华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

47

CRC Press
Taylor & Francis Group

Introduction to Stochastic Processes

(Second Edition)

随机过程导论

（原书第2版）

（美）Gregory F. Lawler 著

张景肖 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

47

Introduction to Stochastic Processes

(Second Edition)

随机过程导论

（原书第2版）

（美）Gregory F. Lawler 著

张景肖 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是一本随机过程的优秀教材，不仅以浅显易懂的语言阐述基本概念和方法，而且通过一些非常基础的应用实例，让读者了解如何应用随机过程理论解决实际问题。主要内容包括有限马尔可夫链、可数马尔可夫链、连续时间马尔可夫链、最优停时、鞅、可逆马尔可夫链、布朗运动和随机积分等.

本书侧重数学思想的分析而不是具体细节的理论证明，所需的数学基础只是本科程度的概率论和一些线性代数知识，而不需要读者有测度论的基础，适合作为高等院校数学及相关专业高年级本科生和研究生教材，也适合作为相关领域研究人员的参考书.

本书版权登记号：图字：01-2010-1520

图书在版编目（CIP）数据

随机过程导论（原书第 2 版）/（美）劳勒（Lawler, G. F.）著；张景肖译. —北京：机械工业出版社，2010. 9

（华章数学译丛）

书名原文：Introduction to Stochastic Processes, Second Edition

ISBN 978-7-111-31544-5

Ⅰ. 随…　Ⅱ. ①劳…　②张…　Ⅲ. 随机过程　Ⅳ. O211. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 155619 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：李俊竹

北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷

2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm・11. 25 印张

标准书号：ISBN 978-7-111-31544-5

定价：36. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991；88361066

购书热线：（010）68326294；88379649；68995259

投稿热线：（010）88379604

读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

随机过程理论不仅在数学以及统计领域非常重要，在很多其他的学科领域也都有非常重要的应用，如工程、计算机科学、经济学、生物、物理等．特别是现代数理金融理论，更是以此为必要的前提．但是目前，关于随机过程的优秀教材，特别是中文教材并不是太多，而且这些教材的局限性也比较明显，有些要求读者要有测度论的基础，有些只针对理工科背景，主要的局限性还在于对随机过程理论如何应用于实际问题介绍很少，读者在学习了这些教材后往往感觉帮助并不大．Gregory F. Lawler 的《随机过程导论》一书恰好可以弥补这些不足．作者有长期在杜克大学讲述随机过程课程的经验，所面对的学生也有各种学习和研究背景，这给了作者很好的机会以选择合适的内容和讲述方式．在仔细阅读了这本书后，译者觉得非常值得将这本书介绍给我国的读者．

本书最大的特点是侧重数学思想的分析而不是具体细节的理论证明，所需要的数学基础只是本科程度的概率论和一些线性代数的知识，而不需要读者有测度论的基础．在随机过程应用的介绍方面，本书并没有针对某些领域给出特别专业的例子，而是一些非常基础的应用．这样，一方面可以避免偏离本书的主题，另一方面也可以给那些需要了解应用的读者以启发，学习如何将随机过程的理论应用于解决实际问题．

本书介绍了随机过程的基础知识，内容非常丰富，可以满足来自不同领域的读者的需要．总之，这是学习随机过程基础知识的一本快速的入门书，在本书中既可以学习到基础知识，又可以学习到应用这些知识解决具体问题时的思路．这本书既可以作为不同专业本科阶段和研究生阶段的教材，又是一本很好的自学参考书．

在翻译本书的过程中，原书中的打印错误和一些不当之处已经做了修订．限于译者的水平，译稿中存在的问题和不当之处，敬请读者批评指正．

在翻译本书过程中得到了刘燕平、毛燕妮、李贞贞同学的很多帮助，在此深表谢意．

感谢在本书的翻译过程中给予我们帮助的中国人民大学的张波教授，另外感谢本书的编辑一直以来的大力协助．

张景肖

2010 年 6 月

第 2 版前言

在第 2 版中，为了介绍现代数理金融理论，我们对随机积分这一章的内容作了很明显的扩展：扩大了对 Itô公式的讨论，介绍了吉尔萨诺夫（Girsanov）变换和费因曼-卡茨（Feynman-Kac）公式，并推导了 Black-Scholes 期权定价公式. 我们尽量采用与其他章节相同的风格来阐述这一章，即向读者充分地展示公式为什么正确，而不是拘泥于完整的数学细节.

