摺紙幾何學

陳嶽生譯

商務印書館發行

摺 紙 幾 何 學

陳 嶽 生 譯
段 育 華 校

務 印 書 館 發 行

中華民國二十[illegible]初版
中華民國二十二年九月[illegible]後第一版

（一四七六）

中學補充用書 摺紙幾何學
Geometric Exercises in Paper Folding

每册定價大洋陸角
外埠酌加運費匯費

原著者 T. Sundara Row
譯述者 陳嶽生
校訂者 段育華
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

四九六三

譯　序

幾何一科,習之者每曰難於領悟,教之者每謂不易啓發,譯者嘗深韙斯言.及讀美人皮史二氏(Beman and Smith)所改訂,印人魯生達氏(T. Sundara Row)所著之摺紙幾何學一書,始知所謂難於領悟,所謂不易啓發,皆非定論.魯氏以新奇之摺紙方法,講解重要之幾何定理.祇覺趣味橫生,引人入勝,幾忘所讀者爲幾何焉.因思此書非但可爲教學之助,抑亦爲不朽名著,宜有譯本,以廣其傳.

會余君介石,以皮史二氏所譯,德人克萊因氏(Klein)所著之幾何三大問題一書,重譯成中文,由商務印書館出版,列入萬有文庫之算學小叢書,譯者適任校讎之責,見克氏書中引證魯氏之書者不止一次,而反觀魯氏之書,則亦由改訂者屢次引證克氏之書;又就兩書所論述者比較,知此兩書實有密切之關係;故覺更有譯印之必要.因不揣譾陋,亟譯之付梓,以供海內之同好.

民國十九年十月二十日　譯者識

目　次

摺紙幾何學

緒言

余編著本書之動機,乃得之於幼稚園恩物稱爲摺紙者.* 此恩物有各種顏色之正方紙二百張,摺器一具,摺法及圖若干則.紙之一面染色而有光澤,然亦可用兩面染同色者.實則任何厚薄適宜之紙皆可應用,惟顏色紙則摺痕較顯而外觀較美耳.幼稚園恩物出售於學校文具店,惟顏色紙則可得之於雜貨商人.任何紙片,可依本書首數節割成正方,惟有已割成之正方,則便利且簡潔耳.

本書所述諸題無需乎算學儀器,所必要者僅一削筆刀,及紙條若干,紙條蓋用以截取等長者.正方紙兼可爲直尺及丁字尺之簡單代用品.

以摺紙法施之於若干重要幾何作圖,較之用歐几利得幾何中所認爲特許之圓規及直尺二器,大爲簡易;例如分一直線或一角爲兩或多等分,引直線之垂線及平行線等.用摺紙法時,雖不能作圓,然可以他種方法得其若干點,於他種曲線亦然.此諸習題,不僅包括按常法作含有直線之幾何圖形而重疊摺之,且需要摺紙術上特具之簡法之妙用焉.此於本書之初,卽可見之.

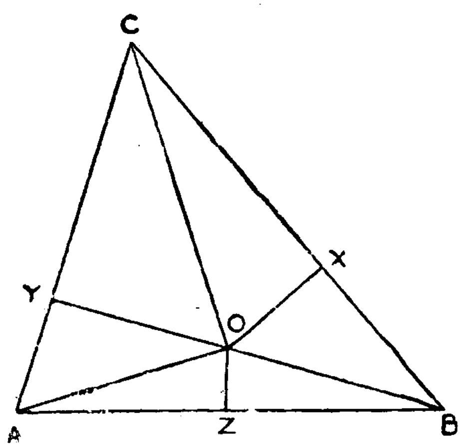
幼稚園恩物之爲用,不僅起兒童興味之動機,且亦培養

---

*譯者按商務書館出售者爲第十八種.

其心志以重視科學與美術.反言之,他日之教授科學與美術,在今日可以幼稚園恩物啟發其興趣,而爲之樹適當之基礎.此於幾何爲尤甚,蓋幾何乃各種科學與美術之基本也.教授平面幾何於學校中,可因自由引用幼稚園之恩物,而成爲極有趣味之事.令學生以紙摺圖,蓋爲完全適當之方法.此可使之得整潔而準確之圖,且深印命題之眞理於腦中.全憑空談,不足爲證;爰舉實例,以顯不用摺紙法而從錯誤之圖所生之幻意.下列之錯誤,若用摺紙法,必可免去.

