毛纲源考研数学辅导系列

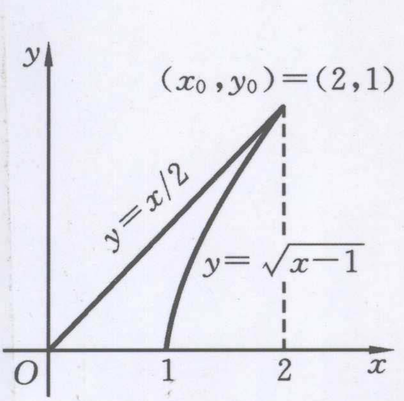
本书在手 考研无忧

考研数学（二）

客观题简化求解技巧分类归纳

（高等数学）

毛纲源 编著



◇经典题型 紧扣大纲 帮你高效复习

◇方法新颖 技巧独特 助君考研成功

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(二)
客观题简化求解技巧分类归纳
(高等数学)

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书以历年考研数学真题中的客观题(选择题和填空题)为例,归纳、总结这类题型的简化求解方法与技巧.这些方法与技巧不仅有助于快速、准确地求解客观题,而且对证明题和计算题的求解也能发挥重要的作用.读者阅读本书,必定会提高复习效率和应试能力.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(二)客观题简化求解技巧分类归纳(高等数学)/毛纲源 编著.—武汉:华中科技大学出版社,2010年6月

ISBN 978-7-5609-6187-3

Ⅰ.考… Ⅱ.毛… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第080769号

考研数学(二)客观题简化求解技巧分类归纳
(高等数学)

毛纲源 编著

策划编辑:王汉江(14458270@qq.com)

责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群

责任校对:祝　菲　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司

印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16　印张:13.75　字数:358 000

版次:2010年6月第1版　印次:2010年6月第1次印刷　定价:26.80元

ISBN 978-7-5609-6187-3/O·532

前　　言

考研数学试题中的客观题(填空题和选择题)是考研数学试题的重要组成部分.它侧重考查考生对数学概念、数学定理(命题)的理解和掌握程度,并测试考生能否利用这些基本数学概念、数学定理(命题)进行简单推理.由于客观题的试题数量在试卷中所占比例较大(接近试题总题量的三分之二),且其总分超过整个试卷总分的三分之一,如何快速准确地做好客观题,是考生为取得好成绩渴望得到解决的问题,这也是本书出版的目的.

本书为考研数学(二)中的高等数学部分,按照考纲的知识块进行分类,分为若干个章节.每一章节(考纲知识块)又分为若干个小节(考点),结合历年来考研数学(二)的客观题(这些客观题已全部在本书中使用)及各个名校的有关试题对所考核的知识点(考点)的简化求解方法与技巧进行分类归纳与总结.为使这些简化求解方法与技巧和常规套路的求解方法进行比较,不少例题给出多种求解方法,其中"解一"一般为简化求解方法.为使考生掌握和应用这些简化求解方法和技巧,作者根据不同的知识点(考点)将其求解方法归纳整理成相应命题,便于考生应用,其中不少命题是作者教学经验的总结.这些命题可在理解的基础上当做重要结论来记忆和应用.这些命题的证明,不少渗透在相关题的解法上(常为"解二").它们是必须掌握的核心知识点.

本书中的分类简化求解方法与技巧不仅有助于快速准确地求解客观题,而且对解答题(计算题、证明题及应用题)的求解也能发挥重要作用.

为了把每个知识块复习好,本书以知识点(考点)为线索将同一知识点(考点)的填空题、选择题结合在一起进行讲解.这样做的目的是使读者熟练掌握有关客观题简化求解方法与技巧,从而帮助考生快速、准确地求解客观题.读者使用本书时,最好能自己先想再做,不要急于看解答,然后与书中求解方法比较."注意"中的一些题外话也值得读者细心揣摩.

考生的数学成绩历来相差较大,这说明数学学科的考试,选拔性更加突出,常听到"得数学者得天下"的说法,这种说法虽不完全正确,但却充分说明考研中数学成绩的重要性.近年来考生的失误并不是因为缺乏灵活的思维、敏锐的感觉,而恰恰是对考纲中规定的基础知识、基本理论的掌握还存在某些缺陷,甚至有所偏度所致.希望考生按考纲要求系统、全面、踏实地复习.

真诚希望本书能陪伴读者度过难忘的备考复习时光,能够迅速提高应试能力,取得优异的考研成绩,圆考研成功梦,圆考研考入名校梦.这是作者最大的心愿.

本书也可供大专院校在校学生学习高等数学时,阶段复习和期末复习使用.

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例子,在此特向有关作者致谢.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者指正.

编　者

北京师范大学珠海分校商学部

2010 年 4 月

题 型 说 明

——客观题常用的解题方法与技巧简介

硕士研究生入学统一考试数学试题的题型有填空题、选择题和解答题(包括计算题、应用题和证明题)三种,其中填空题和选择题由于答案唯一,评分不受主观因素影响,能较客观地反映考生水平,常称为客观题.

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题(填空题、选择题)在研究生入学考试中占60分左右,约占总分的40%.从目前情况看,考生在客观题部分得分率较低,正是因为这部分得分率较低,总分就很难上去.其原因主要有两方面:一方面是考生做计算题时准确率低,基本概念和基本理论没有吃透,或计算能力较差;另一方面是考生对求解客观题的方法与技巧掌握得不够熟练,不能运用自如.