在鞅这一章中增加了极大不等式的内容，关于布朗运动也增加了很多的内容. 书中加入了更多的例子，并增加了每章末的练习题. 此外，我们还修正了第 1 版中的错误和不妥之处，并推荐了一些文献.

第 1 版前言

本书是在 Math 240 课（“应用随机过程”）讲义的基础上修改完善而来的．我在杜克大学长期从事这门课程的教学工作，学习此课程的大多数学生是数学、计算机科学、经济学、商学、生物学、心理学、物理学、统计学和工程学等专业的研究生，也有数学系的高年级本科生．这些学生的数学背景差异很大，而且与他们各自研究领域相关的随机过程的特定内容也很不一样．

要学习本书，需要有比较好的基于微积分的本科概率论知识，同时应学习过包含特征值和特征向量等内容的线性代数课程．同时读者应具有一定的计算机基础．习题需要读者编写简单的程序并利用一些软件进行线性代数方面的计算．在我所有的班上，学生们都有足够的计算机能力做到这一点．鉴于大多数同学都有微分方程的基础，我将自然地使用相关内容，不过我在预备知识中还是用较短的篇幅介绍了线性微分方程．

在本书中我努力阐述数学的核心概念和方法，而不是列出所有的数学细节．测度论并不是本书必需的先修课程，但是我试图采用这样的写作方式，使那些懂得一些测度论的读者可以更详细了解本书呈现的主题．尽管本书主要是为那些想了解随机过程应用的读者而写的，但是书中对真正的应用讨论得并不多．原因在于，要想理解真正的应用，需要对相应的研究领域有比较深入的了解，而介绍那些随机过程能够应用的领域并不是本书的目标．所以我选择使用一些非常基本的例子，而让其他领域的专家去决定何时一些数学假设对于他们的应用是合理的．

第 1 章涵盖有限马尔可夫链的基本内容．在这里我并没有给出收敛到平衡态的相关证明，而是重点说明了收敛到平衡态和随机矩阵特征值的大小之间的关系．第 2 章讨论无限状态空间的情况，以在非负整数上带有反射边界的随机游动作为主要的例子，介绍了非常返、零常返、正常返等概念，本章最后讨论了分支过程．

第 3 章讨论连续时间马尔可夫链，集中在三个主要类型：泊松过程、有限状态空间和生灭过程．对于这些过程，我使用了向前微分方程来描述概率的发展，这比向后微分方程更简单、自然．遗憾的是，向前微分方程不适用于分析所有的连续时间马尔可夫链，这一事实在最后一节做了简要讨论．生灭过程的一个主要例子是马尔可夫队列．

在决策论的广泛研究领域中，我选择了马尔可夫链的最优停时理论来介绍，这部分内容放在第 4 章．最优停时理论可以把那些能够得出算法解决相关问题的数学理论很好地结合在一起．本章中最优停时的基本思想与第 5 章所使用的思想相似．

在随机过程的很多问题中，鞅的思想都是非常基础的．第 5 章的目标就是对鞅的这些思想做一个坚实的介绍．首先给出了条件期望的现代定义，这里我们自由地使用了“关于$\mathcal{F}_n$可测，即到时刻 n 之前的所有信息已知”这样的思想而没有使用 σ 代数语言去说明它的严格含义．对本章主要的定理——可选抽样定理和鞅收敛定理都给出了证明．这里的定理证明是很重要的，从证明的过程我们可以理解定理为什么不能一直适用．另外，我们讨论了一致可积．

第 6 章主要讲解更新过程的基本思想．对于非格点的随机变量，更新方程是主要的分析工具，而对于格点的随机变量，则使用马尔可夫链的方法．作为一个应用，我们分析了服务时间为一般分布的排队系统．

第 7 章讨论可逆马尔可夫链领域中的一些当前的研究专题. 首先给出关于收敛到平衡态的速率的一个更加数理的讨论，随后简单介绍马尔可夫链算法，此算法在物理学、计算机科学、统计学等学科的一些领域中变得越来越重要. 最后关于常返性的一节，很好地利用"变分"思想证明了一个很难直接给出证明的结论.

