高等代数
专题研究选编

G AODENG ZHUAN DAISHU TIYANJIUXUANBIAN

张小红 蔡秉衡 等编

陕西科学技术出版社

前　言

高等代数是大学数学专业的主要基础课，作为其中核心分的线性代数，是理工科大学各专业的重要数学工具。因此，牢固掌握和深入理解其中的思想方法和技巧，对于大学生是非常重要的。为帮助大学生学好这门重要课程，我们从教学实际出发，精选了近年国内高等代数研究的新成果，经加工整理编成此书。其主要内容是对高等代数中重点、难点问题，进行深入剖析，提供简捷、有效、实用的新方法新技巧。这些内容有助于读者开阔思路，活跃思想，提高分析问题和解决问题的能力，进而培养和提高其数学创造力。此书可供读者学习高等代数或线性代数时参考，亦可作为大学选修课教材使用，也宜作为范本指导大学生撰写论文。

本书选编的众多资料，大都征得原作者的同意，在此谨作说明。书后附有所有原始材料的目录，对这些材料的作者们给予的真诚合作表示感谢！本书列出的编委是参加编写工作的主要人员；另外，许多同行前辈对本书的编写、出版给予了真挚的帮助，特别是北京师范大学吴品三教授、陕西师范大学雷天德教授、清华大学李文汉副教授、曲阜师大方朝教授、西北大学孟杰副教授、汉中师院蒲义书教授和谢力教授、徐州师范学院章仲英教授、湖南师范大学张长明教授、吉安师专肖祖文教授、汉中教育学院李印堂副教授，以及西北师大杨永保先生、四川师大彭玖麒先生、泰安师专张

纯伯先生、湖州师专凌瑞官先生、汉中师院白永成先生及付银汉、周亚兰女士，对于他们，我们全体编者表示衷心感谢！更希望得到读者的批评指正！

编　者

1992．2．23．

目　　录

一、矩阵在多项式理论中的应用

利用矩阵理论研究多项式的有关问题，不仅方法新颖，而且简捷明了，易于掌握，有一定的适用性。

1．多项式整除的矩阵判定

我们首先讨论多项式乘积的矩阵表示。

设$F[x]$表示数域F上的一元多项式环。$\forall f(x)$，$g(x)\in F[x]$，且

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$(a_n\neq 0)$，$n$为非负整数。

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$，$(b_m\neq 0)$，$m$为非负整数。则由通常多项式的乘法可知

$f(x)g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}$，

其中

$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_0b_k$，$k=0,1,2,\cdots,n+m$。（1）

相对于给定的如上$f(x)$和$g(x)$，分别作矩阵

$$A_f=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times(m+1)},$$

$$X_g=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{(m+1)\times 1},$$

其中，$n=$次〔$f(x)$〕，$m=$次〔$g(x)$〕。

显然，上述形式的矩阵由给定的$f(x)$和$g(x)$所唯一确定。因此我们有

定义1 上述形式的矩阵A_f称为多项式$f(x)$（相对于$g(x)$作乘积时）的系数矩阵，X_g称为多项式$g(x)$的系数列矩阵。

定理1 1)矩阵之积$A\ X_g$等于由多项式之积$f(x)g(x)$所确定的系数列矩阵

$$X_{fg}=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

其中c_k（$k=0, 1, 2\cdots, n+m$）满足（1）式。

2) $f(x)g(x)$是唯一确定的。

证明 1)事实上

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_0b_0 \\ a_1b_0+a_0b_1 \\ \vdots \\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k \\ \vdots \\ a_nb_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

即有$A_fX_g=X_{fg}$。

2) 由于A_f，X_g均唯一，从而X_{fg}唯一，即$f(x)g(x)$是唯一的。

顺便指出，若取X_f为$f(x)$的系数列矩阵（是$(n+1)\times 1$的），则$g(x)$的系数矩阵A是$(m+n+1)\times(n+1)$的，此时

$$A_gX_f=X_{gf}=X_{fg}。$$

在具体计算时，只要注意到A_f的列数等于X_g的行数（也等于$g(x)$的次数$+1$）这一点，则写出A_f也是容易的。

例 1　设$f(x)=-3+4x-4x^2-2x^3+x^4$，$g(x)=3-4x-5x^2+2x^3$。求$f(x)g(x)$。

解　由于次$(f(x))=4$，次$(g(x))=3$，故A_f是$(4+3+1)\times(3+1)$矩阵，X_g是$(3+1)\times 1$矩阵，即取

$$A_f=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，\quad X_g=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}，则$$

$$A_fX_g=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\4&-3&0&0\\-4&4&-3&0\\-2&-4&4&-3\\1&-2&-4&4\\0&1&-2&-4\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\24\\-13\\-16\\39\\-2\\-9\\2\end{pmatrix}=X_{fg},$$