填空题绝大部分是计算题,但这里的计算题不像一般的计算题,它只看结果不看过程.因而做填空题时必须非常小心,因为一旦答案出错就是零分.若计算的准确率不高,填空题容易失分.填空题也有不少是概念题,主要考查考生对一些最基本的概念、性质、公式掌握和运用的熟练程度及快捷、准确的运算能力,以及正确的判断能力和推理能力.为此,做填空题时要根据题目的特点充分利用各种方法和技巧简化计算.首先,要充分利用本书所归纳总结出的有关命题的结论,迅速、准确地写出答案;如果没有可直接利用的结论,那只好从题设条件出发,通过分析、推理和计算推导出有关结果.

单项选择题(即四个选项中有且仅有一个选项是正确的,以下简称选择题)是研究生入学考试试卷的重要组成部分.选择题大部分考查基本概念和基本理论.如果基本概念和基本理论没有吃透,选择题部分也很容易失分.另一方面,同一道题出成客观题后,它往往有更巧妙、更简单的方法求解.当然,客观题用我们平时求解主观题的方法虽然也能求解,但这种一般方法和简单方法从解题时间上有时相差几倍甚至几十倍.因此,要提高客观题部分的得分率,一方面要提高做计算题的准确率,吃透基本概念和基本理论;另外一个很重要的方面就是要掌握简化求解客观题的方法和技巧.

如何快速、准确地做好选择题,从而为后面的计算、论证和求解应用题留下较充裕的时间,这是考生能否取得高分的关键.为此,首先要理解和熟悉本书各章节所介绍的命题的结论,然后充分利用这些结论判断四个选项中哪一个成立.如果没有现成的结论可用,则可采用下述各法确定选项.

法一 直选法.

即利用命题、定理、定义等直接判断或验证某选项正确,则其余选项必不正确(不必验证).

法二 排错法.

即验证其中三个选项不正确,则剩下的一个选项必正确(也不必验证).常用赋值法找出错误选项.这里的赋值法是指利用满足题设条件的“特殊值”通过推理或验证找出错误选项.

对于题干中“有……必有……”或“当……时,必有……”或“对任意……必有……”或题干中所给函数为抽象函数时,常用赋值的方法找出反例,找出错误选项,确定正确选项.

例1 设函数 $f(x)$ 处处可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

解 上例具有赋值法的明显特征"当……时，必有……"，可采用反例排除. 取 $f(x)=x$ 时，则 $f'(x)=1$. 而

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty,\quad 但\quad \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty} 1=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,\quad 但\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} 1=1.$$

可见(A)、(C)不正确. 再取 $f(x)=x^2$，则 $f'(x)=2x$. 故 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$，但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$，可见(B)也不正确. 仅(D)入选.

法三 推演法.

它是指从题设条件出发运用有关概念、定理或命题经推理演算得出正确选项.

对于与基本概念或其性质有关的选择题，或题中的备选项为"数值"形式的项，或题干条件给出的是某种运算形式的项时，常用推演法确定正确选项.

例 2 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$在点 x_0 处的增量与微分的差 $\Delta y-\mathrm{d}y$ 是(　　).

(A) 比 Δx 高阶的无穷小，比 Δy 低阶的无穷小　　(B) 比 $\Delta x,\Delta y$ 都低阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小，比 Δy 高阶的无穷小　　(D) 比 $\Delta x,\Delta y$ 都高阶的无穷小

解 由 $f(x)$在点 x_0 处可导及微分的定义知

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\quad \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,\quad \Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x),$$

故
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

即 $\Delta y-\mathrm{d}y$ 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$高阶的无穷小. 又由 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq 0$ 知，Δy 与 $\Delta x(\Delta x\to 0)$是同阶无穷小. 再由无穷小阶的传递性知，$\Delta y-\mathrm{d}y$ 也是比 Δy 高阶的无穷小. 仅(D)入选.

法四 图示法.

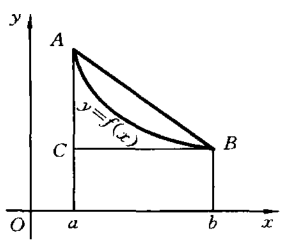
它是指根据题设条件作出有关问题的几何图形，然后借助几何图形的直观性得到正确选项，或将四个选项的关系画出图形，看哪一种关系符合题设条件，从而确定正确选项.

对于有明显几何意义的题设条件如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等或题设给出图形面积、立体体积或在概率论中给出两事件的关系或概率关系等均可试用图示法求解.

例 3 设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=[(b-a)/2][f(a)+f(b)]$，则(　　).

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$　　(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

解 由 $f'(x)<0$，$f''(x)>0$ 知 $f(x)$的图形在区间$[a,b]$上单调减小凹向，作出其图形，如下图所示. 连接弦 AB，过点 B 作平行于 x 轴的直线与过点 A 的垂线交于 C. 显然，梯形 $ABba$ 的面积为 S_3，矩形 $CBba$ 的面积为 S_2，曲边梯形 $ABba$ 的面积为 S_1，则 $S_2<S_1<S_3$. 仅(B)入选.



