龙门新奥赛丛书

点击金牌

冲击高考数学满分

主　编　王金战　赵维阅　杨冠夏

龍門書局
www.Longmen.com.cn

点击金牌

冲击高考数学满分

责任编辑　印　光　李致朋 / 封面设计　郭　建

ISBN 7-80191-344-2

9 787801 913449 >

ISBN 7-80191-344-2

定价：26.00元

龙门新奥赛丛书

点击金牌

冲击高考数学满分

主　　编：王金战　赵维阅　杨冠夏
副 主 编：王忠钦　伞德强　张卫兵
执行编委：韩安平　印　光

龍門書局
北京

图书在版编目(CIP)数据

冲击高考数学满分/王金战，赵维阅，杨冠夏主编．—北京：龙门书局，2004.6

(点击金牌)

ISBN 7-80191-344-2

Ⅰ．冲…　Ⅱ．①王…②赵…③杨…　Ⅲ．数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 034652 号

责任编辑：印　光　李致朋/封面设计：郭　建

龍門書局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.Longmen.com.cn

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2004 年 6 月第　一　版　　开本：787×1092　1/16

2004 年 6 月第一次印刷　　印张：21 1/4

印数：1—20 000　　字数：596 640

定　价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

每年的10月中旬，是全国高中数学联赛举行的日子，教育部的政策是：**获省市赛区一等奖者，可以保送重点大学，可以在高考中加20分。**笔者多年潜心于高考和竞赛的辅导及研究，深切感受到：**高考和竞赛日趋统一，要想在高考中获取高分，没有参加过竞赛难度的训练，几乎不可能。**

所以数学竞赛受到广大数学爱好者的重视也就不足为奇了。为此，我们在全国名校中组织了一批有着丰富教学经验的高考、竞赛双料辅导专家，把多年积累的精华整理加工、提炼升华，又通过广泛征求国家集训队选手的意见，经过他们的认真修改和补充，最终推出此套读物。此系列包括《冲击高考数学满分》和《冲击奥赛数学金牌》两册，《冲击高考数学满分》是高考大纲中主要内容的提高和升华，主要面向如下三类读者：**一类是有希望考上清华北大的学生；二类是高考数学有把握得120分并想继续向更高分冲击的数学成绩优秀者；三类是立志参加数学竞赛者。**《冲击奥赛数学金牌》覆盖了数学竞赛大纲的所有内容，**主要读者是参加全国高中数学联赛的学生。**也就是说，本系列书面向的读者群体是中学生中的优秀群体。

本系列书作者均为全国名校中的名师，他们是：

王金战　中国人民大学附属中学实验班教师、中学高级教师、全国优秀教师、北京市中青年骨干教师。有3篇论文获全国优秀论文一等奖，出版过6本教学专著。2002年所辅导的学生参加全国高中数学联赛12人获全国一等奖，占北京获一等奖人数的1/3，并有2人进入冬令营，1人进国家集训队。2003年所任班主任的班级13人保送清华大学、北京大学，6人被耶鲁大学、剑桥大学等世界名校录取，37人考入清华大学、北京大学。

李兴怀　华南师大附中特级教师、中国数学奥林匹克高级教练员、全国优秀教师、第44届国际数学奥林匹克竞赛观察员。辅导的学生在国际奥林匹克竞赛中获4金1银，连续3次获“陈省身杯”团体总分第一名。

杨冠夏　青岛二中特级教师、全国模范教师、享受国务院政府津贴的教育专家、青岛市奥校主教练。辅导的学生2人获国际奥林匹克竞赛金牌。

李庆胜　山东省实验中学实验班高级教师、中国数学奥林匹克首批高级教练员、山东省济南市拔尖人才、学科带头人、十佳优秀教育工作者。1996年作为国家队教练带队赴俄罗斯参赛，所辅导的学生在国际奥林匹克竞赛中获1枚金牌（满分），1枚银牌。

徐文兵　清华大学附属实验中学全国理科试验班教师、理学博士、第43届中国数学奥林匹克教练组成员。辅导的学生获2枚国际奥林匹克竞赛金牌（满分），近百人在各级别的数学竞赛中获奖，3人次入选数学冬令营。

