

高等代数 专题研究选编

AODENG
ZHUAN

DAISHU
TİYANJIUXUANBIAN

张小红 蔡秉衡 等编

陕西科学技术出版社

前 言

高等代数是大学数学专业的主要基础课，作为其中核心分的线性代数，是理工科大学各专业的重要数学工具。因此，牢固掌握和深入理解其中的思想方法和技巧，对于大学生是非常重要的。为帮助大学生学好这门重要课程，我们从教学实际出发，精选了近年国内高等代数研究的新成果，经加工整理编成此书。其主要内容是对高等代数中重点、难点问题，进行深入剖析，提供简捷、有效、实用的新方法新技

这些内容有助于读者开阔思路，活跃思想，提高分析问题和解决问题的能力，进而培养和提高其数学创造力。此书可供读者学习高等代数或线性代数时参考，亦可作为大学选修课教材使用，也宜作为范本指导大学生撰写论文。

本书选编的众多资料，大都征得原作者的同意，在此谨作说明。书后附有所有原始材料的目录，对这些材料的作者们给予的真诚合作表示感谢！本书列出的编委是参加编写工作的主要人员；另外，许多同行前辈对本书的编写、出版给予了真挚的帮助，特别是北京师范大学吴品三教授、陕西师范大学雷天德教授、清华大学李文汉副教授、曲阜师大方朝教授、西北大学孟杰副教授、汉中师院蒲义书教授和谢力教授、徐州师范学院章仲英教授、湖南师范大学张长明教授、吉安师专肖祖文教授、汉中教育学院李印堂副教授，以及西北师大杨永保先生、四川师大彭玖麒先生、泰安师专张

纯伯先生、湖州师专凌瑞官先生、汉中师院白永成先生及付银汉、周亚兰女士，对于他们，我们全体编者表示衷心感谢！更希望得到读者的批评指正！

编 者

1992. 2. 23.

目 录

一、矩阵在多项式理论中的应用	(1)
1. 多项式整除的矩阵判定	(1)
2. 最大公因式的矩阵求法	(8)
二、关于 <i>Eisenstein</i> 判别法的研究	(15)
1. 施行变换仍有局限性	(15)
2. <i>Eisenstein</i> 判别法的进一步推广	(21)
三、关于 <i>Cramer</i> 法则的研究	(29)
1. 三种新证法	(29)
2. <i>Cramer</i> 法则的推广	(35)
3. 利用 <i>Cramer</i> 法则求 n 阶行列式的值	(40)
四、线性方程组的进一步讨论	(51)
1. 初等变换是仅有的同解变换	(51)
2. 利用矩阵列的初等变换解线性方程组	(57)
五、线性方程组解的结构定理及其应用	(66)
1. 齐次线性方程组解的结构定理的应用	(66)
2. 非齐次线性方程组解的结构定理	(72)
3. 线性非齐次微分方程组解的结构定理	(76)
六、分块矩阵的几个应用	(83)

1. 用分块矩阵证明矩阵秩的性质	(83)
2. 用四分块矩阵求 n 阶行列式的值	(89)
3. 用分块矩阵求合同	(100)
七、循环矩阵的性质及广义循环矩阵	(111)
1. 循环矩阵的性质	(111)
2. 广义循环矩阵	(121)
八、关于正定实对称矩阵几个不等式的证明	(128)
九、Bellman不等式的讨论及其推广	(142)
1. 关于矩阵迹的一些不等式	(142)
2. 关于Bellman不等式的注记	(145)
3. Bellman不等式的推广及Bellman的一个猜想	(153)
十、行初等变换定理及其应用	(162)
十一、关于 n 维线性空间的子空间	(173)
1. 子空间交的基与维数的确定方法	(178)
2. 余子空间的性质	(185)
十二、有关线性变换的两个问题	(191)
1. 已知核求相应的线性变换	(191)
2. 公式 $\dim \text{Im}(\sigma) + \dim \ker(\sigma) = \dim V$ 的应用	(197)
十三、若当标准形的几个问题	(206)
1. 若当标准形问题的一个初等解法	(206)
2. 避开求初等因子化矩阵为若当形	(215)