法五 代入法.

将备选项逐一代入题设条件，验证哪个选项正确.

该法适用于备选项为具体"数值"形式的项，且题干中又含有验证条件，而验证又比较简单.

目　录

第 1 章　函数、极限、连续 ………………………………………… (1)

1.1　函数及其性质 ………………………………………… (1)

1.1.1　求复合函数的表达式 ………………………………………… (1)

1.1.2　判别函数的有界性 ………………………………………… (2)

1.1.3　判别函数的奇偶性 ………………………………………… (6)

1.1.4　奇偶函数常用性质的应用 ………………………………………… (8)

1.1.5　判别函数的单调性 ………………………………………… (10)

1.1.6　判别函数的周期性 ………………………………………… (11)

1.2　极限的求法 ………………………………………… (12)

1.2.1　数列极限存在性的判别与数列极限的求法 ………………………………………… (12)

1.2.2　用等价无穷小代换求极限 ………………………………………… (15)

1.2.3　用泰勒公式求极限 ………………………………………… (18)

1.2.4　求未定型极限 ………………………………………… (19)

1.2.5　求含函数形式特殊的函数极限 ………………………………………… (23)

1.2.6　比较或确定无穷小的阶 ………………………………………… (26)

1.2.7　确定极限式中的待定常数 ………………………………………… (29)

1.2.8　已知函数极限值,求与此极限有关的另一函数的极限 ………………………………………… (34)

1.3　函数的连续性 ………………………………………… (35)

1.3.1　讨论函数的连续性 ………………………………………… (35)

1.3.2　讨论用极限形式给出的函数的连续性、可导性 ………………………………………… (38)

1.3.3　求间断点及其类型 ………………………………………… (39)

1.3.4　利用连续性确定待定常数 ………………………………………… (42)

1.3.5　讨论方程的实根 ………………………………………… (44)

习题 1 ………………………………………… (46)

第 2 章　一元函数微分学 ………………………………………… (50)

2.1　导数定义及可导的充要条件的应用 ………………………………………… (50)

2.1.1　用导数定义判别函数在某点的可导性 ………………………………………… (50)

2.1.2　利用特殊的分式极限式判别函数在某点可导 ………………………………………… (53)

2.1.3　判别含绝对值的函数在某点的可导性 ………………………………………… (54)

2.1.4　判别一类特殊的分段函数在分段点的可导性 ………………………………………… (57)

2.1.5　利用导数定义求分式函数的极限 ………………………………………… (58)

2.1.6　利用导数定义求函数的导数或导数值 ………………………………………… (59)

2.1.7　利用导数定义或导数存在的充要条件求函数的待定常数 ………………………………………… (60)

2.2　计算函数的导数 ………………………………………… (61)

2.2.1　计算复合函数的导数 ………………………………………… (61)

2.2.2　讨论分段函数在分段点处的可导数性及导函数的连续性 ………………………………………… (62)

2.2.3　求反函数的导数 ………………………………………… (65)

2.2.4 求隐函数的导数 …… (65)
2.2.5 求由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 …… (67)
2.2.6 计算高阶导数 …… (68)
2.3 微分的概念及其计算 …… (70)
2.3.1 微分的概念 …… (70)
2.3.2 微分的计算 …… (71)
2.3.3 求解与函数增量的线性主部有关的问题 …… (72)
2.4 微分中值定理的综合应用 …… (72)
2.4.1 利用微分中值定理的条件与结论求解客观题 …… (72)
2.4.2 求解与函数差值有关的问题 …… (75)
2.4.3 讨论导函数的变化趋势与函数的变化趋势的关系 …… (75)
2.5 讨论函数的性态 …… (77)
2.5.1 讨论函数的单调性并求其单调区间 …… (77)
2.5.2 判别某点是否为函数的极值点 …… (78)
2.5.3 讨论曲线的凹凸性并求其凹凸区间与拐点 …… (82)
2.5.4 求解与函数极值、最值有关的问题 …… (85)
2.5.5 求曲线的渐近线 …… (87)
2.6 一元函数微分学的几何应用 …… (90)
2.6.1 求过曲线上一已知点的切(法)线方程 …… (90)
2.6.2 过不在曲线上的已知点,求该曲线的切(法)线方程 …… (92)
2.6.3 求解与两曲线相切的有关问题 …… (93)
2.6.4 求解与切(法)线在坐标轴上的截距有关的问题 …… (94)
2.6.5 计算曲率、曲率半径与曲率圆 …… (94)
习题 2 …… (96)
第 3 章　一元函数积分学 …… (100)
3.1 原函数与不定积分 …… (100)
3.1.1 原函数与不定积分的概念、性质及其相互关系 …… (100)
3.1.2 求分段函数的积分 …… (103)
3.2 计算不定积分 …… (105)
3.2.1 用凑微分法(第一类换元积分法)计算不定积分 …… (105)
3.2.2 用第二类换元积分法计算积分 …… (106)
3.2.3 用分部积分法计算不定积分 …… (108)
3.2.4 用分项积分法计算不定积分 …… (109)
3.3 利用定积分定义求积和式的极限 …… (110)
3.3.1 求有一因式或能化为一因式为 $1/n$ 的积和式的数列极限 …… (110)
3.3.2 求需将其放缩后能用定积分定义求和的积和式的极限 …… (111)
3.4 利用定积分性质计算定积分 …… (112)
3.4.1 利用定积分的几何意义计算定积分 …… (112)
3.4.2 计算对称区间上的定积分 …… (113)
3.4.3 计算周期函数的定积分 …… (114)
3.4.4 利用定积分的常用计算公式求定积分 …… (115)