于是由X_{fg}即得

$f(x)g(x)=-9+24x-13x^2-16x^3+39x^4-2x^5-9x^6$
$2x+{}^7$。

下面讨论多项式整除的矩阵表示。

设$h(x)$，$f(x)\in F〔x〕$，有

$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_px^p$，（$c_p\neq0$），

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，（$a_n\neq0$）。

其中p，n为非负整数，且假定$p\geq n$。

由于$p\geq n$，则总有非负整数m，使$p=n+m$，故

$$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}。$$

取$f(x)$的系数矩阵A_f和$h(x)$的系数列矩阵X_h分别是

$$A_f=\begin{pmatrix}a_0&0&\vdots&0\\a_1&a_0&\vdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&a_{n-1}&\vdots&a_0\\0&a_n&\vdots&a_1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\vdots&a_n\end{pmatrix}_{(n+m+1)\times(m+1)},$$

$$X_h=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times 1},$$

其中$n+m=p$。

令矩阵

$$\overline{A}=(A_f, X_h),$$

则我们有

定理 2 1）$f(x)|h(x)$的充要条件是秩（$\overline{A}$）= 秩（A_f）$=m+1$。

2）若有$g(x)\in F[x]$，使$h(x)=f(x)g(x)$，则$g(x)$唯一。

证明 1）由于$n+m+1\geq m+1$，且只要$f(x)\neq 0$，恒有秩（A_f）$=m+1$是显然的。

设列矩阵

$$X_g=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{(m+1)\times 1}, \qquad 其中m=p-n。$$

令

$$A_f X_g=X_h, \tag{2}$$

则（2）式是关于以b_0，b_1，…，b_m为未知量的一个线性方程组，A_f是（2）的系数矩阵，$\overline{A}$是增广矩阵，所以（2）有解

当且仅当秩（A_f）＝秩（$\overline{A}$）。

而（2）有解（即存在X_g使$A_fX_g=X_h$）当且仅当$f(x)\mid h(x)$（即存在$g(x)\in F[x]$，使$f(x)g(x)=h(x)$，将X_g看作$g(x)$的系数列矩阵）。所以

$f(x)|h(x)$当且仅当秩（A_f）＝秩（$\overline{A}$）$=m+1$。

2）由于（2）有$m+1$个未知量b_0，b_1，…，b_m，而秩（A_f）＝秩（$\overline{A}$）$=m+1$。故（2）有唯一解X_g，所以$f(x)g(x)=h(x)$中的$g(x)$是唯一确定的。

例 2　设$h(x)=2+3x-13x^2-6x^3+17x^4-3x^5$，

$$f(x)=2-x-5x^2+x^3。$$

判定$f(x)$能否整除$h(x)$，若整除时，求$g(x)$，使

$$h(x)=f(x)g(x)。$$

解　因为次（$h(x)$）＝5，次（$f(x)$）＝3，所以取定理中的$n=3$，$m=5-3=2$，故可令

$$A_f=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\-5&-1&2\\1&-5&-1\\0&1&-5\\0&0&1\end{pmatrix}_{(3+2+1)\times(2+1)},$$

$$X_h=\begin{pmatrix}2\\3\\-13\\-6\\17\\-3\end{pmatrix},\quad \overline{A}=(A_f,X_h)=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\-1&2&0&3\\-5&-1&2&-13\\1&-5&-1&-6\\0&1&-5&17\\0&0&1&-3\end{pmatrix}.$$

