高等院校应用型本科教育系列规划教材

概率统计与建模

李俊林　主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等院校应用型本科教育系列规划教材

概率统计与建模

主　编　李俊林
副主编　夏桂梅　高廷凯

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书分为概率论和数理统计两部分，共8章. 前5章讲述概率论的基本内容；第6～8章讲述数理统计的基本内容，同时各章末节讲述了部分与概率统计相关的一些数学建模. 各章后附有习题，有助于读者对基本内容进一步理解和深化.

本书可作为高等工科院校各专业概率论与数理统计课程的通用教材，也可作为各类成人教育同类专业的教科书，还可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计与建模/李俊林主编. —北京：科学出版社，2010. 8
(高等院校应用型本科教育系列规划教材)
ISBN 978-7-03-028467-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材③数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O21②O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第148807号

责任编辑：滕亚帆 王国华 / 责任校对：桂伟利
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年8月第一次印刷 印张：14 1/2
印数：1—5 000 字数：281 000

定价：25.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

概率论与数理统计作为大学的公共基础课，其概念与理论往往使学生理解时感到困难，这给教师授课增加了难度. 为此，我们总结多年教学实践经验，于 2002 年编写了讲义，供本校学生使用. 2005 年讲义正式出版. 考虑到硕士研究生教育的快速发展，以及本科生学习的多层次需要，同时考虑到概率论与数理统计这门课程与实际应用联系密切，我们于 2007 年进行了修订. 本次编写中各章节增添了近年来硕士研究生招生考试的概率统计试题，作为典型例题供学生学习. 同时在教材中增加了与概率统计相关的数学模型，初步培养大学生对数学建模的兴趣，增强大学生对数学建模的基本认识和运用，收到了很明显的教学效果. 这次我们本着认真负责的态度对教材的内容进一步优化组合，又对教材中的不足之处和印刷错误进行了更正，在此不再一一列举. 为了培养学生一定的数学素养和对本课程的兴趣，更好地理解与本课程相关的数学背景知识，我们在每章末附有相关数学家的故事.

本书内容包括概率论和数理统计两部分，共 8 章. 讲授全书约需 48 学时（带 * 号部分仅供参考，不包括在内），不同院校、不同专业可根据具体要求灵活安排内容和学时，合理组织教学.

本书由李俊林主编，负责全书的体系安排，组织编写以及审稿、定稿工作. 第 1 章、第 5 章由夏桂梅编写，第 2 章、第 6 章由高廷凯编写，第 3 章由张红燕编写，第 4 章由崔学英编写，第 7 章由麻晓波编写，第 8 章由杨栋辉编写.

本书可作为高等工科院校各专业概率论与数理统计课程的通用教材，也可作为各类成人教育同类专业的教科书，还可作为工程技术人员和相关建模人员的参考书.

本书在编写过程中得到了科学出版社、太原科技大学的大力支持，太原科技大学数学系的老师们对本书提出了许多建设性的意见，编者在此向他们表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，恳请读者批评指正.

编　者

2010 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

在自然界与人类的社会活动中常常会出现各种各样的现象，归纳起来可分为两种现象：确定性的和随机性的. 在确定的试验条件下必然会发生的现象称为**确定性现象**. 经典的数学理论，如微积分、微分方程等，是研究确定性现象的有力工具. 另外一类现象则不然，在一定条件下，可能发生，也可能不发生，具有不确定性，我们将这类现象称为**随机现象**. 例如，将一枚硬币向上抛，着地时究竟正面向上还是反面向上，这在上抛前是无法断言的. 又如，从含有不合格品的一批某种产品中任意抽一件检查，其检查结果可能是合格品也可能是不合格品，这在抽取之前无法准确地预言，但是，经过长期实践，人们知道，多次重复上抛同一枚硬币出现正面向上与反面向上的次数差不多各占一半. 当从含有不合格品的一批产品中重复抽样时，抽到合格品的次数与抽取总次数之比呈现出某种稳定性. 在个别试验中呈现不确定的结果，在大量重复试验中结果却呈现出某种规律性，这种规律性称为**统计规律性**. 概率论与数理统计就是现代数学理论中研究随机现象统计规律性的一门基础学科，分为概率论与数理统计两部分. 它与经典数学是相辅相成、相互渗透的. 例如，弹道曲线可归结为微分方程问题，而实际中还需要用概率统计的方法将捉摸不定的空气阻力、弹身振动等因素加以考虑，分析炮弹飞行路线不确定性的规律. 本章介绍概率论中的基本概念——样本空间、随机事件及其概率，并进一步讨论随机事件的关系与运算，以及概率的性质与计算方法.