第 8 章走马观花地介绍布朗运动中的大量内容. 试图给出其所有的数学细节是不太可能的. 除了一维布朗运动外，我也介绍了多维布朗运动，并解释了为什么布朗运动和热方程本质上是一个问题. 我还试着讨论了一些由布朗运动所产生的集合的分形性质. 第 9 章简要介绍随机积分，这里的讨论是非常不正规的，我们的目的是让学生对什么是随机积分有一些认识.

对于一个学期的课程来说，本书的内容稍稍多了一些. 建议把第 1、2、3、5、8 章作为基础章节讲述，其余章节依照选修课程的学生的情况来决定. 基础章节应当按照顺序讲解，其他章节可以在任何时间讲授. 第 4 章和第 7 章运用了之前关于马尔可夫链的内容；第 6 章最后一节用到了马尔可夫链和鞅的内容；而第 9 章则用到了布朗运动的定义和鞅.

我要首先感谢 1992 年和 1994 年春季学期 Math 240 课堂上的学生，他们对这个讲义之前的版本给出了一些建议和修改意见. 我还要感谢 1992 年在准备本书的第 1 版时我的助手 Rick Clelland 以及 Michael Phelan 和 Daniel C. Wiener 帮忙审阅了书稿，并给予我很多宝贵的建议. 在本书的写作期间，我还得到了美国国家科学基金的部分资助.

目　录

第0章 预备知识

0.1 引言

随机过程是指随着时间变化的随机的过程．更精确地说，随机过程是一族以时间作为参数的随机变量 X_t．在本书中，时间一般是非负整数集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的子集，或者是非负实数 $[0,\infty)$ 的子集．我们称第一种情形为*离散时间过程*；第二种情形为*连续时间过程*．随机变量 X_t 取值于一个集合，此集合称为*状态空间*．我们将会讨论状态空间为*离散*（即有限集或可数无限集）和状态空间为*连续*（即实数集 $\mathbf{R}$ 或 d 维空间 $\mathbf{R}^d$）两种情形．

为了研究随时间变化的确定性（非随机）过程，需要对微分方程（若时间是连续的）或差分方程（若时间是离散的）进行研究．一个典型（一阶）微分方程具有如下的形式：

$$y'(t)=F(t,y(t)).$$

这里函数 $y(t)$ 的变化只依赖于 t 和 $y(t)$ 的取值，而与 t 之前的值无关．有一大类随机过程也具有这样的性质：在 t 处的变化仅取决于过程在时刻 t 的值，而与时刻 t 之前的值无关．这类过程称为*马尔可夫过程*．对于这类过程的研究，必须掌握线性代数、微分方程、差分方程等方面的知识．学习本书的读者需对线性代数比较熟悉．而在接下来的两节中，我们将分别回顾一些要使用到的线性微分方程和线性差分方程中的内容．

0.2 线性微分方程

这里我们简要回顾一下常系数齐次线性微分方程的一些内容．要想了解更多细节，读者可 1⊖
以参考任何一本有关微分方程的入门教材．

考虑齐次微分方程：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0, \tag{0.1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots a_{n-1}$ 为常数．对任一给定的初值条件：

$$y(0)=b_0,y'(0)=b_1,\cdots,y^{(n-1)}(0)=b_{n-1},$$

方程（0.1）存在唯一的解满足这一初值条件．为求得这样的一个特解，我们可以先求出方程的通解．假设 $y_1(t),\cdots,y_n(t)$ 是方程（0.1）的 n 个线性无关解，则方程的任一解均可以写为：

$$y(t)=c_1y_1(t)+\cdots+c_ny_n(t),\quad c_1,\cdots,c_n\text{ 为常数}.$$

根据给定的初值条件，我们可以确定这些常数．

方程的解 $y_1,\cdots,y_n$ 可以通过寻找具有形式 $y(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的解来得到．我们发现函数 $y(t)$ 要满足方程（0.1）当且仅当