證明凡三角形爲等腰三角形 命 ABC 爲任何三角形(圖一).平分 AB 於 Z,過 Z 引 ZO 垂直於 AB.以 CO 平分 ACB 角.



(圖 一)

(一) 若 CO 及 ZO 不相交,則平行.於是 CO 與 AB 成直角.故 $AC=BC$.

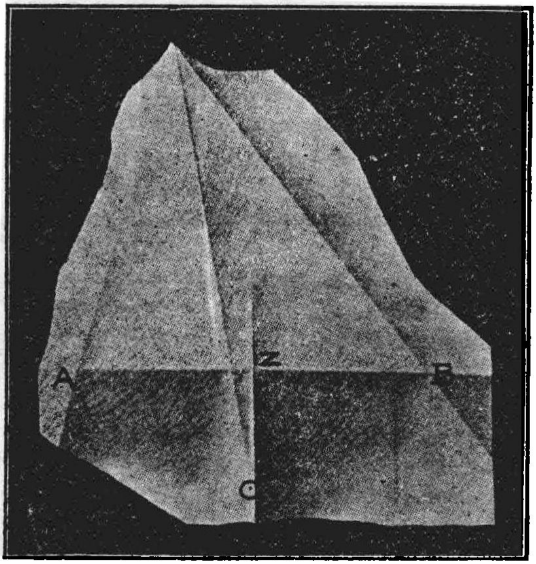
(二) 若 CO 及 ZO 相交,命其交點爲 O 引 OX 垂直於 BC, 引 OY 垂直於 AC. 連接 OA 及 OB. 由歐氏幾何原本一卷命題 26,* 三角形 YOC 及 XOC 全等; 又由幾何原本一卷命題 47 及一卷命題 8†, 三角形 AOY 及 BOX 全等. 於是

$$AY+YC=BX+XC,$$

卽

$$AC=BC.$$

圖二所指示者,由摺紙法,則不問如何之三角形, CO 及



(圖　二)

ZO 不能遇於三角形之內.

O 爲三角形 ABC 外接圓之弧 AOB 之中點.

*譯者按卽虞叔和譯舒薛舒三氏平面幾何學113節.

†譯者按卽虞譯舒薛舒三氏平面幾何學17節及372節.

摺紙法並非新奇之術.摺一方紙成自然物體,如單船,雙舟,墨水瓶,杯盤等等,均所習見而著聞者,又如剪紙成對稱之花樣,以爲裝飾品,亦然.書寫梵文之時,須將紙橫摺之或豎摺之,使行列整齊.謄寫公共辦事室中之信札,須將紙豎摺而空其一邊.雙摺之長方形紙,普通皆用以抄寫文件,而在輸入機製之大小信箋信封之前,往往以大小適合之紙裁爲大小二份,大者卽摺成信封之形,以納小者於其中.此法旣可省紙,又有保留郵局圖記於書信上之利益焉.教授幾何中之立體部分時,間嘗有借用摺紙法以造模型者,然用之於平面部,則未嘗見焉.

余著此書,並非欲述一完全之幾何教科書,惟在指示如何可由摺紙及穿紙而得正多角形,圓,以及其他曲線.余乘機且以古代及近世幾何之若干名題貢於讀者之前,且指示如何可將代數及三角應用之於幾何而有利益,庶可將此通常卷帙各別之科目,融會而解釋之.

最初之九章,論幾何原本前四卷中所述之正多角形之摺法,以及正九角形.幼稚園恩物中之正方紙作爲基本,而其他之正多角形卽自此而生.第一章指示基本正方之割法,並指示如何可摺之成直角等腰三角形及正方形.第二章論及在正方一邊上所作之正三角形.第三章專論畢達哥拉定理及歐氏原本第二卷中之命題,且附及幾種有關係之謎,此章中又有在已知底上作一已知高之直角三角形.此法亦可用之以求已知直徑之圓之諸點.