伞德强　大庆实验中学实验班高级教师、中国数学奥林匹克高级教练员、全国“师德

先进个人”、黑龙江省高中数学兼职教研员、黑龙江省骨干教师。辅导的学生有 12 人获全国高中数学联赛一等奖。

张卫兵 黄冈中学实验班教师、黄冈中学奥赛主教练、全国骨干教师、湖北省优秀青年教师。辅导的学生 1 人进国家集训队,6 人获全国一等奖。

王忠钦 北京师范大学附属实验中学全国理科试验班教师。几年来所教的学生中有 60 多人次获得北京市数学竞赛一等奖,20 多人次获得全国数学联赛一等奖,曾任北京教育台第 3 课堂、中央电视台第 10 频道科学历程嘉宾主持。

赵维阅 北京市 12 中实验班高级教师、国家奥林匹克优秀教练员、市级教学能手。长期从事数学竞赛教学工作,教学经验丰富,辅导的学生多人次获得全国高中数学联赛决赛(CMO)金、银牌。

王林 青岛市奥校教练员、青岛市 25 中教师、国家奥林匹克优秀教练员。出版业务专著 12 部,辅导的学生 2 人获国际奥林匹克竞赛金牌。

孙公春 大连育明高中实验班高级教师、辽宁省全国高中数学联赛预赛命题组成员、全国高中数学联赛优秀教练员。辅导的学生 2 人进冬令营,多人获全国一等奖。

希望凝集众多专家心血的《冲击高考数学满分》和《冲击奥赛数学金牌》能成为众多学习优秀者在高考中获胜的最佳读物和参加数学竞赛斩金夺银的得力助手。

编 者

目 录

第一讲　二次函数 ……………………………………… (1)
第二讲　函数及其性质…………………………………… (12)
第三讲　数列与极限…………………………………… (25)
第四讲　递推数列……………………………………… (37)
第五讲　数列的性质…………………………………… (51)
第六讲　数学归纳法…………………………………… (65)
第七讲　三角函数……………………………………… (78)
第八讲　三角变换……………………………………… (89)
第九讲　不等式的证明 ……………………………… (102)
第十讲　解不等式 …………………………………… (114)
第十一讲　不等式的应用 …………………………… (124)
第十二讲　复数与向量 ……………………………… (132)
第十三讲　排列与组合 ……………………………… (148)
第十四讲　二项式定理 ……………………………… (159)
第十五讲　直线与平面 ……………………………… (168)
第十六讲　多面体与旋转体 ………………………… (195)
第十七讲　直线与圆 ………………………………… (215)
第十八讲　圆锥曲线 ………………………………… (229)
第十九讲　参数方程,极坐标方程…………………… (248)
第二十讲　概率与统计 ……………………………… (263)
第二十一讲　三角法 ………………………………… (275)
第二十二讲　解析法 ………………………………… (282)
第二十三讲　复数方法 ……………………………… (296)
第二十四讲　应用问题 ……………………………… (314)

第一讲 二次函数

知识网络

1. 概述

高中数学中四个二次问题，是指二次方程、二次不等式、二次三项式和二次函数，这是同一个问题的几个不同方面，其核心问题是二次函数.

2. 二次函数

一般形式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

顶点式：$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

3. 知识重点

参数的变化使二次函数问题变得十分丰富，这是二次函数常考常新的原因，而且这类问题对于学生综合运用知识有较高的能力要求；二次函数问题与其他数学问题的联系十分的密切，能与方程、不等式、三角、数列等知识进行联系。在数学方法上与之联系密切的有数形结合法、换元法、构造法以及数学归纳法等.

例题精讲

【例 1】

变换"主元"

函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$，对于 $a\in[-1,1]$时，有 $f(x)>0$ 成立，求 x 的取值范围.

解：$a\in[-1,1]$时，$f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 成立

我们将函数另看作是自变量 a 的函数，问题转化为

$a\in[-1,1]$，$f(x)=(x-2)\cdot a+x^2-4x+4>0$ 成立，求 x 的取值范围.

(ⅰ)$x-2>0$ 时，$f(x)$在 $a\in[-1,1]$上是关于自变量 a 的增函数

我们取 $a=-1$，有$-(x-2)+x^2-4x+4>0$

解得 $x<2$ 或 $x>3$，又 $x-2>0$

所以此时 x 的取值范围是$x>3$

(ⅱ)$x-2<0$ 时，解得 x 的取值范围是$x<1$

(ⅲ)$x-2=0$，即 $x=2$ 时，得 $f(2)=0$ 与 $f(x)>0$ 不符

综合(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)得 x 的取值范围是 $x<1$ 或 $x>3$.