1.1　随机事件及其运算

为研究随机现象的统计规律性作准备，本节介绍随机试验、样本空间、随机事件及事件间的关系与运算.

一、随机试验

通常，把对自然现象的观察或进行一次试验，统称为一个**试验**. 如果这个试验在相同的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前无法预料，我们就称它为一个**随机试验**，并用字母 E 或 E_1，E_2 等表示. 下面给出一些随机试验的例子.

试验 E_1：掷一枚均匀的硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

试验 E_2：掷一枚骰子，观察出现的点数.

试验 E_3：记录某电话交换台在 8:00～8:10 内接到的呼唤次数.

试验 E_4：从一批灯泡中，任取一只，测试它的使用寿命.

上面所举的四个试验例子，尽管内容各异，但它们有着共同的特点：

1° 可以在相同的条件下重复进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，并且事前能明确试验的所有可能结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果出现，但每次试验总是出现所有可能结果中的一个.

我们把这三个特点称为随机试验的三条特性. 以下所提到的试验都是指具有上述特性的随机试验.

二、样本空间

要研究一个随机试验 E，不仅要弄清楚这个试验所有可能的结果，还要了解它们的含义，而每一个可能的结果的含义是指试验后所观察(测)到的最简单的直接结果，它不包含其余的任何一个可能的结果. 我们把试验后所观察(测)到的这种最简单的每一个直接结果称为该试验的一个**基本事件**. 全体基本事件所构成的集合称为随机试验的**样本空间**. 样本空间通常用字母 Ω 表示，为了区别不同试验的样本空间，也可以用 Ω_1,Ω_2 等表示. Ω 中的元素即基本事件，也称为**样本点**，常用字母 ω 表示，必要时也可以用 ω_1,ω_2 等表示不同的样本点.

下面是本节四个例题中试验的样本空间.

试验 E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{H,T\}$.

试验 E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

试验 E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

试验 E_4 的样本空间 $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$，其中 t 为灯泡的寿命. 但应当注意的是，样本空间的元素取决于试验的目的. 若在 E_4 中只考虑取得的灯泡的优劣，则 E_4 的样本空间 $\Omega_4=\{$优质品，合格品，次品$\}$.

由此可见，样本空间可以是数集，也可以不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集.

三、随机事件

当研究随机试验时，人们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现，而更关心的是满足某些条件的样本点在试验后是否出现. 例如，在 E_4 中，测试灯泡的使用寿命以便确定该批灯泡的质量. 若假定使用寿命超过 1000 小时为合格品，则人们关心的是试验结果是否大于 1000 小时. 满足这个条件的样本点组成了样本

空间的子集. 我们把样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用大写字母 A,B,C 等表示，也可以用语言描述加花括号来表示. 例如，在 E_3 中，{呼唤次数不超过 5 次}. 显然，基本事件就是仅含一个样本点的随机事件；一个样本空间，可以有许多随机事件.

随机试验中，若组成随机事件 A 的某个样本点出现，则称事件 A **发生**，否则称事件 A **不发生**. 如 E_2 中，若用 A 表示{出现奇数点}，即$\{1,3,5\}$，它是 Ω_2 的子集，是一个随机事件，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时，则称事件 A 发生. 同样，若用 B 表示{出现偶数点}，即$\{2,4,6\}$，它是 Ω_2 的子集，也是一个随机事件.