第十章論等差,等比及調和之級數,並及幾種等差級數之求和法.於論級數時,即得成級數之幾組線段.長方形紙劃爲格子,即作爲等差級數之例.關於等比級數,則應用直角三角形之性質,例如從直角至斜邊之高,爲斜邊上兩線段之等比中項,以及各股爲斜邊及隣線段之等比中項.因連帶關係,又述及二倍立方問題*而解釋之.於論調和級數時,則用"三角形一角及其外角之平分線,皆分對邊與兩夾邊成比例"之定理.此可爲轉倒法之極有趣之圖解.自然數及其立方和,以圖解得之,且從而推出若干他種級數之和.

第十一章論正多角形之普遍定理及計算之數值.此章之命題,皆極有趣味.

第十二章解釋曾經用於以前各章之普遍原理,如全等對稱,圖形之相似性,直線之共點,點之共線,皆論及之.

第十三章及第十四章論圓錐曲線及他種有趣味之曲線,關於圓則論及其調和性質.轉倒及同軸圓之理論亦解釋之.關於他種曲線,則僅述如何可由摺紙法而描之於紙.曲線中有述其歷史者,並述其在著名問題解法上之應用,如求兩線間之兩等比中項,三等分一已知直線角.考察此諸曲線之性質,雖需高深之算學智識,然其構圖方法及曲線之形狀,固易於明瞭而極有趣味者也.

---

*譯者按可參閱余介石譯算學小叢書幾何三大問題及胡仁源譯初等算學史.

余覓此書,覺非惟可作教授中學校及大學校之幾何之助,且亦以簡明奪目之法,供老少生徒以算學的遊戲焉.“老學生”如余者,可感此書有利於溫理故課,且可窺見近代發展之一斑,此雖極饒興趣,然恐爲大學教授所略而不及耳.

魯生達識

第一章 正方

(1) 平鋪於桌上之紙,其上一面爲一平表面,而與桌面接觸之下一面,亦爲一平表面.

(2) 此二表面爲紙之物質所分.紙質旣甚薄,紙之其他諸面卽不能判然呈爲有寬度之表面,而紙之諸邊幾爲線.故此二表面雖有別而不能互相分離.

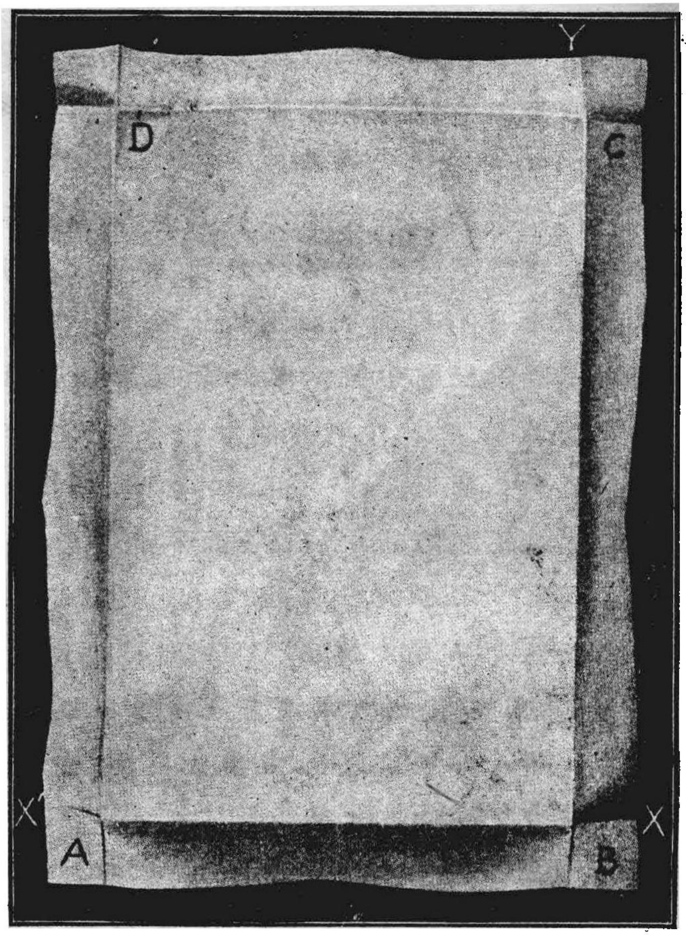
(3) 察閱下頁第三圖中所示之紙片,其形不整;而察閱本頁之紙,則成長方形.今試將此形式不整之紙片,變其形與本頁之紙相同.