[方法提炼] 运用变换"主元"的思想,将 $f(x)$ 看作是自变量 a 的一次函数,再利用其单调性给出关于 x 的不等式,求 x 的取值范围.

【例 2】

换元法

函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为________.

解法一: $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$

$$=x+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$

设 $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sec\theta\left(\text{其中 } 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi\leqslant\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

则 $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}\sec^2\theta-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}|\tan\theta|=\frac{1}{2}\tan\theta$

$$y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\sec\theta+\tan\theta)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

记 $u=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta},\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$

则 u 表示坐标平面上的点 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 和点 $(0,-1)$ 的连线的斜率,其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$

所以 $u\geqslant1$ 或 $-1\leqslant u<0$

从而得到 $y\geqslant2$ 或 $1\leqslant y<\frac{3}{2}$

函数的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$.

[方法提炼] 在换元时,令 $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sec\theta$,是考虑到 $\left|x-\frac{3}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$,从而 $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\geqslant0$,故给定 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$ 以后,就可以得出 $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\tan\theta$ 形式.

解法二: 由 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 得:$\sqrt{x^2-3x+2}=y-x\geqslant0$

两边平方得:$(2y-3)x=y^2-2$

从而 $y\neq\frac{3}{2}$,且 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$

由 $y-x\geqslant0$

所以 $y-\frac{y^2-2}{2y-3}\geqslant0$

即 $\frac{y^2-3y+2}{2y-3}\geqslant0$

解得 $1\leqslant y<\frac{3}{2}$ 或 $y\geqslant2$

反过来取 $y\geqslant2$, $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$

则 $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}{y-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(y+\frac{3}{2}+\frac{1}{4y-6}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(4y-6)+\frac{1}{4y-6}+3\right]\geqslant\frac{1}{2}(1+3)=2$

于是有 $x^2-3x+2\geqslant0$ 成立

取 $1\leqslant y<\frac{3}{2}$，由 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$

得 $x\leqslant1$，有 $x^2-3x+2\geqslant0$ 成立

因此所求函数的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$。

【例3】

数形结合

已知关于 t 的整系数方程 $t^2+xt+y=0$ 有实根 α、β，且 $\alpha^2+\beta^2<4$. 求 x、y 的值.

解：依题意：$\begin{cases}\alpha+\beta=-x\\ \alpha\cdot\beta=y\end{cases}$

$\alpha+\beta=-x$ $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta<4$

$\alpha\cdot\beta=y$

$0<x^2-2y<4$

$\Delta=x^2-4y\geqslant0$

由 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=x^2-2y<4$

得 $y>\frac{x^2}{2}-2$

又 $\Delta=x^2-4y\geqslant0$

$y\leqslant\frac{x^2}{4}$

引进函数 $y=\frac{x^2}{2}-2$ 和 $y=\frac{x^2}{4}$，在同一坐标系中做出两函数的图像.

则 $\begin{cases}y>\frac{x^2}{2}-2\\ y\leqslant\frac{x^2}{4}\end{cases}$ 的解在图 1-1 的阴影中.

又 x、y 为整数，可得 $(-2,1)$，$(-1,-1)$，$(-1,0)$，$(0,0)$

$(0,-1)$，$(1,-1)$，$(1,0)$，$(2,1)$ 这八个整点在阴影中.

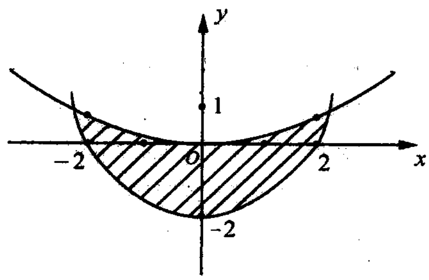

图 1-1

即 x、y 的值为：

$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$

【例4】

利用均值不等式

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\in\mathbf{N}^+$，$c\geqslant1$，$a+b+c\geqslant1$. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个小于 1 的不等正根，则 a 的最小值为　（　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