由于样本空间 Ω 是其本身的一个子集，因而也是一个随机事件，又因为样本空间 Ω 包含所有的样本点，所以每次试验必定有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，因而称 Ω 为**必然事件**. 又因空集$\varnothing$总是样本空间 Ω 的一个子集，所以$\varnothing$也是一个随机事件，由于$\varnothing$不包含任何一个样本点，故每次试验$\varnothing$必定不发生，因而$\varnothing$称为**不可能事件**.

必然事件与不可能事件已无随机性可言，在概率论中，为讨论方便，仍把 Ω 与$\varnothing$当成两个特殊的随机事件.

四、事件间的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件. 我们希望通过对较简单的事件的了解去掌握较复杂的事件. 为此，需要研究事件之间的关系与事件之间的运算. 由于事件是一个集合，因此事件之间的关系与运算应该按照集合论中集合之间的关系与运算来规定.

给定一个随机试验 E，Ω 是它的样本空间，事件 A,B,C 与 $A_i(i=1,2,\cdots)$都是 Ω 的子集.

1. 包含关系

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 图 1-1 给出了包含关系的一个直观的几何解释.

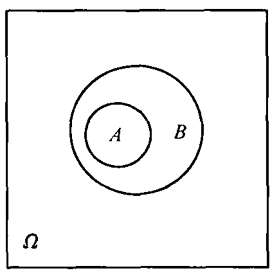

图 1-1

例如，在试验 E_4 中，$A=$\{灯泡使用寿命不超过 200 小时\}，$B=$\{灯泡使用寿命不超过 300 小时\}，则 $A\subset B$.

2. 相等关系

两事件 A 与 B，若 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则

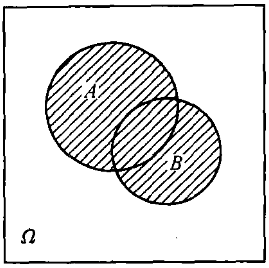

图 1-2

称 A 与 B **相等或等价**，记为 $A=B$.

3. 和(或并)事件

两事件 A,B 中至少有一个发生的事件，称为 A 与 B 的**和(或并)**事件，记为$A\cup B$. 图 1-2 给出了这种运算的一个几何表示(阴影部分).

例如，在某班级中，事件 $A=\{$订阅语文报的学生$\}$，事件 $B=\{$订阅数学报的学生$\}$，则和事件 $A\cup B=\{$订阅语文报或数学报的学生$\}$.

两事件和的概念还可以推广到有限个和可列个事件的情形，也就是说 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$表示事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots$中至少有一个发生的事件.

例如，某人进行射击，直到击中目标为止. 若 $A=\{$击中$\}$，$A_k=\{$射击到第 k 次才击中$\}$，显然有 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

4. 积(或交)事件

两事件 A 与 B 同时发生的事件，称为 A 与 B 的**积(或交)**事件，记为 $A\cap B$ 或 AB，其几何表示如图 1-3 所示(阴影部分).

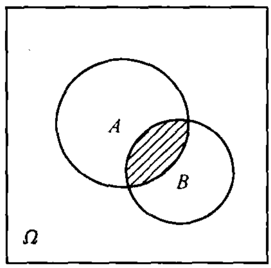

图 1-3

例如，记事件 $A=\{$订阅语文报的学生$\}$，$B=\{$订阅数学报的学生$\}$，则 $A\cap B=\{$同时订阅语文和数学报的学生$\}$.

类似地，两事件积的概念也可以推广到有限个和可列个事件的情形. 我们用$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；用$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件.

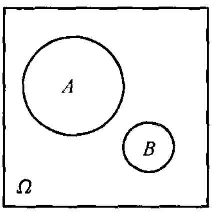

图 1-4

5. 互斥(互不相容)事件

如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A,B 为**互斥事件**或**互不相容事件**. 其几何表示如图 1-4 所示.

