象思维能力，逻辑推理能力，知识运用能力，提出问题、分析问题和解决问题的能力）；(3) 重视应用和联系中学实际，并照顾一年级学生的特点。

在教材内容的选择和安排上，我们贯彻从具体到抽象的认识原则，使知识的水平和难度逐步地提高。本书第一章讨论用矩阵的初等变换解线性方程组，第二章讨论矩阵的运算。这样处理，避开了一开始就接触难以掌握的未定元多项式。先讲线性方程组和矩阵，学生易于接受，理论证明也不太困难。另一方面，矩阵是高等代数的主要工具，较早地引进矩阵使得有些定理的证明十分简洁（如线性方程组的同解定理，克拉默法则），避免了不必要的重复。线性方程组的理论以向量空间理论为基础，本书较早地介绍“子空间”的概念，这样既给出了向量空间的例子，又显示了极大线性无关组与基的联系，使得“基础解系”作为“解空间的基”来引入，其安排具有学科本身的内在要求。

在一般域上讲多项式，才能体会到未定元多项式与函数多项式的不同，体会到“代数的本质”——从旧系统构造出新系统的手法。为此，我们在多项式前安排了“整数的整除性和 p 元域”等内容。这一部分知识可培养学生的论证推理能力，为多项式整除作先导，只有在引进了有限域后才能在一般域上阐明未定元多项式。也只有把学生的认识水平提高了，才算是掌握了高等代数，才有可能在此基础上学好近世代数。

“教材要现代化”是大家的共识，本书注重将教材的内容用现代化的方法处理。例如，单“结构”分解是现代代数学常用的手法。为此，我们加强了不变子空间的讨论，使得多项式理论的应用得到充分发挥，并由此得出若尔当标准形（此法与 λ 矩阵的方法难度相当，但更体现了内在的性质）。又如，讨论一个代数结构，常常紧接着讨论其“子结构”，我们较早地引入“子空间”的概念也体现了这

一现代数学的思想。

为了更好地提高学生的素质，本书在引进概念时，注意利用学生所了解的材料介绍为什么要提出这个概念，注意介绍“解决问题”的“想法”，希望这些“想法”可以用来解决更多的问题。

合适的习题是教科书的重要组成部分。我们在众多的参考书中精选习题，有些习题是我们自编的。一些材料我们放在习题中介绍，例如：范畴论中对“基”的认识，另一些材料，特别是数学方法的介绍，我们把它放在“阅读材料”里。书中打“*”号的章节，用小字写出的部分，均可作为选学内容。带“*”号的习题有一定的难度，不作为基本要求。

苏州大学将本书作为精品教材建设立项并给以资助，数学科学学院的领导和代数教研室的同事们对本书的编写与试用给予了大力的支持。在本书的试用期中，重庆师范大学罗明教授、伊犁师范学院郭继东副教授、湖南科技大学何勇副教授、重庆三峡学院杜祥林副教授、长沙理工大学游兴中副教授以及在读博士生周伟、张必成等都对本书提出了具体的修改意见。特别是本书的出版得到了周伯壎、李尚志教授的支持，石生明教授在认真审读书稿后提出了不少中肯、具体的修改意见，在此我们一并表示衷心的感谢！

由于笔者水平有限，书中定有不少问题和疏漏，不当之处恳请读者指正，使本书不断地得到完善。

施武杰　戴桂生

2004 年 9 月

目　　录

第一章　线性方程组的消元解法

讨论问题必须明确其对象所取的范围,对于数学问题就要先给定一个数集.本章中我们首先引进数域的概念,在此基础上介绍线性方程组和矩阵.矩阵是解线性方程组也是线性代数的重要工具.本章将介绍矩阵的初等变换,进一步还将讨论解线性方程组的消元解法.

§1　数　域

我们过去熟悉的数集有:自然数集 **N**(即非负整数集),正整数集 $\mathbf{N}^+$,整数集 **Z**,有理数集 **Q**,实数集 **R**,复数集 **C**(本书中,我们固定使用上述符号).

同一个问题,在不同的数集中,会有不同的答案.小学低年级学生说 2 不能除 3,意思是:在自然数集 **N** 中,$2x=3$ 无解,也就是说 2 除 3 的结果不在 **N** 中.但是,在有理数集 **Q** 中,$2x=3$ 有惟一解,也就是说 2 除 3 的结果在 **Q** 中.

在给定的数集中,我们常关心两个数的运算结果是否仍然在这个数集中.任何两个 **Q** 中的数加、减、乘、除(除数不为零)的结果都在 **Q** 中.实数集 **R**,复数集 **C** 也有这个性质.但是在整数集 **Z** 中,设 $a,b\in\mathbf{Z}$,$\frac{a}{b}$不一定在 **Z** 中.我们把 **Q**,**R**,**C** 的共同点抽象出来,得到数域的定义.