解：设方程 $ax^2+bx+c=0$ 两根为 x_1、x_2，且 $0<x_1<x_2<1$

则 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$a+b+c=f(1)=a(1-x_1)(1-x_2)\geqslant1$

$c=f(0)=ax_1x_2\geqslant1$

但 $x_1(1-x_1)\leqslant\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$x_2(1-x_2)\leqslant\left(\frac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

又 $x_1<x_2$

故 $x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)<\frac{1}{16}$

又 $a\in\mathbf{N}^+$

$ax_1x_2\cdot a(1-x_1)(1-x_2)<\frac{a^2}{16}$

于是$\frac{1}{16}a^2>1,a^2>16,a>4$

所以 $a\geqslant5$

取 $f(x)=5\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)=5x^2-\frac{11}{2}x+\frac{3}{2}$,适合条件,故 a 的最小值为 5.

[方法提炼] 将 $f(x)$写成两根式 $a(x-x_1)(x-x_2)$,并由 $f(1)\geqslant1,f(0)\geqslant1$,结合均值不等式确定 $a\geqslant5$.

【例 5】(1999·全国联赛试题)

利用判别式

已知当 $x\in[0,1]$时,不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立,试求 θ 的取值范围.

解法一:记 $f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta$

$=(1+\sin\theta+\cos\theta)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta$

当 $x\in[0,1]$时,由 $f(x)>0$ 恒成立,知

$f(0)=\sin\theta>0,f(1)=\cos\theta>0$

从而 $1+\sin\theta+\cos\theta>0$,抛物线 $f(x)$开口向上

且对称轴 $x_0=\frac{2\sin\theta+1}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}\in(0,1)$

所以欲使 $x\in[0,1],f(x)>0$ 恒成立

只要 $4(1+\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta-(2\sin\theta+1)^2>0$

解得 $4\sin\theta\cos\theta>1$,即 $\sin2\theta>\frac{1}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}<2\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

$\therefore\ k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<k\pi+\frac{5\pi}{12}\quad(k\in\mathbf{Z})$.

[方法提炼] 函数 $f(x)=(1+\sin\theta+\cos\theta)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta$ 图像开口向上,并且在 $x\in[0,1]$区间内取到顶点,所以 $f(x)$的最小值为$\frac{4ac-b^2}{4a}>0\Leftrightarrow x\in[0,1],x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立.

解法二:若对一切 $x\in[0,1]$恒有

$f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$

则 $\cos\theta=f(1)>0,\sin\theta=f(0)>0$

所以 $f(x)=x^2\cos\theta-2x(1-x)\sqrt{\sin\theta\cos\theta}+(1-x)^2\sin\theta$

$+2x(1-x)\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-x(1-x)$

$=[x\sqrt{\cos\theta}-(1-x)\sqrt{\sin\theta}]^2+x(1-x)(2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-1)$

取 $x=\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}\in(0,1)$

则 $f(x)=x(1-x)(2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-1)>0$

故$\sqrt{\sin\theta\cos\theta}>\frac{1}{2}$

所以$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

[方法提炼] 从形式上,$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$更容易提示我们对不等式的左边进行配方,利用$x\in[0,1]$不等式恒成立得到$\sqrt{\sin\theta\cos\theta}>\frac{1}{2}$,从而求得$\theta$的范围.

【例6】

已知抛物线$y=-x^2+bx+c$与抛物线$y=x^2$相切,试求该抛物线顶点的轨迹.

解:联立方程组$\begin{cases}y=-x^2+bx+c\\y=x^2\end{cases}$

得$2x^2-bx-c=0$

由两抛物线相切得:$\triangle=b^2+8c=0$,$\therefore c=-\frac{b^2}{8}$

于是函数$y=-x^2+bx+c=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{8}$

其顶点坐标为$\left(\frac{1}{2}b,\frac{1}{8}b^2\right)$,满足函数$y=\frac{1}{2}x^2$

故顶点在函数$y=\frac{1}{2}x^2$图像上.