3.4.5　被积函数含函数导数或含已知其导数的函数,其积分的算法 …………… (117)
3.4.6　求解含积分值为常数的函数方程 …………… (118)
3.5　用换元法计算定积分 …………… (119)
3.5.1　计算需改变被积函数的定积分 …………… (119)
3.5.2　计算需同时改变积分限和被积函数的定积分 …………… (121)
3.6　计算几类需分子区间积分的定积分 …………… (122)
3.6.1　计算分段函数的定积分 …………… (122)
3.6.2　求含绝对值的被积函数的定积分 …………… (122)
3.6.3　求被积函数含最值符号 max 或 min 的定积分 …………… (123)
3.6.4　计算被积函数为偶次算术方根的定积分 …………… (123)
3.6.5　计算含取整函数的定积分 …………… (124)
3.7　比较和估计定积分的大小 …………… (124)
3.8　求解与变限积分有关的问题 …………… (126)
3.8.1　讨论变限积分函数的性态 …………… (127)
3.8.2　求变限积分的导数 …………… (128)
3.8.3　求含变限积分的极限 …………… (129)
3.8.4　求解含有变限积分等式的有关问题 …………… (132)
3.9　反常积分 …………… (133)
3.9.1　判别反常积分的敛散性 …………… (133)
3.9.2　计算反常积分 …………… (135)
3.10　定积分的应用 …………… (139)
3.10.1　已知曲线,求其所围平面图形的面积 …………… (139)
3.10.2　求旋转体体积 …………… (141)
3.10.3　求旋转体的侧面积(表面积) …………… (143)
3.10.4　求平面曲线的弧长 …………… (143)
3.10.5　求解平面图形面积、旋转体体积与极值、最值相结合的问题 …………… (144)
3.10.6　求函数在区间上的平均值 …………… (145)
3.10.7　定积分的物理学中的简单应用 …………… (145)
习题 3 …………… (146)
第 4 章　多元函数微分学及其应用 …………… (150)
4.1　讨论函数 $f(x,y)$ 在某点的可偏导性及可微性 …………… (150)
4.1.1　二元函数极限、连续、可偏导及可微之间的关系 …………… (150)
4.1.2　求解 x(或 y)的一元函数 $f(x,y_0)$(或 $f(x_0,y)$)的有关问题 …………… (153)
4.2　计算多元函数的偏导数和全微分 …………… (154)
4.2.1　利用隐函数存在定理确定隐函数 …………… (154)
4.2.2　计算多元显函数的偏导数 …………… (154)
4.2.3　计算抽象复合函数的偏导数 …………… (156)
4.2.4　求隐函数的偏导数 …………… (157)
4.2.5　简化计算偏导数的若干方法 …………… (160)
4.2.6　利用变量代换将方程变形 …………… (162)
4.2.7　多元函数的全微分 …………… (162)
4.2.8　利用全微分的必要条件求待定常数 …………… (164)

4.3 求二元函数的极值和最值 …… (165)
4.3.1 求解无条件极值问题 …… (165)
4.3.2 求解条件极值问题 …… (166)
4.3.3 求函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域上的最大值 …… (167)
习题 4 …… (169)
第 5 章 二重积分 …… (171)
5.1 将二重积分化为累(二)次积分 …… (171)
5.1.1 化为直角坐标系下的累次积分 …… (171)
5.1.2 化为极坐标系下的累次积分 …… (172)
5.2 交换二重积分的积分次序或转换其坐标系 …… (173)
5.2.1 交换二(累)次积分的积分次序 …… (173)
5.2.2 转换坐标系 …… (175)
5.3 计算二重积分 …… (177)
5.3.1 计算累次(二次)积分 …… (177)
5.3.2 利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算 …… (178)
5.3.3 用转换坐标系计算二重积分 …… (180)
5.3.4 求需分块计算的二重积分 …… (182)
5.3.5 比较二重积分值的大小 …… (183)
习题 5 …… (185)
第 6 章 常微分方程 …… (187)
6.1 求解一阶微分方程 …… (187)
6.1.1 求解可分离变量方程 …… (187)
6.1.2 求解齐次微分方程 …… (188)
6.1.3 求解一阶线性微分方程 …… (188)
6.1.4 求解可化为 6.1.3 节中基本类型的一阶线性微分方程 …… (191)
6.2 求解可降阶的高阶微分方程 …… (193)
6.2.1 求解形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的高阶微分方程 …… (193)
6.2.2 求解形如 $y''=f(x,y')$ 的微分方程 …… (193)
6.2.3 求解形如 $y''=f(y,y')$ 的微分方程 …… (194)
6.3 求解二阶微分方程 …… (195)
6.3.1 利用二阶线性微分方程解的性质和结构求解有关问题 …… (195)
6.3.2 求解高阶常系数齐次线性方程 …… (196)
6.3.3 确定高阶常系数非齐次线性方程的特解形式 …… (197)
6.3.4 求解二阶常系数非齐次线性微分方程 …… (199)
6.3.5 用代换化简微分方程,并求其通解 …… (201)
6.3.6 已知其解,反求该微分方程 …… (202)
习题 6 …… (204)
习题答案或提示 …… (206)

第 1 章　函数、极限、连续

1.1　函数及其性质

1.1.1　求复合函数的表达式

求复合函数表达式可按复合函数的定义求之. 已知 $f(x)$，$g(x)$，求 $f[g(x)]$（或$g[f(x)]$）.