3. 若当标准形一个老的证明.....	(219)
十四、欧氏空间中正交变换的两个问题.....	(228)
1. 欧氏空间的变换是正交变换的条件.....	(228)
2. 用正交变换化实二次型为标准形方法的改进	(231)
十五、矩阵的广义逆和正定矩阵的推广.....	(239)
1. 广义逆矩阵.....	(239)
2. 正定矩阵的推广.....	(258)
十六、短论集锦.....	(266)
1. 整系数多项式的哥德巴赫定理.....	(266)
2. 多元多项式互素的充要条件.....	(267)
3. 计算结式的一种方法.....	(271)
4. 代数学基本定理的一个初等证明.....	(276)
5. 行列式性质的推广及其应用.....	(282)
6. “杨辉三角”中的行列式.....	(288)
7. 矩阵相乘的Falk图示法.....	(295)
8. 矩阵初等变换后逆阵的求法.....	(298)
9. 分块矩阵的准消法变换及其应用.....	(302)
10. 线性方程组 $A_{mn}X_{n1}=b_{m1}$ 的矩阵解法.....	(312)
11. 线性空间替换定理的另一种证明.....	(318)
12. 矩阵可对角化的一个充要条件.....	(321)
13. 矩阵特征根与特征向量的同步求法.....	(327)
14. 矩阵化为标准形的一个定理的应用.....	(333)
15. Cayley-Hamilton定理的推广.....	(340)

16. 关于实二次型的秩与符号差的求法	(343)
17. 求标准正交基的矩阵初等变换法	(346)
18. 酉空间中酉变换的几个充要条件	(351)
附录 1. 高等代数中的思想方法	(356)
附录 2. 线性代数简史	(371)
参考文献	(379)

一、矩阵在多项式理论中的应用

利用矩阵理论研究多项式的有关问题，不仅方法新颖，而且简捷明了，易于掌握，有一定的适用性。

1. 多项式整除的矩阵判定

我们首先讨论多项式乘积的矩阵表示。

设 $F[x]$ 表示数域 F 上的一元多项式环。 $\forall f(x), g(x) \in F[x]$ ，且

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, (a_n \neq 0), n$ 为非负整数。

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m, (b_m \neq 0), m$ 为非负整数。则由通常多项式的乘法可知

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m},$$

其中

$$c_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \cdots + a_0b_k, k = 0, 1, 2, \dots, n+m. \quad (1)$$

相对于给定的如上 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，分别作矩阵

$$A_f = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}_{(n+m+1) \times (m+1)},$$

$$X_g = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{(m+1) \times 1}$$

其中, $n = \text{次}[f(x)]$, $m = \text{次}[g(x)]$ 。

显然, 上述形式的矩阵由给定的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 所唯一确定。因此我们有

定义 1 上述形式的矩阵 A_f 称为多项式 $f(x)$ (相对于 $g(x)$ 作乘积时) 的系数矩阵, X_g 称为多项式 $g(x)$ 的系数列矩阵。

定理 1 1) 矩阵之积 $A X_g$ 等于由多项式之积 $f(x)g(x)$ 所确定的系数列矩阵

$$X_{fg} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

其中 c_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n+m$) 满足 (1) 式。

2) $f(x)g(x)$ 是唯一确定的。

证明 1) 事实上

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ \vdots \\ a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k \\ \vdots \\ a_n b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

即有 $A_f X_g = X_{fg}$ 。

2) 由于 A_f , X_g 均唯一, 从而 X_{fg} 唯一, 即 $f(x)g(x)$ 是唯一的。

顺便指出, 若取 X_f 为 $f(x)$ 的系数列矩阵 (是 $(n+1) \times 1$ 的), 则 $g(x)$ 的系数矩阵 A 是 $(m+n+1) \times (n+1)$ 的, 此时

$$A_f X_f = X_{gf} = X_{fg}.$$

在具体计算时, 只要注意到 A_f 的列数等于 X_g 的行数 (也等于 $g(x)$ 的次数+1) 这一点, 则写出 A_f 也是容易的。

例1 设 $f(x) = -3 + 4x - 4x^2 - 2x^3 + x^4$, $g(x) = 3 - 4x - 5x^2 + 2x^3$. 求 $f(x)g(x)$ 。