例如，在试验 E_2 中，若 $A_k=\{$出现 k 点$\}$ $(k=1,2,\cdots,6)$，显然有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，称 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ **两两互斥**.

6. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称作 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，其几何表示如图 1-5 所示（阴影部分），并注意到 $A-B=A-AB=A\overline{B}$.

7. 逆（对立）事件

如果事件 A 与 B 必有一个发生，但不能同时发生，即关系式 $A\cap B=\varnothing$ 与 $A\cup B=\Omega$ 同时成立，则称事件 B 是事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}=B$. 同理 $\overline{B}=A$，其几何表示如图 1-6 所示.

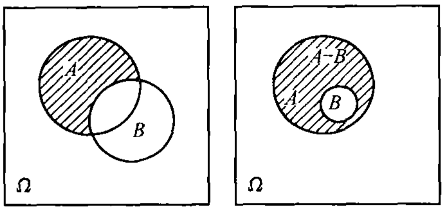

图 1-5

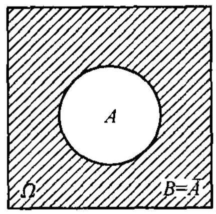

图 1-6

例如，在试验 E_1 中，若 $A=\{$出现正面$\}$，则 $\overline{A}=\{$出现反面$\}$.

由于事件的关系与运算和集合论中的关系与运算可以完全对照起来，是相一致的，所以事件之间的运算满足下列性质：

1° $A\subset A, A\cup A=A, A\cap A=A$；

2° $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$（传递性）；

3° $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$（交换律）；

4° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$（结合律）；

5° $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$（分配律）；

6° $A-B=A\cap\overline{B}$；

7° $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

8° $\varnothing\subset A\subset\Omega, A\cap B\subset A\subset A\cup B, A\cap B\subset B\subset A\cup B$；

性质 7°可推广如下：

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n},$$
$$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}.$$

常把上述公式称为**对偶公式**或**德摩根**(de Morgan)公式.

现将集合论中的术语与概率论中的术语对照列表，如表 1-1 所示.

表 1-1

符　号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\omega\in\Omega$	基本事件	Ω 中的点（或称元素）
$A\subset\Omega$	事件 A	Ω 的子集 A
$A\subset B$	事件 B 包含事件 A	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等（或等价）	集合 A 与 B 相等（或等价）
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	集合 A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的余集（或补集）
$A-B$	事件 A 发生但事件 B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 互斥	集合 A 与 B 无公共元素

在具体问题中，常常需要利用给定的一些事件，通过它们的运算，表示出另外一些事件.

例 1　某位工人加工了三个零件，$A_i=\{$加工的第 i 个零件是正品$\}(i=1,2,3)$，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) $A=\{$只有第一个零件是正品$\}$；

(2) $B=\{$只有一个零件是正品$\}$；

(3) $C=\{$至少有一个零件是正品$\}$；

(4) $D=\{$正品零件不多于一个$\}$.

解　(1) A 发生，意味着第二、第三个零件是次品，即 A_1 发生，并且 $\bar{A}_2$ 与 $\bar{A}_3$ 同时发生，所以 $A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) B 发生，并不指定哪一个是正品. 三个事件$\{$只有第 i 个零件是正品$\}(i=1,2,3)$中任意一个发生，都意味着事件 B 发生，所以 $B=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

(3) C 发生，就是指$\{$第一、二、三个零件中至少有一个是正品$\}$发生，所以 $C=A_1\cup A_2\cup A_3$.

(4) D 发生，意味着三个零件中至多有一个正品，所以 $D=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

例 2　电路如图 1-7 所示，令 $A_i=\{$第 i 个接点开关闭合$\}(i=1,2,3,4)$，试用 A_i 表示事件 $B=\{L,R$ 是通路$\}$；$C=\{L,R$ 是断路$\}$.