常用代入法求之：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替. 此法适用于初等函数的复合，也适用于分段函数的复合. 特别当 $f(x)$，$g(x)$均为分段函数且其分段点相同时，用代入法可简化求解，得到$f[g(x)]$（或$g[f(x)]$）的表达式. 求 $f[g(x)]$时，值得特别注意的是 $g(x)$的值域与$f(x)$的定义域的对应关系.

当 $f(x)$，$g(x)$均为分段函数但其分段点不同时，仍可用代入法求解. 求解时要抓住最外层函数定义域的各个区间段，与内层函数值域的对应关系列出自变量所满足的对应不等式组. 通过求解此联立不等式组即可求出相应的定义域.

此法也适用于初等函数与分段函数的复合.

例 1[2001 年 2]*　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$则 $f\{f[f(x)]\}=($　　$)$.

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解　由题设得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0 & |f(x)|>1;\end{cases} \quad ①$$

$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}1, & |f[f(x)]|\leqslant 1,\\ 0 & |f[f(x)]|>1.\end{cases} \quad ②$$

而由 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$可知，$|f(x)|\leqslant 1$. 再由式①知，$f[f(x)]=1$，即$|f[f(x)]|=1$. 由式②知，$f\{f[f(x)]\}=1$. 仅(B)入选.

例 2[1992 年 2]　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$　①则(　　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

解　仅(D)入选. 用代入法求之. 将式①中所有 x 都换为$-x$，即将$-x$ 代入式①得到

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2\\ (-x)^2+(-x)\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

---

* 例 1[2001 年 2]表示该例(或该习题)为 2001 年数学二的考题. 下同.

例 3[1997 年 2]　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$为(　　).

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解　所给函数 $f(x)$、$g(x)$均为分段函数，且其分段点相同，只需用代入法即可简化求解.

当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$，则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$，故

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$ 仅(D)入选.

例 4　$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<4,\\ x, & 4\leqslant x\leqslant 6,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$______.

解　用代入法求之. $f[g(x)]=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & 0\leqslant g(x)<4,\\ g(x), & 4\leqslant g(x)\leqslant 6.\end{cases}$

(1) 当 $g(x)=x^2$ 时，$f[g(x)]=\sqrt{x^2}$. 由 $\begin{cases}0\leqslant x^2<4\\ 0\leqslant x<2\end{cases}$ 推知 $0\leqslant x<2$，故

$$f[g(x)]=x\quad(0\leqslant x<2).$$

当 $g(x)=2+x$ 时，因 $\begin{cases}0\leqslant 2+x<4\\ 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 无解，故 $f[g(x)]$无意义.

(2) 当 $g(x)=x^2$ 时，$f[g(x)]=g(x)=x^2$. 由于 $\begin{cases}4\leqslant x^2\leqslant 6\\ 0\leqslant x<2\end{cases}$ 无解，故 $f[g(x)]$无意义.

当 $g(x)=2+x$ 时，由 $\begin{cases}4\leqslant 2+x\leqslant 6\\ 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 解得 $2\leqslant x\leqslant 4$，则 $f[g(x)]=g(x)=2+x\quad(2\leqslant x\leqslant 4)$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

1.1.2　判别函数的有界性

定义 1.1.1　如果存在正数 M，使得对任一 $x\in I$(I 表示区间)，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$在区间 I 上无界.

由上述定义易知，函数的有界性是相对于某个区间而言的.

1. 判别函数有界

除用上述定义外，还常利用下述诸命题判别之.

命题 1.1.1　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上单调增加(或单调减少)，则 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界.

命题 1.1.2　(1) 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界.

(2) 如果 $f(x)$在区间(a,b)内连续且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则 $f(x)$在区间(a,b)内有界.

(3) 如果在自变量 x 的某一变化过程中变量 y 有极限，则变量 y 是有界变量.

(4) 如果导函数 $f'(x)$在区间(a,b)内有界，则 $f(x)$在区间(a,b)内有界.

例 5　函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间(　　)内有界.

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

解 因 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^-}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=+\infty.$$

由命题1.1.7知,$f(x)$在区间$(0,1)$及$(1,2)$,$(2,3)$内均无界.由于下述极限存在,即

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin2}{4},\quad \lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=-\frac{\sin3}{18},$$

又 $f(x)$在区间$(-1,0)$内连续,故由命题1.1.2(2)知,$f(x)$在区间$(-1,0)$内有界.仅(A)入选.

例6 设 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内连续,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(常数)是 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内有界的( ).