定义 1.1.1　设 F 是复数集 C 的一个子集.如果它满足:

① $0,1\in\mathbf{F}$;

② 任何两个 F 中的数加、减、乘、除(除数不为零)的结果都在 F 中;那么我们称 F 为一个数域.

条件②也称为对加、减、乘、除**封闭**.

Q,**R**,**C** 是数域.**N**,**Z** 不是数域.

对加、减、乘封闭的 **C** 的非空子集称为**数环**.显然,数域是数环.

Q,**R**,**C**,**Z** 都是数环(**Z** 常称为整数环).**N** 不是数环.仅含数 0 的数集 $\{0\}$ 是一个数环.

例 1.1.1　$\mathbf{F}=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 是数域.

证明:$1=1+0\sqrt{2}\in\mathbf{F}$,$0=0+0\sqrt{2}\in\mathbf{F}$

设 $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$.

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in\mathbf{F}$$
$$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2}\in\mathbf{F}$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{F}$$

当 a,b 不全为零时,

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbf{F}$$

因此 $\mathbf{F}$ 是数域. ■

定理 1.1.1　任何数域包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明: 设 $\mathbf{F}$ 是一个数域. 因为 $0,1\in\mathbf{F}$, 设 $n\in\mathbf{N}$, $n=1+1+\cdots+1$(n 个 1 相加), 故 $n\in\mathbf{F}$. $-n=0-n\in\mathbf{F}$. 设 $m,n\in\mathbf{Z}$(m 不为零), 由 $m,n\in\mathbf{F}$ 推出 $\frac{n}{m}\in\mathbf{F}$. 故 $\mathbf{F}$ 包含 $\mathbf{Q}$. ■

以后,我们的讨论总是固定在一个数域 $\mathbf{F}$ 上,所有的数都取自于 $\mathbf{F}$,除非另加声明.

习　题　1.1

1. 下列数集哪些是数域? 哪些是数环? 哪些既非数域也非数环?
   1) 所有正实数所成的数集.
   2) 所有偶数(或奇数)所成的数集.
   3) 某个整数 a 的所有整数倍所成的数集.
   4) $\mathbf{F}=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$.
2. 证明:两个数域的交是一个数域.

3*. 证明: $\mathbf{F}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$($i$ 是虚数单位)是一个数域.

4*. 证明: $\mathbf{G}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$ 是数环而不是数域.

§2　线性方程组

2.1　线性方程组

数学研究的中心问题之一是解方程,而其中最简单也是最重要的便是解线性方程组. 解方程之所以成为研究的中心问题,是因为在实践中直接或间接地提出了这类问题. 线性方程组在数学的许多分支以及其他领域都有广泛的应用,因此成为高等代数课程的基本内容之一.

在中学里,我们已经熟悉二元一次方程组,三元一次方程组. 一般的

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1.1}$$

称为一个 n 元**线性方程组**. 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表 n 个**未知量**,s 是方程的个数. $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的**系数**,a_{ij} 第一个足标 i 表示它在第 i 个方程,第二个足标 j 表示它是未知量 x_j 的系数. $b_i(i=1,2,\cdots,s)$ 称为**常数项**.

设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是 n 个数,如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 代入后,(1.1) 中每一个式子都变成等式,则称$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$是(1.1) 的**一个解**. (1.1) 的解是一个由 n 个数组成的有序数组. (1.1) 的解的集合称为(1.1) 的**解集合**. 解集合是空集时就称方程组(1.1) **无解**. 解线性方程组就是找出其解集合. 两个线性方程组有相同的解集合,称它们是**同解**的.

2.2 矩阵的定义

回忆二元一次方程组的加减消元法.

例 1.2.1 解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-7 \\ 2x_1+3x_2=21 \end{cases}$$

解:第一个方程乘以(-2) 加到第二个方程上,得

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-7 \\ \quad\ \ 7x_2=35 \end{cases}$$

第二个方程乘以$\frac{1}{7}$,得

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-7 \\ \quad\quad x_2=5 \end{cases}$$

第二个方程乘以 2 加到第一个方程上,得

$$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=5 \end{cases}$$

书写上述消元过程时,我们可以略去“x_1”,“x_2”,“=”而保留它们的系数和常数项(不出现的项系数为零),并用 r_1,r_2 分别代表第一个方程和第二个方程留下的数所组成的行,写成

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)\ r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1/7)\ r_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

我们给这种对象一个名字,做出下面定义.