解 由于次 $(f(x)) = 4$, 次 $(g(x)) = 3$, 故 A_f 是 $(4+3+1) \times (3+1)$ 矩阵, X_g 是 $(3+1) \times 1$ 矩阵, 即取

$$A_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{则}$$

$$A_f X_g = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \\ -13 \\ -16 \\ 39 \\ -2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = X_{fg},$$

于是由 X_f 即得

$$f(x)g(x) = -9 + 24x - 13x^2 - 16x^3 + 39x^4 - 2x^5 - 9x^6 - 2x^7.$$

下面讨论多项式整除的矩阵表示。

设 $h(x), f(x) \in F[x]$, 有

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_px^p, \quad (c_p \neq 0),$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad (a_n \neq 0).$$

其中 p, n 为非负整数, 且假定 $p \geq n$.

由于 $p \geq n$, 则总有非负整数 m , 使 $p = n + m$, 故

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}.$$

取 $f(x)$ 的系数矩阵 A_f 和 $h(x)$ 的系数列矩阵 X_h 分别是

$$A_f = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}_{(n+m+1) \times (m+1)},$$

$$X_h = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix} \quad (n+m+1) \times 1,$$

其中 $n+m=p$ 。

令矩阵

$$\overline{A} = (A_f, X_h),$$

则我们有

定理 2 1) $f(x) | h(x)$ 的充要条件是秩 $(\overline{A}) = \text{秩}(A_f) = m+1$ 。

2) 若有 $g(x) \in F[x]$, 使 $h(x) = f(x)g(x)$, 则 $g(x)$ 唯一。

证明 1) 由于 $n+m+1 \geq m+1$, 且只要 $f(x) \neq 0$, 恒有秩 $(A_f) = m+1$ 是显然的。

设列矩阵

$$X_g = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (m+1) \times 1, \quad \text{其中 } m = p - n.$$

令

$$A_f X_g = X_h, \quad (2)$$

则(2)式是关于以 $b_0, b_1, \dots, b_m$ 为未知量的一个线性方程组, A_f 是(2)的系数矩阵, $\overline{A}$ 是增广矩阵, 所以(2)有解

当且仅当秩 $(A_f) = \text{秩}(\bar{A})$ 。

而(2)有解(即存在 X_g 使 $A_f X_g = X_h$)当且仅当 $f(x) \mid h(x)$ (即存在 $g(x) \in F[x]$, 使 $f(x)g(x) = h(x)$, 将 X_g 看作 $g(x)$ 的系数列矩阵)。所以

$f(x) \mid h(x)$ 当且仅当秩 $(A_f) = \text{秩}(\bar{A}) = m+1$ 。

2). 由于(2)有 $m+1$ 个未知量 $b_0, b_1, \dots, b_m$, 而秩 $(A_f) = \text{秩}(\bar{A}) = m+1$ 。故(2)有唯一解 X_g , 所以 $f(x)g(x) = h(x)$ 中的 $g(x)$ 是唯一确定的。

例2 设 $h(x) = 2 + 3x - 13x^2 - 6x^3 + 17x^4 - 3x^5$,
 $f(x) = 2 - x - 5x^2 + x^3$ 。

判定 $f(x)$ 能否整除 $h(x)$, 若整除时, 求 $g(x)$, 使

$$h(x) = f(x)g(x)。$$

解 因为次 $(h(x)) = 5$, 次 $(f(x)) = 3$, 所以取定理中的 $n = 3$, $m = 5 - 3 = 2$, 故可令

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(3+2+1) \times (2+1)}$$

$$X_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -13 \\ -6 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = (A_f, X_h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & 2 & -13 \\ 1 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

对 $\overline{A}$ 施行初等行变换化为

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

则易见秩 $(A_f) = \text{秩}(\overline{A}) = 3$, 从而 $f(x) \mid h(x)$ 。

由于 $m = 2$, 故令

$$X_g = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_{(2+1) \times 1}, \quad \text{并由 } A_f X_g = X_h \text{ 与}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