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0.$$

若上述多项式有 n 个不同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，我们就能得到 n 个线性无关解 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}$．出现重根的情况相对复杂一点，但经过一点计算就会发现：如果 λ 是重数为 j 的根，则 $\mathrm{e}^{\lambda t},t\mathrm{e}^{\lambda t},\cdots,$

⊖ 书中边栏页码与英文原书页码一致．——编辑注

$t^{j-1}e^{\lambda t}$ 都是解．因此对重数为 j 的根，就可以得到 j 个线性无关解，将所有的解合并在一起，我们同样可以得到所需的 n 个线性无关解．

接下来考虑一阶线性方程组：

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t). \end{aligned}$$

也可以将上面的线性微分方程组写成向量形式：

$$\bar{y}'(t) = \boldsymbol{A}\,\bar{y}(t),$$

其中 $\bar{y}(t)=[y_1(t),\cdots,y_n(t)]$（更确切地说，是这一向量的转置），$\boldsymbol{A}$ 是系数（a_{ij}）的矩阵．对于任一给定的初值向量 $\bar{v}=(v_1,\cdots,v_n)$，方程都存在唯一的解满足 $\bar{y}(0)=\bar{v}$，且该解可以很容易地写成矩阵的指数形式：

2

$$\bar{y}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}\,\bar{v}.$$

其中 $e^{t\boldsymbol{A}}$ 定义为如下幂级数的形式：

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t\boldsymbol{A})^j}{j!}.$$

为了便于计算，一般可以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化．设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 为某一对角阵：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

则

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}^{-1}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} e^{td_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{td_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{td_n} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

但是实际上，并不是每一个矩阵都能像上面那样对角化．不过对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可以写成 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{J}$ 为若尔当（Jordan）标准型．求若尔当标准型的指数形式比求对角矩阵的指数形式要稍微困难一些．要了解更多细节，可以参阅任意一本线性代数的教材．

0.3 线性差分方程

线性差分方程理论非常类似于线性微分方程．然而，由于差分理论在一般介绍微分方程的课程中并不考虑，且差分方程又会在离散时间马尔可夫链的研究中自然出现，所以在这里我们要比较详细地讨论关于这类方程的解的情况．首先考虑方程

$$f(n) = af(n-1) + bf(n+1), K < n < N. \tag{0.2}$$

其中 $f(n)$ 是定义在整数集 $K\leqslant n\leqslant N$（N 可取 ∞）上的函数，且 a，b 均为非零实数．若 f 满足方程（0.2），且已知 $f(K)$ 和 $f(K+1)$ 的值，则 $f(n)$ 在 $K\leqslant n\leqslant N$ 上的值可以通过下面

的递归公式逐一求出：

$$f(n+1)=\frac{1}{b}[f(n)-af(n-1)]. \tag{0.3}$$ 3

反之，若 u_0，u_1 为任意实数，由递归式（0.3）可以定义 $f(n)$ 来求得方程（0.2）的一个解，满足 $f(K)=u_0$，$f(K+1)=u_1$. 同时注意到满足（0.2）的函数集合构成一个向量空间，即若 f_1，f_2 满足（0.2），则 $c_1f_1+c_2f_2$ 也同样满足该方程，其中 c_1，c_2 为任意实数，这一向量空间的维数为 2；实际上，此向量空间的一组基 $\{f_1, f_2\}$ 可以这样得到：f_1 是 $f_1(K)=1$，$f_1(K+1)=0$ 的解，f_2 是 $f_2(K)=0$，$f_2(K+1)=1$ 的解. 如果 g_1，g_2 是任意两个线性无关解，根据线性代数的一般知识可知，任一解都可以写成 $c_1g_1+c_2g_2$ 的形式，其中 c_1，c_2 为常数.