定义 1.2.1　设 s,n 是正整数,由 sn 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 s 行(横的),n 列(纵的)的表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}\tag{1.2}$$

称为一个 $s\times n$ 矩阵.

矩阵中的 a_{ij}叫矩阵的**元**. 常用大写拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示一个矩阵. 有时为了表达矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状是 $s\times n$ 型的,写成 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$,也可写成$(a_{ij})_{s\times n}$,表示它的第 i 行第 j 列的元是 a_{ij}.

定义 1.2.2　两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,如果 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数(也称形状相同),并且 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元与 $\boldsymbol{B}$ 的相应位置的元都相等(即 $a_{ij}=b_{ij},i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n$),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1×1 矩阵(a)可以粗糙地等同于一个数,在不致引起混淆的情况下,可写成 a. 一个 $s\times1$ 矩阵,有时也用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 等表示.

$n\times n$ 矩阵称为**方矩阵**(**或方阵**),称 n 为它的**阶**. 方矩阵从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**. 主对角线以下(上)的元都是零的方矩阵称为**上(下)三角形矩阵**. 主对角线元是 1,其余元都是零的 $n\times n$ 矩阵,称为(n 阶)**单位矩阵**,记为 $\boldsymbol{E}_n$(或简记为 $\boldsymbol{E}$),

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

元都是零的 $s\times n$ 矩阵,称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}_{s\times n}$(或 $\boldsymbol{O}$). $s\times1$ 零矩阵,有时也记为 $\boldsymbol{o}$(小写希腊字母). 矩阵$(-a_{ij})_{s\times n}$称为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$的**负矩阵**,记为$-\boldsymbol{A}$.

定义 1.2.3　把矩阵(1.2) 的行列互换所成的矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

称为原矩阵的转置矩阵. 矩阵 A 的转置矩阵记为 A^{T}(也可记为 ${}^{t}A$ 或 A').

如果 $A^{T}=A$,则称 A 是**对称**的;如果 $A^{T}=-A$,则称 A 是**反对称**的(此时它们必是方矩阵).

在 $s\times n$ 矩阵 A 的相邻的某两行之间画一条横线,相邻的某两列之间画一条竖线,A 就分成4块,每一块都是一个小矩阵,分别是 A_1,A_2,A_3,A_4,则 A 表示成

$$\left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

仅在相邻的某两列间画一条竖线,A 表示成$(A_1 \mid A_2)$. 在每两列之间画竖线,A 表示成$(\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_n)$(有时也记为$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$),$\alpha_j$ 就是 A 的第 j 列组成的 $s\times 1$ 矩阵. 这些写法有时显得比较简明,用起来比较方便.

(1.2) 称为线性方程组(1.1) 的**系数矩阵**,而 $\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right)$ 称为线性方程组(1.1) 的**增广矩阵**.

2.3 初等变换

解二元、三元一次方程组时,我们做了如下的三种变换:

① **交换两个方程的位置;**

② **用一个非零的数乘某一个方程;**

③ **将一个方程的倍数加到另一个方程上.**

推广到一般的线性方程组,我们给出下面的定义.

定义 1.2.4　线性方程组的上述变换,称为线性方程组的初等变换.

定理 1.2.1　线性方程组经初等变换后,得到的线性方程组与原线性方程组同解.

在第4章中,我们将用矩阵的语言,来证明这个定理.

在这里给出不用矩阵的证明:只需要对作一次初等变换给出证明. 以初等变换③为例:在线性方程组(1.1) 中,把第 j 个方程的 c 倍加到第 i 个上去,得到线性方程组(*). (*)的第 i 个方程变为

$$(a_{i1}+ca_{j1})x_1+(a_{i2}+ca_{j2})x_2+\cdots+(a_{in}+ca_{jn})x_n=b_i+cb_j$$

其余方程不变. 设$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$是(1.1) 的一个解,则

$$a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{in}k_n=b_i$$

$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n=b_j$$

我们有

$$(a_{i1}+ca_{j1})k_1+(a_{i2}+ca_{j2})k_2+\cdots+(a_{in}+ca_{jn})k_n$$
$$=(a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{in}k_n)+c(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)=b_i+cb_j$$

因此$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$也是(＊)的解. 而(1.1) 也可以由(＊)的第 j 个方程的$(-c)$倍加到第 i 个方程得到,因此,(＊)的解也是(1.1) 的解. 线性方程组(＊)与线性方程组(1.1) 同解. ■

比照线性方程组的初等变换,可引入矩阵的行初等变换的概念.

定义 1.2.5 矩阵的下列三类变换,称为矩阵的行初等变换.