(4) 置此形式不整之紙片於桌上而平摺之.命 $X'X$ 爲因此而成之摺痕.此摺痕乃一直線.今以一刀沿此摺痕將較小之一片截下,卽得一直邊.

(5) 沿 BY 如前再摺,使 $X'X$ 邊自身相重.摺畢放開後,將見摺痕 BY 與 $X'X$ 邊成直角.由疊合之理,顯然可知 YBX' 角等於 XBY 角,而此兩角各等於本頁之一角.今沿第二摺痕,如前以刀將較小之一片截下.

(6) 更行上之手續而得 CD 邊與 DA 邊.由疊合之理,顯然可知在 A,B,C,D 之四角互相等,而 BC 邊及 CD 邊分別等於 DA 邊及 AB 邊.此紙片(圖三)之形乃與本頁之形相同矣.

(7) 取一較大之紙片,量出 AB 與 BC 之長等於本頁之兩邊,則此紙片可使之與本頁同大.

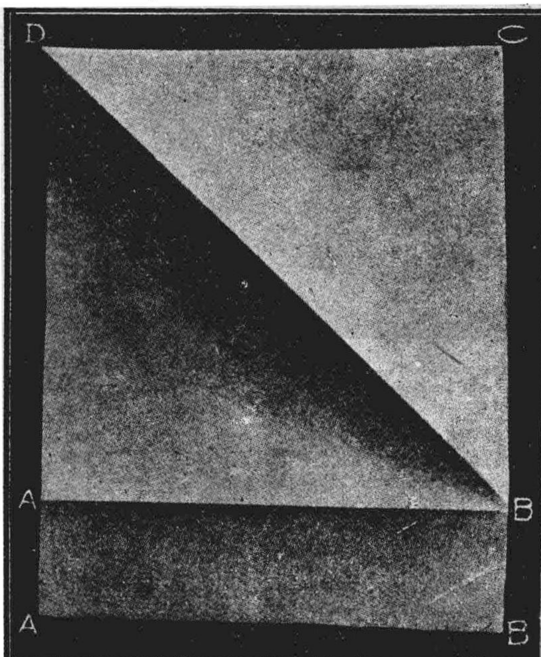


(圖 三)

(8) 如此之圖形稱爲長方.由疊合法可以證明 (1) 四角皆爲直角而互相等, (2) 四邊不皆相等, (3) 惟兩長邊相等,而兩短邊亦相等.

(9) 今取一長方形之紙片 $A'B'CD$ 斜摺之,使短邊之

一 CD, 落於長邊之一 DA' 上, 如第四圖所示. 再將伸出之部分 $A'B'BA$ 摺轉而裁去之. 放開之後, 則見 $ABCD$ 今爲正方, 即其四角皆爲直角而四邊皆相等也.

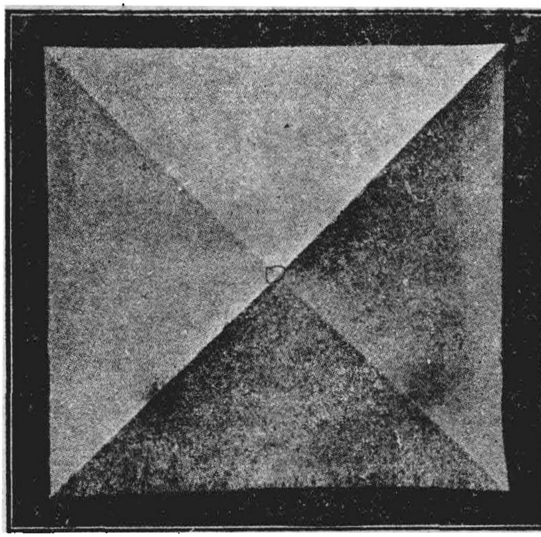


(圖　四)

(10)　經過一對對角 B,D 之摺痕, 爲此正方之對角線. 過他一對對角而摺此正方, 即得他一對角線, 如第五圖是.