同解得

$$X_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{取 } g(x) = 1 + 2x - 3x^2, \text{ 即有}$$

$$h(x) = f(x)g(x).$$

对于含有参变数作系数的多项式整除的判定, 定理 2 具有独特的效果。

例 3 设 $h(x) = q + px + x^4$, $f(x) = 1 + mx + x^2$, 求 $f(x)$ 整除 $h(x)$ 所满足的条件。

解 令

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ p & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 对 } \overline{A} \text{ 进行初等行变换化为}$$

$$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ p-mq+m & 0 & 0 & 0 \\ -q-1+m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由定理 2 知, $f(x) | h(x) \iff \text{秩}(\overline{A}) = 4 - 2 + 1 = 3 \iff p - mq + m = 0$ 且 $-q - 1 + m^2 = 0$, 即 $p = m^3 - 2m$ 且 $q = m^2 - 1$ 。

2. 最大公因式的矩阵求法

设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 则有 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) \quad (1)$$

成立。在一般现行《高等代数》教材中, 采用辗转相除法求得 $d(x)$ 后, 再利用逐步代入的方法求得 $u(x), v(x)$ 使 (1)

式成立。这样做，在 $f(x)$ ， $g(x)$ 作辗转相除次数较多时显得十分麻烦。尤其是为求得满足(1)式的 $u(x)$ 与 $v(x)$ 时，在辗转相除的过程中不能用常数去乘除式和被除式，这就增加了运算的困难。下面我们介绍一种利用矩阵的初等变换同时求得 $d(x)$ ， $u(x)$ ， $v(x)$ 使(1)式成立的方法。

为叙述方便，称一个以 $F[x]$ 中的多项式为元素的矩阵为 x -矩阵；称以下三种变换为 x -矩阵的初等行变换：

- 1) 矩阵的某两行互换位置；
- 2) 矩阵的某一行乘以一个非零常数；
- 3) 矩阵的某一行的 $\varphi(x)$ 倍加到另一行， $\varphi(x) \in F[x]$ 。

命题1 任意一个 x -矩阵经初等行变换后必可化为如下形式

$$\begin{pmatrix} d(x) & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix},$$

其中“ $\times$ ”表示 $F[x]$ 中的多项式。

证明从略。

命题2 设 x -矩阵

$$A(x) = \begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 经初等行变换化为 } B(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & u_1(x) & v_1(x) \\ g_1(x) & s_1(x) & t_1(x) \end{pmatrix},$$

那么 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$, 且

$$f_1(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$

$$g_1(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x).$$

证明 只需证明经一次初等行变换后上述命题成立即可。下面分别就三种初等变换加以证明。

1) $B(x)$ 是经 $A(x)$ 互换两行得到的, 则 $f_1(x) = g(x)$, $g_1(x) = f(x)$, $u_1(x) = t_1(x) = 0$, $v_1(x) = s_1(x) = 1$, 易见命题成立;

2) 不妨设 $B(x)$ 是以非零数 c 乘 $A(x)$ 的第一行得到的, 则 $f_1(x) = cf(x)$, $g_1(x) = g(x)$, $u_1(x) = c$, $t_1(x) = 1$, $v_1(x) = s_1(x) = 0$, 由于 $(f(x), g(x)) = (cf(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$, 且 $f_1(x) = cf(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)$, $g_1(x) = g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x)$ 。从而命题成立;

3) 设 $B(x)$ 是由 $A(x)$ 的第二行的 $q(x)$ 倍加到第一行得到的, 那么,

$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x)$, $g_1(x) = g(x)$, $u_1(x) = t_1(x) = 1$, $v_1(x) = q(x)$, $s_1(x) = 0$, 于是 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x)) = (f_1(x), g_1(x))$ 。且由

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot g(x), \quad (2)$$

$$g(x) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x), \quad (3)$$

(3) 乘以 $q(x)$ 加到 (2) 得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) + q(x)g(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x), \\ g_1(x) &= g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x), \end{aligned}$$

綜上述, 命题 2 成立。

由命题 1 及命题 2 即得