第一类变换,交换两行的位置;

第二类变换,用一个非零的数乘某一行;

第三类变换,把一行的倍数加到另一行上.

相仿地,可以定义矩阵的**列初等变换**. 行与列的初等变换总称为**初等变换**.

用初等变换的语言,定理 1.2.1 写成如下定理.

定理 1.2.1′ 线性方程组的增广矩阵,经过行的初等变换后,相应的线性方程组与原方程组同解.

代数学的一个特点是:不满足于研究个别的具体问题,而是要研究一般的问题. 对于线性方程组来说,就是要研究一般的线性方程组(方程的个数 s,未知量的个数 n,都是任意的正整数,系数 a_{ij}和常数项 b_j 都是任意的数)的解法.

研究一般的问题,常常作如下考虑:第一步,可以进行什么样的变换;第二步,变换后的与原来的有什么联系;第三步,确定尽可能简单的一种或者几种形式;第四步,经过上述变换是否都能变成这些形式;第五步,给出上述形式的问题的答案.

定义 1.2.5 做的就是上述第一步. 定理 1.2.1′就是第二步,其联系是解集合不变,就是说是等价变换. 现在来做第三步. 显然,在线性方程组中,每一个方程所含的未知量个数越少越好. 相对应的增广矩阵具有如下的形式.

形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的矩阵,称为**梯矩阵**.

形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩阵,称为**行最简形矩阵**.

行最简形矩阵的特点是:首先它是一个梯矩阵,其次在每一个上台阶的地方的元都是1,在每一个这种元的上方的各元都是零.

2.4　化矩阵为行最简形

现在来做第四步.

定理 1.2.2　任何矩阵都可以经过行的初等变换变成(梯)行最简形矩阵.

先看一个例子.

例 1.2.2　用行的初等变换将 $\boldsymbol{B}$ 变成行最简形矩阵,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&6&2&-8\\-1&3&-6&-4&6\\2&-6&8&0&0\\1&-3&5&2&-3\end{pmatrix}$$

它的第一列的第一行的元是零,适当交换行使其不为零,

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-3&5&2&-3\\-1&3&-6&-4&6\\2&-6&8&0&0\\0&0&6&2&-8\end{pmatrix}$$

(本书中用 r_i 表示矩阵的第 i 行,用 c_j 表示矩阵的第 j 列).

它的第一列的第一行元不是零,把第一行元的适当的倍加到其余各行,就可以把其余各行的第一列元变成零.

$$\xrightarrow[(-2)\,r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-3&5&2&-3\\0&0&-1&-2&3\\0&0&-2&-4&6\\0&0&6&2&-8\end{pmatrix}\tag{1.3}$$

这时,前两列构成的矩阵已经是行最简形了.再化简右边的一块矩阵,第三列的第二行元不为零,第二行的适当的倍加到其余各行,可以把第三列的其余元变成零.

$$\xrightarrow{\substack{5r_2+r_1\\(-2)\,r_2+r_3\\6r_2+r_4}}\begin{pmatrix}1&-3&0&-8&12\\0&0&-1&-2&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-10&10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{(-1)\ r_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & -8 & 12\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

现在，前三列构成的矩阵已经是行最简形了. 再继续上述过程，有限步后，可以化矩阵为行最简形矩阵.

$$\xrightarrow[(1/5)\ r_3+r_2]{(-4/5)\ r_3+r_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1/10)\ r_3}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

这个例子具有一般性，将其一般化，就可以得定理. ■

定理 1.2.2 的证明：不失一般性，可假设原矩阵的第一列元不全为零. 用第一类、第三类行初等变换可使原矩阵的第一列第一行元变成不是零，而其余各行的第一列元变成零. 再用第二类行初等变换可使矩阵的第一列第一行元变成 1. 于是可设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_4\end{pmatrix}\tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是行最简形，是型为 $(i-1)\times(j-1)$ 的矩阵，它的下面是零矩阵. 不妨设 $\boldsymbol{A}_4$ 是一个第一列元不全为零的矩阵，设它的左上角的元 a_{ij} 不为零（不然，交换适当的两行可以满足这一点）. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 $(-a_{hj}/a_{ij})$ 倍加到第 h 行（$h=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,s$），再将其第 i 行乘上 $(1/a_{ij})$，$\boldsymbol{A}$ 变成

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $(p-1)\times(q-1)$ 行最简形矩阵，并且 $p\geqslant i+1$，$q\geqslant j+1$. 继续这个过程，有限步后，得到一个行最简形矩阵. ■

习　题　1.2

1. 用行的初等变换，将下列矩阵化成行最简形：