反过来,设(x_0,y_0)是$y=\frac{1}{2}x^2$图像上的任意一点,则有$y_0=\frac{1}{2}x_0^2$

对于函数$y=-(x-x_0)^2+y_0=-x^2+2x_0x+y_0-x_0^2$

联立方程$\begin{cases}y=-x^2+2x_0x+y_0-x_0^2\\y=x^2\end{cases}$

得$2x^2-2x_0x+x_0^2-y_0=0$

$\triangle=4x_0^2-4\cdot2\cdot(x_0^2-y_0)$

$\quad=4(x_0^2-2x_0^2+2y_0)=0$

这表明$y=-x^2+2x_0x+y_0-x_0^2$与$y=x^2$相切.函数$y=-x^2+2x_0x+y_0-x_0^2$是形如$y=-x^2+bx+c$的抛物线,所以$y=-x^2+bx+c$的顶点轨迹是$y=\frac{1}{2}x^2$.

[方法提炼] 利用判别式可以判断出二次曲线的位置情况.

【例7】

利用根与系数的关系

求出所有的系数a,使得关于x的方程$x^2+(a+2002)x+a=0$的两根皆为整数.

解:设两个整数根为x_1、x_2则

$\begin{cases}x_1+x_2=-a-2002 & ①\\x_1\cdot x_2=a & ②\end{cases}$

①+② $x_1+x_2+x_1x_2=-2002$

$\therefore\ (x_1+1)(x_2+1)=-2001=-3\times23\times29$ ③

不妨设$x_1\leqslant x_2$,由③得,$x_1+1<0$,$x_2+1>0$

于是$\begin{cases}x_1+1=-1\\x_2+1=2001\end{cases}\begin{cases}-2001\\1\end{cases}\begin{cases}-3\\667\end{cases}\begin{cases}-667\\3\end{cases}\begin{cases}-23\\87\end{cases}\begin{cases}-29\\69\end{cases}\begin{cases}-69\\29\end{cases}$

所以$-a-2002=x_1+x_2$

$-a-2000=x_1+x_2+2=2000,-2000,664,-664,64,-64,40,-40$

$\therefore\quad a=-4000,0,-2664,-1336,-2064,-1936,-2040,-1960$

又$\triangle=(a+2002)^2-4a\geqslant 0$

$a^2+4000a+2002^2\geqslant 0$ ④

对于④式，其判别式$\triangle_1=4000^2-4\times 2002^2<0$

故④式恒成立

所以 a 的取值集合为

$\{-4000,0,-2664,-1336,-2064,-1936,-2040,-1960\}$.

[方法提炼] 由 x_1、x_2 为整数，$x_1+x_2=-a-2002$ 及 $x_1x_2=a$，消去 a，并由 $x_1+x_2+x_1x_2+1=(x_1+1)(x_2+1)$可逐一得 x_1、x_2.

【例 8】

选取“主元”

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取值于某个长度为 1 的区间上，记 $x=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$，$y=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2$，求 $u=y-x^2$ 的最大值.

解：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,a+1]$，$a\in\mathbf{R}$

当 $n=1$ 时，$u=0$，$u_{\max}=0$

当 $n>1$ 时，若固定 $x_2,\cdots,x_n$，则

$$u=y-x^2=\frac{1}{n}\left(x_1^2+\sum_{j=2}^{n}x_j^2\right)-\frac{1}{n^2}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}x_j\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)x_1^2-2\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{j=2}^{n}x_j\right)\cdot x_1+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}x_j^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=2}^{n}x_j\right)^2$$

u 是关于自变量$x_1(x_1\in[a,a+1])$的二次函数，二次项系数$\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}>0$

因此 $u\leqslant\max\{u(a,x_2,\cdots,x_n),u(a+1,x_2,\cdots,x_n)\}$

同理 $u\leqslant\max\limits_{x_i\in\{a,a+1\}}\left\{u(x_1,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots,n\right\}$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 s 个 a，$(n-s)$个 $a+1$，此时

$$\max_{x_i\in\{a,a+1\}}\left\{u(x_1,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots,n\right\}=\frac{1}{n}[sa^2+(n-s)(a+1)^2]-\frac{1}{n^2}[sa+(n-s)(a+1)]^2$$

$$=\frac{1}{n^2}s(n-s)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{4} & (n\text{ 为偶数})\\ \dfrac{n^2-1}{4n^2} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$$

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有$\left[\frac{n+1}{2}\right]$个取 a(或 $a+1$)，其余取 $a+1$(或 a)时等式成立，所以

$$u_{\max}=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & (n\text{ 为偶数})\\ \dfrac{n^2-1}{4n^2} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$$

[方法提炼] 在诸多未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中先固定$x_2,x_3,\cdots,x_n$，将 x_1 看作是变量，则 $u=y-x^2$ 看作是 $x_1\in[a,a+1]$上的二次函数，从而由$\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}>0$，抛物线开口向上，及 $x_1\in[a,a+1]$知，$u=y-x^2$的最大值在端点 $x_1=a$ 或$x_1=a+1$ 处取得. 然后就 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的情况类似进行讨论，从而使 u 取得最大值时$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均取a 或$a+1$.