解　B 发生，只要三个事件$\{1$ 闭合$\}$，$\{2,3$ 同时闭合$\}$或$\{4$ 闭合$\}$中的任何一个发生即可，所以

$$B=A_1\cup A_2A_3\cup A_4.$$

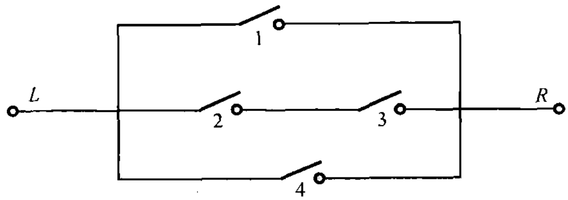

图 1-7

C 发生就是指"L,R 不是通路",所以

$$C=\overline{B}=\overline{A_1\cup A_2A_3\cup A_4}=\overline{A}_1(\overline{A_2A_3})\overline{A}_4$$
$$=\overline{A}_1(\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)\overline{A}_4=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\overline{A}_4.$$

1.2　概率的直观意义及其运算

对于随机事件在一次试验中是否发生,我们不能事先预知,但是在大量重复试验中,人们可以发现它是有其内在规律性的.这种规律性最明显的表现就是事件在试验中发生的可能性有大小之分,这就是人们常说的干某件事有百分之几的成功把握,或某种现象发生的可能为百分之几等.对于事件发生可能性的大小,自然需要用一个数量指标去刻画它.这个指标,首先应该是随机事件本身所具有的属性,不能带有主观性,且能在大量重复试验中得到验证;其次,必须符合常情.例如,事件发生可能性大的就赋予它较大的值;反之,就赋予它较小的值.

我们把刻画事件可能性大小的数量指标叫做事件的**概率**.事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示,且规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.而如何计算概率?恰恰是本章以下内容讨论的主题.本节先提出在一些简单情形下如何合理确定概率,即概率的古典定义和几何定义,然后从随机事件的频率出发,给出概率的统计定义.

一、古典概率

现在我们来讨论一类简单的随机试验,其特征是:

1°　样本空间只有有限个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$(有限性);

2°　各基本事件发生的可能性相等(等可能性).

我们把这类试验称为**古典概型**.由于它是概率论发展初期的主要研究对象,时间久远,故称为古典概型.

例如,在一盒子中装有大小、形状一样,编号依次为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球,从中任取一球,$\omega_i=\{$取得号数为 i 的球$\}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$.由于取球是任意的,所以各基本事件发生的可能性相等.因此,这个问题属于古典概型.

定义 1.2.1 设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，事件 $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\cdots,\omega_{k_m}\}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中某 m 个不同的数，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A\text{ 中所包含的基本事件数})}{n(\text{样本空间中基本事件的总数})}. \tag{1.2.1}$$

概率的这种定义，称为概率的**古典定义**，用这种方法算得的概率称为**古典概率**.

例 1 从一副扑克牌(52 张)中，任意抽出 4 张，求抽得 2 张红桃和 2 张黑桃的概率.

解 设事件 $A=\{$任意抽出 4 张，有 2 张红桃和 2 张黑桃$\}$，因为样本空间的基本事件总数 $n=C_{52}^4$，而事件 A 中所含的基本事件数 $m=C_{13}^2C_{13}^2$，故有

$$P(A)=\frac{C_{13}^2C_{13}^2}{C_{52}^4}\approx 0.0225.$$

例 2 一批产品共有 100 件，其中有 3 件次品，其余都是正品. 现按下述两种方式，随机地取出两件产品：

(1) 有放回抽样，即第一次任取一件产品，测试后放回原来的产品中，第二次再从中任取一件产品；

(2) 无放回抽样，即第一次任取一件产品，测试后不再放回原来的产品中，第二次再从第一次取出后所余的产品中任取一件产品.

试就上述两种情况，分别求取出的两件中恰有一件次品的概率各是多少.

解 设 $A=\{$取出的两件中恰有一件次品$\}$.