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义知,存在 $x_0>a$,使当 $x\in[x_0,+\infty)$时,$f(x)$有界(见命题1.1.2(3)).又 $f(x)$在区间$[a,x_0]$上连续,由命题1.1.2(1)知 $f(x)$在区间$[a,x_0]$上有界.因而 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内有界,但若$f(x)$在区间$[a,+\infty)$内有界,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不一定存在.例如,$f(x)=\sin x$有界,但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在,因而仅(A)入选.

例7 $f(x)=xe^{-x^2}(2-\cos x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内是( ).

(A) 有界的偶函数 (B) 无界的偶函数 (C) 有界的奇函数 (D) 无界的奇函数

解 在区间$(-\infty,+\infty)$内,x 是奇函数,$e^{-x^2}(2-\cos x)$是偶函数,故其乘积 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内是奇函数.

又因$|2-\cos x|\leqslant3$,从而 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内是否有界取决于 $g(x)=xe^{-x^2}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是否有界.因 $g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=0$ 及命题1.1.2(2)知,$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内有界.因而,$f(x)$是区间$(-\infty,+\infty)$内有界的奇函数.仅(C)入选.

2. 判别函数无界

判别函数无界时,要注意无界函数与无穷大的联系与区别:在一定的变化趋势下,$f(x)$为无穷大量,则 $f(x)$必无界.反之,若 $f(x)$在某个区间上无界,不一定为无穷大量.

可用下述诸命题判别函数无界.

命题1.1.3 若在自变量的某变化过程中,函数表示式中含有"∞"因子而无确定的"0"因子,则此函数必无界,但不一定为无穷大量.

命题1.1.4 多个函数乘积组成的函数,如果其中至少有一个函数在区间 I 上无界,而又无确定的"0"因子函数,则该函数乘积一般在该区间上无界,但不一定为无穷大量.

上述命题是判别(识别)无界函数的一种直观方法.

命题1.1.5 如果 $x_0\in(a,b)$,而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$,则 $f(x)$在区间(a,b)内无界.

命题 1.1.6 有界变量与无穷大量之积为无界变量,但不一定是无穷大量.

命题 1.1.7 (1) 函数 $f(x)$在区间 I 上无界的充要条件是存在一个数列$\{x_n\}(x_n\in I)$,使$\{f(x_n)\}$为无穷大数列;(2) 数列$\{x_n\}$无界的充要条件是存在无穷大子列.

由上命题易知,为证函数或数列无界,只需找出一个无穷大量子列.

又由无穷大量的定义知,为证函数或数列不是无穷大量,只需找出一个收敛子列,因而为证函数或数列无界但又不是无穷大量,只需同时找出一个无穷大子列和一个收敛子列.

例 8[1987 年 2] 函数 $f(x)=x\sin x$( ).

(A) 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界　　(B) 当 $x\to\infty$时为无穷大

(C) 在区间$(-\infty,+\infty)$内无界　　(D) 当 $x\to\infty$时有有限极限

解一 由于当 $x\to\infty$时,$f(x)$中含有"∞"因子 x,而无确定的零因子.由命题 1.1.3 知,$f(x)$无界.仅(C)入选.

解二 取 $x_n=2n\pi$,则当 $n\to\infty$时,有 $f(2n\pi)=2n\pi\sin(2n\pi)=0\to0\ (n\to\infty)$.因无穷大量要求在相应变化过程中变量的绝对值一致地无限增大,故 $f(x)$不是无穷大量.

再取 $x_n=2n\pi+\pi/2$,则当 $n\to+\infty$时,$f(2n\pi+\pi/2)=2n\pi+\pi/2\to+\infty$.由命题1.1.7(1)知,$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内无界.仅(C)入选.

例 9[1993 年 2] 当 $x\to0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是( ).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界的,但不是无穷小　　(D) 无界的,但不是无穷大

解一 因$\lim\limits_{x\to0}(1/x^2)=\infty$,$1/x^2$ 为无穷大量,$\sin(1/x)$为有界变量,由命题 1.1.6 知,$(1/x^2)\sin(1/x)$为无界变量但不是无穷大量.仅(D)入选.

解二 因 $x\to0$ 时,$1/x^2\to\infty$,即 $1/x^2$ 为无穷小量,而又无确定的零因子,由命题 1.1.3 即知$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$为无界变量,但不是无穷大.仅(D)入选.

例 10 设 $x_n=\begin{cases}(n^2+\sqrt{n})/n & (n\text{ 为奇数}),\\ 1/n & (n\text{ 为偶数}),\end{cases}$则当 $n\to\infty$时,数列$\{x_n\}$是( ).

(A) 无穷大量　(B) 无穷小量　(C) 有界变量　(D) 无界变量

解 因 n 为奇数时,$x_n=(n^2+\sqrt{n})/n=n+1/\sqrt{n}\to+\infty\ (n\to+\infty)$;$n$ 为偶数时,$x_n=1/n\to0\ (n\to+\infty)$,故当 $n\to\infty$时,数列$\{x_n\}$既不是无穷大量,也不是无穷小量和有界变量,而是无界变量.仅(D)入选.

例 11 下列函数中在区间$[1,+\infty)$内无界的是( ).