【例 9】

数学归纳法

设 x_1、x_2 是方程 $x^2-(r+1)x+1=0$ 的两个根,其中 $r\geqslant3$ 为整数,证明:对任何自然数 n, $x_1^n+x_2^n$ 都是一个不能被 r 整除的整数.

证明: $x_1+x_2=r+1$, $x_1\cdot x_2=1$

$x_1^2+x_2^2=(r+1)^2-2=r^2+2r-1$

从而知 $n=1$, $n=2$ 时, x_1^n、x_2^n 都是不能被 r 整除的整数

假设 $n\leqslant k$ 时, $x_1^n+x_2^n$ 都是整数

则由 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}=(x_1+x_2)(x_1^k+x_2^k)-x_1x_2(x_1^{k-1}+x_2^{k-1})$

$=(r+1)(x_1^k+x_2^k)-(x_1^{k-1}+x_2^{k-1})$

知 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ 也是整数,故知对一切整数 n

$x_1^n+x_2^n$ 都是整数

再证明 $x_1^n+x_2^n$ 都不能被 r 整除

假设 $n=k$, $x_1^k+x_2^k$ 不能被 r 整除,那么

$x_1^{k+2}+x_2^{k+2}=(r+1)(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})-(x_1^k+x_2^k)$　①

$x_1^{k+3}+x_2^{k+3}=(r+1)(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})-(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})$　②

①代入②: $x_1^{k+3}+x_2^{k+3}=(r+1)^2(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})-(r+1)(x_1^k+x_2^k)-(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})$

$=(r^2+2r)(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})-r(x_1^k+x_2^k)-(x_1^k+x_2^k)$.

从而得出 $x_1^{k+3}+x_2^{k+3}$ 也不能被 r 整除

又 $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$

$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

$=(r+1)[(r+1)^2-3]=(r+1)(r^2+2r-2)$

知 $x_1^3+x_2^3$ 也不能被 r 整除

从而由 $n=1,2,3$, $x_1^n+x_2^n$ 不能被 r 整除,以及若 $x_1^k+x_2^k$ 不能被 r 整除,则 $x_1^{k+3}+x_2^{k+3}$ 也不能被 r 整除,知对于一切 $n\in\mathbf{N}$, $x_1^n+x_2^n$ 不能被 r 整除.

[方法提炼]　本题在形式上是二次方程根的问题,实际上解题过程中两次使用了数学归纳法.在证明整数性时,使用了第二数学归纳法,在证明整除性上使用大跨度数学归纳法,从 $n=k$ 到 $n=k+3$ 的推理亦可考虑 $x_1^{k+3}+x_2^{k+3}=(r+1)(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})-(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})$

$=r(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})+(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})-(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})$

$=r(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})+(r+1)(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})-(x_1^k+x_2^k)-(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})$

$=r(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})+r(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})-(x_1^k+x_2^k)$,得到 $x_2^{k+3}+x_2^{k+3}$ 与 $-(x_1^k+x_2^k)$ 关于 r 同余的结果.

【例 10】

化归二次函数

已知 a,b,c,d,e 是满足 $a+b+c+d+e=8$,且 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ 的实数,试确定 e 的最大值.

解: 设 $f(x)=(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2+(x+d)^2$

$=4x^2+2(a+b+c+d)x+(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$=4x^2+2(8-e)x+16-e^2$

由 $f(x)$ 的二次系数为正数且 $f(x)\geqslant0$ 可知

$\triangle=4(8-e)^2-16(16-e^2)\leqslant0$

解得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$

所以 e 的最大值为$\frac{16}{5}$

此时 $a=b=c=d=\frac{6}{5}$，e 取得最大值$\frac{16}{5}$.