(1) 按此方式，第一次任取一件产品，测试后要放回原批中，因而第一次、第二次任意抽取一件产品时，都有 100 种不同的选取方法，由乘法原理可知，共有 100^2 种不同的取法，而每种取法都对应着一个样本点，故该方式下，试验的样本点总数为 $n=100^2$. 而事件 A 包含的样本点数 $m=C_3^1C_{97}^1+C_{97}^1C_3^1$，从而

$$P(A)=\frac{C_3^1C_{97}^1+C_{97}^1C_3^1}{100^2}=0.0528.$$

(2) 按这种方式，由于第一次取出的产品测试后不再放回原批中，故第一次有 100 件产品可供选取，而第二次只能从原批中余下的 99 件任选一件，按此方式取出两件产品共有 $100\times 99=A_{100}^2$ 种不同取法，相应的样本点总数为 $n=A_{100}^2$，而此时事件 A 包含的样本点数仍为 $m=C_3^1C_{97}^1+C_{97}^1C_3^1$，故

$$P(A)=\frac{C_3^1C_{97}^1+C_{97}^1C_3^1}{A_{100}^2}\approx 0.0588.$$

在抽样问题中，无放回抽样亦可看做一次任取若干个样品. 因此，例 2 中方式(2)的试验可以看做“一次随机抽取出两件产品”的试验，其样本空间也相应地改变，而样本点总数应由组合公式计算，即 $n=C_{100}^2$，事件 A 所包含的样本点也按相应的方法计算，即 $m=C_3^1C_{97}^1$，故

$$P(A)=\frac{C_3^1C_{97}^1}{C_{100}^2}\approx 0.0588.$$

由此可见，对同一问题，若解决问题的思路不同，所对应的试验也不同，从而样本空间的"设计"与样本点的计数法也不同，但所求的概率应该是相同的.

在例 2 中(1)，(2)两种抽样下，我们看到尽管所求事件的概率数值不同，但差别不大. 这是由于产品总数较大而抽查的产品数量又较小的缘故. 因此，在一些实际问题中，若产品批量很大，而抽查的产品数量又很小时，人们通常把无放回抽样当成有放回抽样处理，使问题得到简化.

二、几何概率

古典概率的定义要求试验满足有限性和等可能性，但是很多随机试验并不满足有限性这一条件. 请看下面几个简单的例子.

某十字路口自动交通信号灯的红绿灯周期为 60s，其中由南至北方向红灯时间为 15s. 试求随机到达(由南至北)该路口的一辆汽车恰遇红灯的概率.

一片面积为 S 的树林中有一块面积为 S_0 的空地，一架飞机随机地向这片树林空投一只包裹，假定包裹不会投出这片树林之外. 试求包裹落在空地上的概率.

已知在 10mL 自来水中有 1 个大肠杆菌. 今从中随机地取出 3mL 自来水放在显微镜下观察. 试求发现大肠杆菌的概率.

在上述问题中，样本空间 Ω 分别是一维有限区间、二维、三维有界区域，它们通常用长度、面积、体积来度量大小. 另外它们都含有无穷多个样本点，并且各样本点还是等可能出现的. 这里"等可能性"的确切含义是：当 A 是样本空间的一个子集时，$P(A)$与 A 的位置、形状无关，而只与 A 的长度、面积或体积成正比. 此时不能用古典概率计算.

定义 1.2.2　设样本空间 Ω 是某个有限区域(可以是一维、二维、三维)，每个样本点等可能地出现，当事件 A 是样本空间的一个子集时，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},\tag{1.2.2}$$

这里 $m(\cdot)$在一维的情形下表示长度，在二维的情形下表示面积，在三维的情形下表示体积. 概率的这种定义，称为**概率的几何定义**. 用这种方法得到的概率称为**几何概率**.

上面的例子，由定义 1.2.2 易得，概率分别为$\frac{15}{60},\frac{S_0}{S},\frac{3}{10}$.

例 3　在一个陀螺的圆周上均匀地刻上区间$[0,4)$上的数字，在平整光滑的支撑面上旋转陀螺，求它停下时与支撑面接触点的刻度在$[1,2]$上的概率.