为了找到一对线性无关解，我们不妨做如下猜想：考虑函数 $f(n)=\alpha^n$，$\alpha\neq 0$. $f(n)$ 是方程（对于特定的 α）的解当且仅当

$$\alpha^n=a\alpha^{n-1}+b\alpha^{n+1}, K<n<N,$$

即

$$\alpha=a+b\alpha^2.$$

根据二次函数的求解公式可以求得

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2b}.$$

第Ⅰ种情况：$1-4ab\neq 0$. 在这种情况下，α 有两个不同根 α_1、α_2，从而可以得到通解

$$f(n)=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n. \tag{0.4}$$

第Ⅱ种情况：$1-4ab=0$. 此时只求得一个解 $g_1(n)=\alpha^n=\left(\frac{1}{2b}\right)^n$. 不过如果令 $g_2(n)=n\left(\frac{1}{2b}\right)^n$，则

$$\begin{aligned}ag_2(n-1)+bg_2(n+1)&=a(n-1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n-1}+b(n+1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n+1}\\&=\left(\frac{1}{2b}\right)^n\left[a(n-1)2b+\frac{b(n+1)}{2b}\right]\\&=\left(\frac{1}{2b}\right)^n n=g_2(n).\end{aligned}$$

因此，$g_2(n)$ 也是方程的解. 容易验证 g_1，g_2 是线性无关的，所以任一解都可以表示成如下形式：

$$f(n)=c_1\left(\frac{1}{2b}\right)^n+c_2n\left(\frac{1}{2b}\right)^n.$$

例 设函数 f 满足

$$f(n)=\frac{1}{6}f(n-1)+\frac{2}{3}f(n+1),\quad 0<n<\infty,$$ 4

且 $f(0)=4$，$f(1)=3$. 此时我们将系数代入 α 表达式，得到

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}.$$

从而通解为

$$f(n)=c_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n+c_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

代入初值条件，得到

$$4=f(0)=c_1+c_2,$$

$$3=f(1)=c_1\,\frac{3+\sqrt{5}}{4}+c_2\,\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

求解得 $c_1=2$，$c_2=2$，从而

$$f(n)=2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n+2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

到这里已经看出，(0.2) 的解由 $f(K)$ 和 $f(K+1)$ 的值唯一确定. 但是在某些情况下，已知的可能是边界值 $f(K)$ 和 $f(N)$，对于这样的边值问题，也可以用同样的方法求得——先找到方程的通解，之后解出系数. 例如，设 f 满足

$$f(n)=2f(n-1)-f(n+1),\quad 0<n<10,$$

$f(0)=0$，$f(10)=1$. 可以写出方程的通解为 $f(n)=c_1 1^n+c_2(-2)^n$，代入初值条件有

$$f(0)=0=c_1+c_2,$$

$$f(10)=1=c_1+c_2(-2)^{10},$$

解得 $c_1=-c_2=\dfrac{1}{1-2^{10}}$.

考虑研究随机游动时得出的差分方程

5

$$f(n)=(1-p)f(n-1)+pf(n+1),\quad p\in(0,1).$$

如果 $p\neq\dfrac{1}{2}$，则可以得到两个根 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=\dfrac{(1-p)}{p}$，从而通解为

$$f(n)=c_1+c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^n.\tag{0.5}$$

如果 $p=\dfrac{1}{2}$，得到唯一的根 $\alpha=1$，从而通解为

$$f(n)=c_1+c_2 n.\tag{0.6}$$

以上分析的是二阶线性差分方程，而一般的 k 阶齐次线性差分方程具有如下形式：

$$f(n+k)=a_0 f(n)+a_1 f(n+1)+\cdots+a_{k-1}f(n+k-1).\tag{0.7}$$

对于 $n\geqslant 0$，假设我们希望找到满足方程 (0.7) 的函数，只要知道 $f(0),\cdots,f(k-1)$，就可以由递归公式推得 $f(n)$ $(n\geqslant k)$. 同样我们考虑具有 $f(n)=\alpha^n$ 这一形式的解，则 f 是方程的解当且仅当

$$\alpha^k=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{k-1}\alpha^{k-1}.$$