(11)　我人見此兩對角線互成直角, 且互相平分.

(12)　對角線之交點稱爲正方之心.

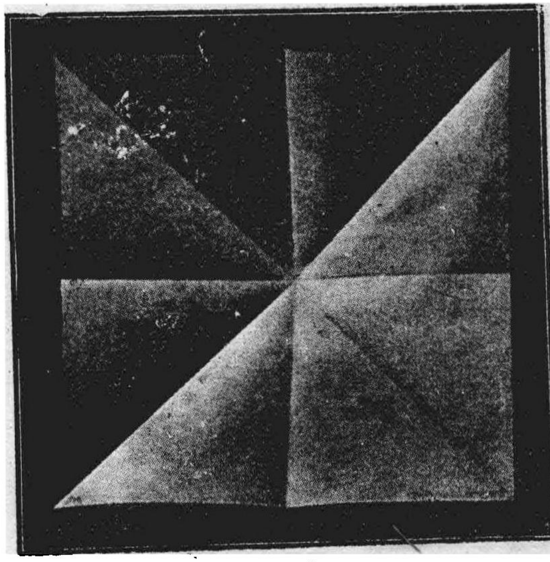


(圖 五)

(13) 各對角線,分正方爲二全等直角等腰三角形,其頂點在正方之對角.

(14) 兩對角線,共分正方爲四全等直角等腰三角形其頂點皆在正方之心,

(15) 今依第六圖再摺,合正方之一邊於其對邊之上,則我人得一經過正方之心之摺痕.此摺痕與他一對對邊成直角,而且 (1) 平分之; (2) 又與起初之二邊平行; (3) 自身平分於正方之心; (4) 分正方爲兩全等長方,此兩長方於是各爲此正方之半; (5) 此兩長方,各等於任一對角線分此正方所成之三角形.



(圖 六)

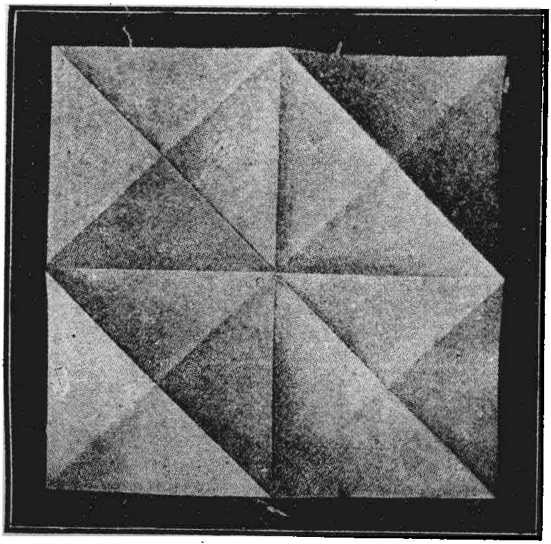
(16) 今再摺此正方,使其他一對對邊互相重合.此時所得之摺痕與(15)款中所得之摺痕,共分此正方爲四全等正方.

(17) 過小正方之在大正方兩邊中點之對角再摺,即得一內接於大正方之正方.(第七圖)

(18) 此正方爲大正方之半,且有同一之心.

(19) 聯結此內接正方隣邊之中點,即得一正方,其大爲原正方之四分之一(第八圖).累次行此手續,可得任意數之正方,其各各相對之比,順次爲

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \text{等等, 或}\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\cdots\cdots\cdots\cdots$$



(圖　七)

各正方爲其次大之正方之半,即從各正方所截下之四三角形,共等於該正方之半.凡此諸三角形,其數可任意增多,其面積總和則不能超過原正方,而究須盡其全量.

故　$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\text{至無窮多}=1.$$

(20)　正方之心乃其外接圓與內切圓之心.內切圓切於四邊之中點,蓋此四中點,離心較邊上其他任何點爲近也.

(21)　過正方之心之任何摺痕,分此正方爲兩全等梯形.