解　旋转陀螺停下时与支撑面接触点的刻度是$[0,4)$上的任一个值都是等可能的，其样本点有无限多个，则样本空间 $\Omega=\{[0,4)\}$. 设事件 $A=\{$陀螺停下时与

支撑面接触点的刻度在[1,2]上}. 则由几何概率公式(1.2.2)得

$$P(A)=\frac{[1,2]\text{ 的长度}}{[0,4)\text{ 的长度}}=0.25.$$

例 4 甲乙二人相约于 T_1 到 T_2 这段时间内在某处会面,并约定先到的一人只等候一段时间 t 就离去. 设每人在 $[T_1,T_2]$ 上各时刻到达会面地点都是等可能的,求甲与乙这次相约未能会面的概率.

解 设 x,y 分别表示甲与乙到达的时刻,则有

$$T_1\leqslant x\leqslant T_2,\quad T_1\leqslant y\leqslant T_2.$$

将点 (x,y) 视为 xOy 坐标面上的任意点,则样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid T_1\leqslant x\leqslant T_2,T_1\leqslant y\leqslant T_2\},$$

如图 1-8 所示(正方形区域),甲乙未能会面是一个随机事件,可表示为

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|>t,T_1\leqslant x\leqslant T_2,T_1\leqslant y\leqslant T_2\},$$

如图 1-8 阴影部分所示. 由式(1.2.2),得两人未能会面的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{(T_2-T_1-t)^2}{(T_2-T_1)^2}.$$

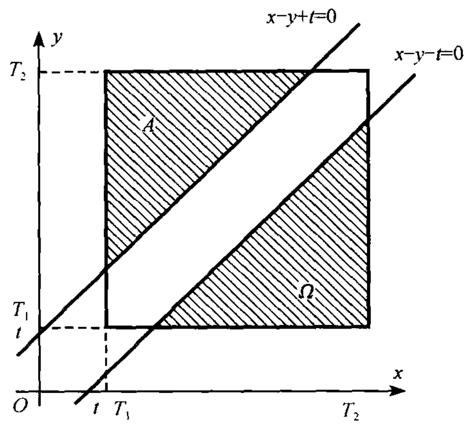

图 1-8

三、统计概率

几何概率虽然去掉了样本空间有限性的限制,但它需要满足等可能性,这在实际问题中有很大的局限性,例如,掷一枚不均匀的硬币试验就不具有等可能性,为此人们在频率的基础上引进了统计概率.

定义 1.2.3 设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次,则比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=\frac{k}{n}$.

对于事件的频率，具有如下性质：

1° $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

2° $f_n(\Omega)=1$；

3° 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥，则 $f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$.

大量实践证明，当试验重复的次数较多，即 n 较大时，事件 A 的频率总在一个确定的常数 p 附近摆动，并随着 n 的增大，频率 $\frac{k}{n}$ 与此常数 p 的偏差愈来愈小，这就是所谓频率的稳定性.

例 5 说明频率稳定性的例子.

(1) 抛硬币试验

历史上有不少人做过抛硬币试验，其结果见表 1-2，从表 1-2 中的数据可以看出：出现正面的频率逐渐稳定在 0.5.

表 1-2 历史上抛硬币试验的若干结果

实验者	抛硬币次数	出现正面次数	频　率
德摩根(de Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
费勒(Feller)	12000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

(2) 英语字母的频率

人们在生活实践中已经认识到：英语中某些字母出现的频率要高于另外一些字母. 但 26 个英文字母各自出现的频率到底是多少？有人对各类典型的英语书刊中字母出现的频率进行统计，发现各个字母的使用频率相当稳定(表 1-3). 这项研究在计算机键盘的设计(在方便的地方安排使用频率最高的字母键)、信息的编码(用较短的码编排使用频率最高的字母键)等方面都是十分有用的.

表 1-3 英文字母的使用频率

字　母	使用频率	字　母	使用频率	字　母	使用频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		