类似地，若方程有 k 个不同根，我们就能得到 k 个线性无关解；若出现 j 重根 α，则不难验证

$$\alpha^n,n\alpha^n,n^2\alpha^n,\cdots,n^{j-1}\alpha^n$$

是所有线性无关解. 根据与线性微分方程完全平行的理论，我们可以得到方程 (0.7) 的 k 个线性无关解. 由这些解的线性组合我们就能求出方程的所有解.

0.4 习题

0.1 求解满足如下方程组的所有函数 $x(t)$，$y(t)$：

$$x'(t) = y(t) - x(t),$$
$$y'(t) = 3x(t) - 3y(t).$$

并求出满足条件 $x(0)=y(0)=\frac{1}{2}$的特解.

0.2 求解 $f(n)$，$n=0,1,\cdots,10$，使其满足 $f(n)=\frac{1}{4}f(n-1)+\frac{3}{4}f(n+1)$，$n=1,2,\cdots,9$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 6

0.3 斐波那契（Fibonacci）数列 F_n 定义为：$F_1=1$，$F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n>2$. 通过求解这一差分方程找到 F_n 的表达式.

0.4 求解 $f(n)$，$n=0,1,2,\cdots$，使其满足

$$f(0) = 0,$$
$$f(n) = \frac{1}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n+1) + \frac{1}{3}f(n+2), n \geqslant 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1.$$

0.5 求解定义在整数集的实值函数 f，使得

$$f(n) = \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n-1) - 1. \tag{0.8}$$

[提示：首先证明 $f(n)=n^2$ 满足（0.8），之后假设 $f_1(n)$，$f_2(n)$ 均满足（0.8），求出 $g(n)=f_2(n)-f_1(n)$ 所满足的方程.]

0.6 (a) 求解定义在实数集上的实值函数 f，使得对所有的 x，

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = 0.$$

(b) 求解定义在整数集上的实值函数 f，使得对所有的 n，

$$f(n+2) = -f(n) - f(n+1).$$ 7

第 1 章　有限马尔可夫链

1.1　定义和举例

考虑一个离散时间的随机过程 $X_n(n=0,1,2,\cdots,)$，其中 X_n 在有限集合 $S=\{1,\cdots,N\}$ 或者 $\{0,\cdots,N-1\}$ 上取值. 我们称 X_n 的所有可能取值为系统的**状态**（state). 为了描述这样一个过程的概率性质，我们需要给出

$$\mathbf{P}\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}$$

的值，其中 n 为任意值，$(i_0,\cdots,i_n)$ 为任意的有限状态序列. 等价地，我们可以给出初始概率分布

$$\phi(i)=\mathbf{P}\{X_0=i\},i=1,\cdots,N$$

以及“转移概率”

$$q_n(i_n \mid i_0,\cdots,i_{n-1})=\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}, \tag{1.1}$$

这是因为

$$\mathbf{P}\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}=\phi(i_0)q_1(i_1 \mid i_0)q_2(i_2 \mid i_0,i_1)\cdots q_n(i_n \mid i_0,\cdots,i_{n-1}). \tag{1.2}$$