(A) $f(x)=x^2\sin(1/x^2)$　　(B) $f(x)=\sin x^2+(\ln^2x)/\sqrt{x}$

(C) $f(x)=x\cos\sqrt{x}+x^2\mathrm{e}^{-x}$　　(D) $f(x)=\arctan(1/x)/x^2$

解一 找出函数 $f(x)$的一个无穷大数列,利用命题 1.1.7(1)判别之.为此取数列$\{x_n\}=\{n^2\pi^2\}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.对于(C)中函数有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2\pi^2\cos n\pi+n^4\pi^4\mathrm{e}^{-n^2\pi^2})=\infty.$$

由命题 1.1.7(1)知,(C)中 $f(x)$在$[1,+\infty)$上无界.

解二 (A)、(B)、(D)中三函数都有界.因 $x\to+\infty$时,它们都有极限,由命题 1.1.2(3)知,它

们都有界. 事实上, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)\Big/\frac{1}{x^2}=1$,(A)中函数在区间$[1,+\infty)$内有界. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x/\sqrt{x}=0$,(B)中函数在区间$[1,+\infty)$内有界. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\arctan(1/x)/x^2]=0$,(D)中函数在区间$[1,+\infty)$内有界. 于是仅(C)入选.

例 12　下列叙述中正确的是(　　).

(A) 如果 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内无界,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

(B) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内无界

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$　　(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}(1/f(x))=\infty$

解一　由命题 1.1.5 知,仅(B)入选.

解二　因由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$知,对于任意 $M>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)|>M$. 由此可知,$f(x)$在点 x_0 的某邻域内无界. 仅(B)入选.

3. 利用函数的无界性判别函数极限的存在性

常用下述命题判别之.

命题 1.1.8　(1) 若 $\lim f(x)$存在,$\lim g(x)$不存在,则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$一定不存在,但$\lim f(x)g(x)$和 $\lim[f(x)/g(x)]$可能存在,也可能不存在.

(2) 若 $\lim f(x)=A$ ($A\neq 0$ 为常数),$\lim g(x)=\infty$,则 $\lim f(x)g(x)=\infty$;若$\lim f(x)=0$,$\lim g(x)=\infty$,则极限 $\lim f(x)g(x)$属于"$0\cdot\infty$"未定式,它可能存在,也可能不存在.

(3) 若 $f(x)$有界,且 $\lim g(x)=\infty$,则 $\lim[f(x)+g(x)]=\infty$,$\lim f(x)g(x)$为无界变量,但不一定为∞(见命题 1.1.6).

(4) 若 $\lim f(x)=+\infty$ (或 $\lim f(x)=-\infty$),$\lim g(x)=+\infty$ (或 $\lim g(x)=-\infty$),则$\lim[f(x)+g(x)]=+\infty$ (或$-\infty$),且$\lim f(x)g(x)=+\infty$ (或$-\infty$).

(5) 任意两个非同号的无穷大量之和不一定为无穷大量.

在上述极限中省略了自变量的趋向过程. 它可以是 $x\to x_0$ 或 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$ 或$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,$x\to\infty$,但要求 $\lim f(x)$,$\lim g(x)$及 $\lim f(x)g(x)$在相同的趋向下讨论.

例 13[2003 年 2]　设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解一　$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属于"$1\cdot\infty$"型未定式,由命题 1.1.8(2)知,b_nc_n 无界,其极限不存在. 仅(D)入选.

解二　用排错法求之. 因极限存在与数列前面有限项的大小无关,立即排除(A)、(B). 而极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$为"$0\cdot\infty$"型未定式,该极限可能存在,也可能不存在(见命题 1.1.8(2)).

取 $a_n=2/n$,$b_n=1$,$c_n=n/2$ ($n=1,2,\cdots$),则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$. (C)也不正确. 仅(D)入选.

例 14　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则下列命题中不正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=+\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=+\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+h(x)]=+\infty$　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=+\infty$

解一 由命题 1.1.8(4)知,(A)、(D)正确.由命题 1.1.8(3)知,(C)也正确,因而(B)不正确.仅(B)入选.

解二 当 $A=0$ 时,$h(x)(x\to x_0)$为无穷小量,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)$为未定式(无穷小量与无穷大量之积 $0\cdot\infty$),因而(B)不正确(见命题 1.1.8(2)).仅(B)入选.

例 15 设$\{x_n\}$为无界数列,则下述结论中正确的是( ).

(A) 若$\{y_n\}$为有界数列,则$\{x_ny_n\}$必无界　　(B) 若$\{y_n\}$为有界数列,则$\{x_n+y_n\}$必无界

(C) 若$\{y_n\}$为无界数列,则$\{x_ny_n\}$必无界　　(D) 若$\{y_n\}$为无界数列,则$\{x_n+y_n\}$必无界

解一 由命题 1.1.8(3)知,仅(B)入选.

解二 显然(D)是错误的.下面举例说明(A)与(C)也是错误的.关于(C)项,可令

$$x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数},\\ 0, & n\text{ 为奇数};\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ -n, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

对于选项(A),可将 y_n 的奇数项改为 1 即可验证.故仅(B)入选.

解三 证明(B)是正确的.可采用反证法证之.假定 $z_n=x_n+y_n$ 是有界的,则 $x_n=z_n-y_n$ 为两个有界数列之差,也应该有界,这与假设矛盾,故(B)正确.