点击高考　链接竞赛

四个二次问题是中学数学重点内容之一，由于其自身内容丰富，与其他数学知识联系广泛，以及问题变化多样等原因，因而倍受命题者关注.

【例 1】（1993·全国高考试题）

已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实根 α、β，证明：

(1)如果 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，那么 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$

(2)如果 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$，那么 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$

解：(1)记 $f(x)=x^2+ax+b$，其图像为开口向上的抛物线. 如图 1-2 由 $x^2+ax+b=0$ 的两根 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$ 得

$$\begin{cases}f(2)=4+2a+b>0\\ f(-2)=4-2a+b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a<4+b\\ 2a<4+b\end{cases}\Rightarrow 2|a|<4+b$$

又 $|b|=|\alpha\cdot\beta|<2\times2=4$.

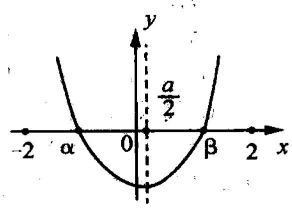

图 1-2

(2)反过来由 $|b|=|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|<4$ 及 $2|a|<4+b$，得函数 $y=x^2+ax+b$ 的对称轴满足：$|x|=|-\frac{a}{2}|<1+\frac{b}{4}\leqslant1+\frac{|b|}{4}<2$

又 $f(2)=4+2a+b\geqslant4+b-2|a|>0$

$f(-2)=4-2a+b\geqslant4+b-2|a|>0$

因为 $f(x)=x^2+ax+b$ 的图像是开口向上的抛物线

所以 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$.

[方法提炼] 本题的解法是利用数形结合的数学思想.

【例 2】（1996·全国高考试题）

已知 a,b,c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$. 当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$|f(x)|\leqslant1$.

(1)证明：$|c|\leqslant1$；

(2)证明：当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$|g(x)|\leqslant2$；

(3)设 $a>0$，当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$g(x)$的最大值为 2，求 $f(x)$.

证明：(1) $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时 $|f(x)|\leqslant1$

取 $x=0$ 得 $|f(0)|=|c|\leqslant1$.

(2)任意 $x\in[-1,1]$，由 $|ax^2+bx+c|\leqslant1$

得 $|ax^2+bx|-|c|\leqslant1$

所以 $|ax^2+bx|\leqslant1+|c|\leqslant2$

由 $x=1$ 时，$|a+b|\leqslant2$ 及 $x=-1$ 时，$|a-b|=|-a+b|\leqslant2$

故 $x\in[-1,1]$，$|ax+b|\leqslant\max\{|a+b|,|-a+b|\leqslant2\}$

即 $|g(x)|\leqslant2$.

解：(3) $a>0$，$-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$g(x)_{\max}=2$

故 $a+b=2$

取 $x=1$，$|f(1)|=|a+b+c|=|2+c|\leqslant 1$，所以 $-3\leqslant c\leqslant -1$

又 $|c|\leqslant 1$，$-1\leqslant c\leqslant 1$，$\therefore c=-1$，$f(x)=ax^2+bx-1$

$f(x)$图像与 y 轴交于$(0,-1)$点

又 $a>0$ 及 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$|f(x)|\leqslant 1$，由数形结合法知

$y=f(x)$关于 $x=0$ 对称

$\therefore b=0$，$a=2-b=2$

$\therefore f(x)=2x^2-1$.

【例 3】（2002·联赛试题）

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$满足条件：

(1)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$

(2)当 $x\in(0,2)$时，$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$

(3)$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0

求最大的 $m(m>1)$，使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$就有 $f(x+t)\leqslant x$.

解：由 $f(x-4)=f(2-x)$知函数图像关于直线 $x=\frac{x_0-4+2-x_0}{2}=-1$ 对称

所以 $-\frac{b}{2a}=-1$，得 $b=2a$　①

由(3)$x=-1$ 时，$y=0$ 得：$a-b+c=0$　②

又由(1)$f(1)\geqslant 1$

由(2)$f(1)\leqslant 1$，知 $f(1)=1$

$\therefore$　$a+b+c=1$　③

由此解得 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

假设存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$

取 $x=1$，有 $f(t+1)\leqslant 1$，即

$\frac{1}{4}(t+1)^2+\frac{1}{2}(t+1)+\frac{1}{4}\leqslant 1$，解得 $-4\leqslant t\leqslant 0$