在本章中我们将讨论一类特殊的过程，即满足**马尔可夫性**（Markov property）的随机过程. 所谓马尔可夫性是指为了预测系统的未来行为，只需考虑系统现在所处的状态，而不需要知道它过去的行为. 也就是说，重要的是要知道系统所处的状态，而不是系统是如何到达此状态的. 用数学语言，可以将其表示为

$$\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

我们还要假定转移概率与时间无关，这称为时齐性. 一个**时齐马尔可夫链**（time-homogeneous Markov chain）是一个满足

9

$$\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=p(i_{n-1},i_n)$$

的过程，其中 p 是 $S\times S\to[0,1]$ 上的函数. 在本书中除特别指明外，我们所考虑的马尔可夫链均为时齐的. 为了给出马尔可夫链的概率性质，我们需要先给出初始概率分布 $\phi(i)=\mathbf{P}\{X_0=i\}$，以及转移概率 $p(i,j)$，这样由（1.2）可以得到

$$\mathbf{P}\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}=\phi(i_0)p(i_0,i_1)p(i_1,i_2)\cdots p(i_{n-1},i_n). \tag{1.3}$$

马尔可夫链的**转移矩阵**（transition matrix）$\boldsymbol{P}$ 是一个 $N\times N$ 矩阵，其 (i,j) 位置上的元素 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 为 $p(i,j)$. $\boldsymbol{P}$ 是一个**随机矩阵**，即满足

$$0\leqslant \boldsymbol{P}_{ij}\leqslant 1,1\leqslant i,j\leqslant N, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{P}_{ij}=1,1\leqslant i\leqslant N. \tag{1.5}$$

任意满足（1.4）和（1.5）的矩阵均可以作为一马尔可夫链的转移矩阵.

例 1　**两状态马尔可夫链**. 我们考虑一个描述电话状态的简单模型，其中 $X_n=0$ 表明电话在时刻 n 空闲，$X_n=1$ 表明电话在时刻 n 繁忙. 我们假设在每个时间间隔内有一个电话打进的概率为 p(为了方便起见，假定在任意一个特定的时间间隔内至多有一个电话打进). 当电话繁忙

时，来到的呼叫无法进入系统．我们还假设前一时间间隔内忙的电话在下一时间间隔空闲的概率为 q．这一模型构成一个状态空间为 $S=\{0,\ 1\}$ 的马尔可夫链，转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}.$$

这样的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 给出了两状态马尔可夫链转移矩阵的一般形式．为了确定这个矩阵，只需给出 p，q 的值就可以了．这里我们写出了转移矩阵的两种不同形式，第一种标记出了状态，后者则没有．在本章中这两种标记形式都将被使用．

例 2 **简单排队模型**．接下来我们对前一个模型作一点改动：假定电话繁忙时，可以允许一个来电在系统内等待．从而在任意时刻，系统内的来电数在集合 $S=\{0,\ 1,\ 2\}$ 上取值，同样，假设任意一个接通的电话都以概率 q 在一个时间间隔内完成，且在系统没有达到饱和的情况下，接到新来电的概率为 p．由于一个电话来到的概率为 p(同样假设在任意时间间隔内只有一个呼叫)，所以我们可以令

$$p(0,0)=1-p,p(0,1)=p,p(0,2)=0$$ 10

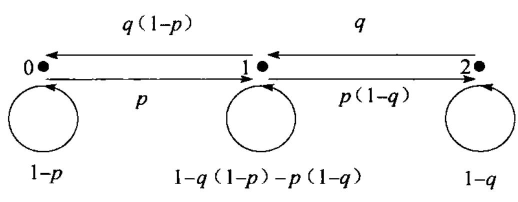
来描述此系统．同样，当系统内已经有两个来电时，新的来电将无法进入，并且两个来电也不可能同时结束，从而有

$$p(2,0)=0,p(2,1)=q,p(2,2)=1-q.$$

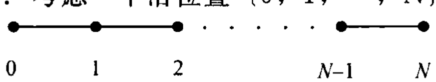
当系统中只有一个来电时，情况稍微复杂一点：如果现有的通话完成且没有新的来电进入系统，那么系统状态从 1 变为 0，即 $p(1,\ 0)=q(1-p)$．类似地，如果现有通话未完成而又有新的来电到达，那么系统状态从 1 变为 2，即 $p(1,\ 2)=p(1-q)$．因为每行的元素之和必须等于 1，所以 $p(1,\ 1)=1-q(1-p)-p(1-q)$，从而有

