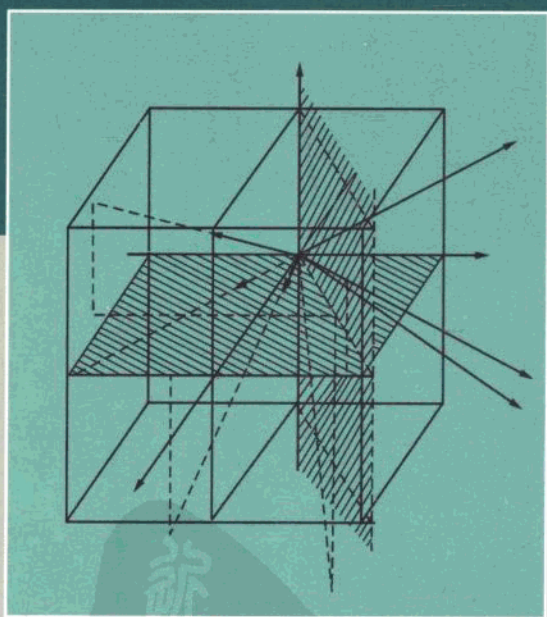


# 工程结构上界地震力 理论及其应用

王前信 著



地震出版社

PDG

## 内 容 提 要

多种实际情况下,结构物刚度分布难以确知,常规抗震分析无法进行,本书提出基于人工振型求极方法给出上界解,可完成偏于安全的设计。书中详细论述主、次上界等新的概念,分别对刚度分布不明静定结构、超静定结构和刚度分布部分不明的超静定结构提供上界解法。此法也可给出刚度分布已知结构的上界解,以校核常规解的界限。本书为抗震结构动力学增添了新的内容,可供土一建一水及力学专业高校师生、科研人员和工程师学习和参考。

## 序 一

欣悉王前信教授的新作《工程结构上界地震力理论及其应用》一书即将由地震出版社出版。由于我们对他在这一方向上的研究工作早有所知，又有机会先睹为快，感到有必要根据我们的体会向读者推荐。

王前信教授潜心研究的课题起源于工程实践问题，凭借他广博的学识已将其提升到理论的高度，殊为难得。正当大家对许多刚度分布不明和难以确知的结构如何进行抗震计算和采取防御措施感到茫然和束手无策之时，王前信教授推出了一种新的解决方案。他从工程师熟知的基本概念出发，深入浅出地建立了完整的求解体系，通过运用人工振型求极值的方法或积函数极值法，给出了各类结构地震反应的上界。精细的分析表明，在多数情况下，所得上界是偏于安全的，但又不十分保守，这正是工程师和业主期盼的结果。目前在求解结构参数不确定性和未确知性问题中，人们往往都求助于模糊、随机和系统识别等理论和方法，王前信教授等人的工作可以说是别开生面，颇具新意和启发性。他还进而发现，本书中发展的上界解法只要稍加变化，也能适用于刚度分布确知的结构；经过一些数学处理，就能计算出工程结构中任意截面或结点的地震效应上限。这一结果有助于了解和掌握结构各部位，特别是关键和薄弱部位的安全储备和可能出现的问题。这些都希望能引起同行学者和工程师的重视。

王前信教授的这本著作是他长期在地震工程领域中耕耘的成果之一，也是王前信教授继《工程结构地震力理论》、《悬吊体系的地震力》和《工程抗震三字经》等著作之后，奉献给读者的又一精品。这些作品从不同的方面反映了王前信教授在我国地震工程研究和实践中的特殊贡献。

我们和王前信教授都是在刘恢先教授倡导下，投身到地震工程研究中的，对王前信教授知之甚深。他在我国地震工程研究中发挥的先行作用和严谨的科学精神一向受到同仁们的普遍尊重。相信读者从他的书中也能领悟到某些治学之道。我们深切希望本书的出版能使王前信教授的学术成果和治学精神能对地震工程的进一步研究和实践起到应有的促进作用。

中国科学院院士

胡聿贤

中国科学院院士

周锡元

2000年10月

## 序 二

王前信教授早年师从我国著名学者钱令希先生与刘恢先先生，得天独厚，受过良好熏陶。他本人孜孜不倦，敬业开拓，勇于创新，锲而不舍，为我国地震工程的建设和发展做了不少有价值的工作，给我留下了深刻印象。

最近，我以十分欣喜的心情读到了王前信教授完成的新作《工程结构上界地震力理论及其应用》。书中表现出了一些独到的见解。常规的结构动力学的求解方法为广大读者所熟悉。但是，在工程实际中，我们常常要面对为数不少的刚度分布不明或难以确知的结构物，常规的抗震分析方法难以适用。此书独辟蹊径，提出了确定结构地震响应上限的分析方法，并为此建立了非常规的上界地震力理论，为这一颇为棘手问题的解决开辟了一条新的途径。采用的分析技巧是建立在按特别定义的积函数的极值条件确立的人工模态基础之上。人工模态自成体系，构成一套完整的正交函数序列。作者还为此设计了一种矢量图，将主、次上界和等效静力解同时展现进行对比，便于理解和应用。书中分别对刚度分布不明的静定结构、超静定结构以及刚度分布部分不明的超静定结构给出了上界解的计算方法。同时对于悬吊体系和挡水结构也研究了地震响应的上界解。此外，还将积函数推广应用于高层建筑的抗风分析中，取得了成功，显示出此理论有广阔的应用范围。相信读者将可从书中获得不少启发，开拓出新的应用领域，并将理论加以发展。