对固定的 $t\in[-4,0]$，取 $x=m$，有 $f(t+m)\leqslant m$

即 $\frac{1}{4}(t+m)^2+\frac{1}{2}(t+m)+\frac{1}{4}\leqslant m$，化简有

$m^2-2(1-t)m+t^2+2t+1\leqslant 0$

解得 $1-t-\sqrt{-4t}\leqslant m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$

故 $m\leqslant 1-t-\sqrt{-4t}\leqslant 1-(-4)+\sqrt{-4\cdot(-4)}=9$

当 $t=-4$ 时，对任意的 $x\in[1,9]$恒有

$$f(x-4)-x=\frac{1}{4}(x^2+10x+9)=\frac{1}{4}(x-1)(x-9)\leqslant 0$$

所以 m 的最大值为 9.

点击金牌

点击金牌

能力训练

1.(1997·上海竞赛试题)已知定义在闭区间$[0,3]$上的函数$f(x)=kx^2-2kx$的最大值为3,则实数k的值是______.

2.(2002·上海竞赛试题)若对$|x|\leqslant 1$的一切x,$t+1>(t^2-4)x$恒成立,则t的取值范围是______.

3.设函数$y^2=x^2+(a+1)^2+|x+a-1|$的最小值大于5,求实数a的取值范围.

4.(1998·全国联赛试题)设函数$f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$,对于给定的负数a,有一个最大的正数$l(a)$,使得在整个区间$[0,l(a)]$上,不等式$|f(x)|\leqslant 5$都成立.

问:a为何值时$l(a)$最大,求出这个最大的$l(a)$并证明你的结论.

5.计算$(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2$在$0<u<\sqrt{2}$,$v>0$上的极小值.

6.设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{Z})$.已知方程$f(x)=0$在区间$(-2,0)$内有两个不相等的实数根,且对任意$x\in\mathbf{R}$,恒有$4x+2\leqslant f(x)\leqslant 8x^2+12x+4$.求$a,b,c$.

7.二次方程$ax^2+x+1=0$的两根的模都小于2,求实数a的取值范围.

8.已知实系数二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$,有$0<|c|\leqslant k$,且当$x=\cos\theta+i\sin\theta$(θ为任意实数)时,$|f(x)|\leqslant k$.求证对$r>1$,有$|f(rx)|\leqslant(2r^2-1)k$.

9.函数$f(u)=u^2+au+b-2$,其中$u=x+\dfrac{1}{x}(x\in\mathbf{R},x\neq 0)$.若$a$、$b$是使$f(u)=0$至少有一实根的实数,求$a^2+b^2$的最小值.

答案与提示

1.分$k>0$、$k<0$两种情况讨论.$k=1$或-3.

2.$\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}<t<\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

3.$a\in\left(-\infty,-\dfrac{1+\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$.

4.$a=-8$时,$l(a)$取最大值$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

5.$(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2$可视为$p_1(u,\sqrt{2-u^2})$到$p_2\left(v,\dfrac{9}{v}\right)$的距离的平方,利用数形结合法可得最小值为8.

6.解:设两根α、$\beta\in(-2,0)$,$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$,$f(0)f(-2)>0$,故$a^2(-\alpha)(2+\alpha)(-\beta)\cdot(2+\beta)>0$,由$f(-2)=(4a-2b+c)\in\mathbf{Z}$,$f(0)=c\in\mathbf{Z}$

$\therefore\ f(-2)$、$f(0)\geqslant 1$

又 $-\alpha\cdot(2+\alpha)\leqslant\left(\dfrac{-\alpha+2+\alpha}{2}\right)^2=1$,$-\beta(2+\beta)\leqslant 1$

从而$a^2>1$,$a>1$或$a<-1$

又 $f(-\frac{1}{2})=0$,$c=\dfrac{2b-a}{4}$

$$\therefore\begin{cases}ax^2+(b-4)x+\dfrac{2b-a-8}{4}\geqslant 0 & ①\\ (8-a)x^2+(12-b)x+\dfrac{16+a-2b}{4}\geqslant 0 & ②\end{cases}\text{恒成立}$$

解得$\begin{cases}1<a\leqslant 8\\ a+b+4=0\end{cases}$