对$\overline{A}$施行初等行变换化为

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

则易见秩(A_f)=秩$(\overline{A})=3$，从而$f(x)\mid h(x)$。

由于$m=2$，故令

$$X_g=\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}_{(2+1)\times 1},$$ 并由$A_f X_g=X_h$与

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

同解得

$$X_g=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},$$ 取$g(x)=1+2x-3x^2$，即有

$h(x)=f(x)g(x)$。

对于含有参变数作系数的多项式整除的判定，定理2具有独特的效果。

例3 设$h(x)=q+px+x^4$，$f(x)=1+mx+x^2$，求$f(x)$整除$h(x)$所满足的条件。

解 令

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ p & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，$$ 对$\overline{A}$进行初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ p-mq+m & 0 & 0 & 0 \\ -q-1+m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由定理2知，$f(x)\mid h(x)\Longleftrightarrow$秩$(\overline{A})=4-2+1=3\Longleftrightarrow p-mq+m=0$且$-q-1+m^2=0$，即 $p=m^3-2m$且$q=m^2-1$。

2．最大公因式的矩阵求法

设$f(x)$，$g(x)\in F[x]$，$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式，则有$u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \tag{1}$$

成立。在一般现行《高等代数》教材中，采用辗转相除法求得$d(x)$后，再利用逐步代入的方法求得$u(x)$，$v(x)$使（1）

式成立。这样做，在$f(x)$，$g(x)$作辗转相除次数较多时显得十分麻烦。尤其是为求得满足（1）式的$u(x)$与$v(x)$时，在辗转相除的过程中不能用常数去乘除式和被除式，这就增加了运算的困难。下面我们介绍一种利用矩阵的初等变换同时求得$d(x)$，$u(x)$，$v(x)$使（1）式成立的方法。

为叙述方便，称一个以$F〔x〕$中的多项式为元素的矩阵为x－矩阵；称以下三种变换为x－矩阵的初等行变换：

1）矩阵的某两行互换位置；

2）矩阵的某一行乘以一个非零常数；

3）矩阵的某一行的$\varphi(x)$倍加到另一行，$\varphi(x)\in F〔x〕$。

命题1 任意一个x－矩阵经初等行变换后必可化为如下形式

$$\begin{pmatrix} d(x) & ※ & \cdots & ※ \\ 0 & ※ & \cdots & ※ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & ※ & \cdots & ※ \end{pmatrix},$$

其中“※”表示$F〔x〕$中的多项式。

证明从略。

命题2 设x－矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 经初等行变换化为 $B(x)=$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & u_1(x) & v_1(x) \\ g_1(x) & s_1(x) & t_1(x) \end{pmatrix},$$

那么 $(f(x),\ g(x)) = (f_1(x),\ g_1(x))$，且

$$f_1(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$
$$g_1(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x)。$$

证明 只需证明经一次初等行变换后上述命题成立即可。下面分别就三种初等变换加以证明。

1) $B(x)$是经$A(x)$互换两行得到的，则$f_1(x) = g(x)$，$g_1(x) = f(x)$，$u_1(x) = t_1(x) = 0$，$v_1(x) = s_1(x) = 1$，易见命题成立；

2) 不妨设$B(x)$是以非零数c乘$A(x)$的第一行得到的，则$f_1(x) = cf(x)$，$g_1(x) = g(x)$，$u_1(x) = c$，$t_1(x) = 1$，$v_1(x) = s_1(x) = 0$，由于$(f(x),\ g(x)) = (cf(x),\ g(x)) = (f_1(x),\ g_1(x))$，且$f_1(x) = cf(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)$，$g_1(x) = g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x)$。从而命题成立；

3) 设$B(x)$是由$A(x)$的第二行的$q(x)$倍加到第一行得到的，那么，

$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x)$，$g_1(x) = g(x)$，$u_1(x) = t_1(x) = 1$，$v_1(x) = q(x)$，$s_1(x) = 0$，于是$(f(x),\ g(x)) = (f_1(x),\ g(x)) = (f_1(x),\ g_1(x))$。且由

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot g(x), \qquad (2)$$
$$g(x) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x), \qquad (3)$$

(3) 乘以$q(x)$加到 (2) 得

$$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$
$$g_1(x) = g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x),$$

综上述，命题 2 成立。

由命题 1 及命题 2 即得