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ q(1-p) & 1-q(1-p)-p(1-q) & p(1-q) \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix}\end{array}.$$

转移概率常常可以用直观图的形式表示，图上的顶点代表状态，箭头表示转移方向．上面的矩阵可以用下面的图来表示：



例 3 **带有反射壁的随机游动**．考虑一个沿位置 $\{0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$ 移动的“随机游动”．



考虑质点在每一个时间点上向左或向右移动一步，向右移的概率为 p，向左移的概率为 $1-p$．如果游动到达边界点 $\{0,\ N\}$，那么以概率 1 向区间内移动．从而这一马尔可夫链的转

移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

11 $$p(i,i+1)=p,p(i,i-1)=1-p,0<i<N,$$
$$p(0,1)=1,p(N,N-1)=1,$$

当 i，j 取其他值时，$p(i,j)=0$. 如果 $p=\frac{1}{2}$，我们称其为带有反射壁的对称（symmetric）或者无偏（unbiased）随机游动；如果 $p\neq\frac{1}{2}$，那么称其为有偏（biased）随机游动. 有些时候考虑带有部分反射壁的情况相对更简便：在边界点 0 上，仍然以概率 p 向右移动，在边界点 N 上，以概率 $1-p$ 向左移动. 但是当质点试图离开状态空间 $\{0,1,\cdots,N\}$ 时，它将被边界吸收. 即它所对应的边界条件为：

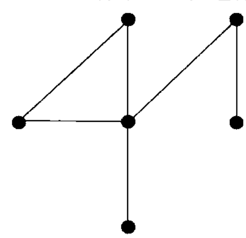
$$p(0,0)=1-p,\ p(0,1)=p,\ p(N,N-1)=1-p,\ p(N,N)=p.$$

例 4 **带有吸收壁的随机游动**. 该马尔可夫链与上一个例子的基本相同，只是当质点到达 0 或 N 时，它将永远停留在那里. 转移矩阵为

$$p(i,i+1)=p,p(i,i-1)=1-p,0<i<N,$$
$$p(0,0)=1,p(N,N)=1.$$

（从这里我们约定：对于特定的 i，j，如果 $p(i,j)$ 没有特别指明，均假定为 0.）

例 5 **图上的简单随机游动**. 一个（有限、简单、无向（finite，simple，undirected））图是由有限顶点集 V 和边集 E 构成的，其中每条边都连接着两个不同的顶点，并且任意两顶点之间至多存在一条边. 如果顶点 v_1，v_2 相邻，即存在一条边连接着这两个顶点，那么记为 $v_1\sim v_2$.



考虑这样的马尔可夫链：它的状态是图中的顶点. 在任意一个时间间隔内，该马尔可夫链从与现在状态相邻的状态中随机地选取一个新的状态. 该链的转移矩阵为

$$p(v_i,v_j)=\frac{1}{d(v_i)},v_i\sim v_j,$$

其中 $d(v_i)$ 是指与 v_i 相邻接的顶点数［如果 $d(v_i)=0$，我们令 $p(v_i,v_i)=1$］，该马尔可夫链称为图上的简单随机游动（simple random walk on the graph）. 例 3 所示的带有反射壁的对称

12 随机游动（$p=\frac{1}{2}$）即为图上简单随机游动的一个特例.

在给出转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及初始概率分布 ϕ 的条件下，我们如何确定马尔可夫链在给定时刻 n 处于状态 i 的概率？定义 n 步概率 $p_n(i,j)$ 为

$$p_n(i,j)=\mathbf{P}\{X_n=j\mid X_0=i\}=\mathbf{P}\{X_{n+k}=j\mid X_k=i\}$$

（根据时齐性可知第二个等式成立），从而

$$\mathbf{P}\{X_n=j\}=\sum_{i\in S}\phi(i)\mathbf{P}\{X_n=j\mid X_0=i\}.\tag{1.6}$$