1.1.3 判别函数的奇偶性

首先要注意的是,函数的奇偶性是相对于对称区间而言的.如果函数的定义域关于原点不对称,则该函数无奇偶性可言.

判别函数的奇偶性常用函数奇偶性定义及函数运算性质(下述诸命题)判别之.

命题 1.1.9 (1) 奇函数乘(除)偶函数=奇函数;(2) 奇函数乘(除)奇函数=偶函数;(3) 偶函数乘(除)偶函数=偶函数;(4) 奇函数加(减)奇函数=奇函数;(5) 偶函数加(减)偶函数=偶函数;(6) 不恒为零的偶(奇)函数加减不恒为零的奇(偶)函数得非奇非偶函数;(7) 偶(奇)函数乘以非奇非偶函数,一般不再是偶(奇)函数.

命题 1.1.10 设 $f(x)$为定义在区间$[-a,a]$ (a 可以为无穷)上非常数的任意函数,则

(1) $f(x)+f(-x)$为偶函数;　　(2) $f(x)-f(-x)$(或 $f(-x)-f(x)$)为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数,之差为奇函数.

命题 1.1.11 设 $f(x)$是连续的奇(偶)函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶(奇)函数,即连续奇(偶)函数的一个原函数为偶(奇)函数.

命题 1.1.12 (1) 若函数 $y=f(t)$,$t=g(x)$的奇偶性不同,则其复合函数 $y=f[g(x)]$必为偶函数;若奇偶性相同,则其复合函数 $y=f[g(x)]$与外层函数 $f(x)$具有相同的奇偶性.

(2) 当 f 不具有奇偶性时,一般 $f(g_0)$,$g_0(f)$,$g_e(f)$,$f(f)$及 $f\cdot f=f^2$ 不具有奇偶性,但 $f(g_e)$为偶函数,其中 g_0 为奇函数,g_e 为偶函数.

命题 1.1.13 (1) 函数 $f(x)=(a^{kx}\pm1)/(a^{kx}\mp1)$,其中 $a>0,a\neq1,k\neq0$;(2) 函数 $\ln(\sec x\pm\tan x)$;(3) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;(4) $\ln\dfrac{a+x}{a-x}$;(5) $\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ ($a>0$ 常数)均为奇函数.

例 16[1999 年] 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则( ).

(A) 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必为偶函数　　(B) 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必为奇函数

(C) 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必为周期函数

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必为单调增函数

解一 由命题 3.1.1(5)知,仅(A)入选.

解二 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可表示成 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,则

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(x)\mathrm{d}t+C\xlongequal{u=-t}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,$f(-x)=-f(x)$.因而,有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数.仅(A)入选.

注意 $f(x)$ 的原函数常取特殊形式的原函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其运算比较方便.如取$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ $(a\neq 0)$,推导 $F(-x)=F(x)$ 会不太方便.

例 17[2005 年 2] 设 $F(x)$是连续函数 $f(x)$的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充要条件是 N",则必有( ).

(A) $F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数 (B) $F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数

(C) $F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数 (D) $F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数

解 任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$为偶函数时,有 $F(-x)=F(x)$,于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$,即$-f(-x)=f(x)$,亦即$f(-x)=-f(x)$,可见 $f(x)$为奇函数;反之,若 $f(x)$为奇函数,由命题 1.1.11 知,$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,而任意常数 C 显然为偶函数,故$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数.仅(A)入选.

例 18[1987 年 2] $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$ $(-\infty<x<+\infty)$是( ).

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 显然$|x\sin x|$,$\mathrm{e}^{\cos x}$为偶函数,由命题 1.1.9(3)知,其乘积 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$ $(-\infty<x<+\infty)$也为偶函数.仅(D)入选.

例 19 函数 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,其中常数 $a>0$,且 $a\neq1$,函数 $f(x)$为奇函数,则 $F(x)$为( ).

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数 (D) $F(x)$的奇偶性与 a 有关

解 仅(B)入选.因常数 $a\neq1$,且 $a>0$,由命题 1.1.13(1)知,

$$\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{1-a^x}{a^x+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{a^x-1}{a^x+1}$$

为奇函数($k=1$),又 $f(x)$也为奇函数,再由命题 1.1.9(2)知 $F(x)$为偶函数.

例 20 若 $f(x)$是奇函数,则( )也为奇函数.

(A) $f(x)+C$ $(C\neq0)$ (B) $f(-x)+C$ $(C\neq0)$ (C) $f(x)+f(|x|)$ (D) $f[f(-x)]$

解一 视 $f[f(-x)]$为一复合函数,而 f 与 f 的奇偶性相同,同为奇函数,由命题 1.1.12 知 $f[f(-x)]$的奇偶性与外层函数 f 相同,因而为奇函数.仅(D)入选.

解二 用奇函数的定义求之.因 $f(x)$为奇函数,故 $f[f(-x)]=f\{-[f(x)]\}$.同理,因 f 为奇函数,所以 $f\{-[f(x)]\}=-f[f(x)]$.因而 $f[f(-x)]=-f[f(x)]$,故$f[f(-x)]$为奇函数.

例 21[2002 年 2] 设函数 $f(x)$连续,则在下列函数中,必为偶函数的是