我和王前信教授相交多年，深知他治学严谨。我对他的新作面世表示祝贺，并向广大读者推荐。

中国科学院院士



2000.6.5  
于北京

## 前 言

在多种实际情况下，工程结构的刚度分布难以确知或者可能任意变化，常规抗震分析没有办法进行。作为一种“没有办法”的办法，我们提出基于人工振型求极值的方法以确定地震反应的上界，这样就可完成偏于安全的抗震设计或验算。

研究是从连续拱式结构开始的，随后又研究了具有不同特点的许多种结构。起初求得的极值结果只是“主上界”和相应的“主贡献（人工）振型”，随后一步构成次上界、次贡献振型以及无贡献振型等新的概念。研究过程中探查出主上界、次上界与等效静力解之间简单的和差关系。研究结果或以数值和图形表达，或以精练的理论（包络）公式示出。很多数例表明，偏于安全的上界解并非保守结果。

本课题的初衷是为刚度分布不明结构寻求解法，但不断的研究进展启示我们，此上界解法也适用于刚度分布确知的结构，成为一种独特的校核常规计算结果的方法\*。

研究中还设计出一种矢量图，将主、次上界和等效静力解（以及无贡献零解、第一、第二固有振型解、……）同时展现做对比，希图产生直观效果以助理解。

原先未曾想到，在这“没有办法”的办法中，竟还有许多可做的文章。希望有兴趣的同行们也来做这方面的文章。

愿与研究合作者陆鸣研究员、张艳红博士、柳春光博士和老友王孝信研究员等共同感受此书出版所带来的喜悦。

书中疏漏和谬误难免，敬希读者不吝指正。

地震科学联合基金会资助本书出版，谨致深切感谢。

---

\* 借影响矩阵中的一行子阵，可计算出某截面或结点地震反应的界限。

# 目 录

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 第一章 绪论 .....                  | (1)   |
| 第一节 抗震分析方法的发展回顾 .....         | (1)   |
| 第二节 抗震分析上界解法的研究进展 .....       | (2)   |
| 第二章 上界地震力初探 .....             | (4)   |
| 第一节 二质点体系 .....               | (4)   |
| 第二节 三质点体系 .....               | (10)  |
| 第三节 小结 .....                  | (15)  |
| 第三章 结构地震反应上界解的矢量图表示 .....     | (16)  |
| 第一节 平面矢量图 .....               | (16)  |
| 第二节 立体矢量图 .....               | (19)  |
| 第三节 小结 .....                  | (21)  |
| 第四章 静定模型的上界地震力 .....          | (23)  |
| 第一节 竖直伸臂式结构 (水平地面运动作用下) ..... | (23)  |
| 第二节 曲折伸臂式结构 .....             | (36)  |
| 第三节 坡顶建筑框架 .....              | (44)  |
| 第四节 竖直伸臂式结构 (摇摆地面运动作用下) ..... | (47)  |
| 第五章 超静定模型的上界地震力 .....         | (54)  |
| 第一节 不规则二层房屋 .....             | (54)  |
| 第二节 高低层建筑框架 .....             | (58)  |
| 第三节 二铰拱式结构 .....              | (61)  |
| 第四节 多跨坡顶框架 .....              | (66)  |
| 第五节 连续抛物线拱 .....              | (73)  |
| 第六节 连续圆拱 .....                | (82)  |
| 第七节 空间曲折管线支架 .....            | (86)  |
| 第八节 无铰圆拱 .....                | (99)  |
| 第六章 积函数极值法 .....              | (107) |
| 第一节 地震位移反应上界 .....            | (107) |

|            |                        |              |
|------------|------------------------|--------------|
| 第二节        | 地震内力反应上界               | (109)        |
| 第三节        | 常规方法与上界解法的比较           | (110)        |
| 第四节        | 上界地震内力理论解的工程实用性        | (110)        |
| <b>第七章</b> | <b>悬吊体系和挡水结构的上界地震力</b> | <b>(114)</b> |
| 第一节        | 输电塔——大垂度电缆体系           | (114)        |
| 第二节        | 挡水伸臂结构(工程应用计算)         | (122)        |
| 第三节        | 挡水伸臂结构(解析推演)           | (133)        |
| <b>附录</b>  | <b>高层建筑结构风振力上限识别</b>   | <b>(140)</b> |
| <b>符号表</b> |                        | <b>(148)</b> |
| <b>后 记</b> |                        | <b>(151)</b> |

# 第一章 绪 论

## 第一节 抗震分析方法的发展回顾

地震是危害人类的几种主要天灾之一。强震（剧烈的地动）直接致人伤亡的事例极为罕见，而强震造成各种结构物（建筑物和构筑物）损坏、破坏以至毁坏的事例却是极多的。结构物的破坏会造成人员伤亡和财产损失，结构物的毁坏会造成大量人员伤亡和严重财产损失。

为防止或减轻强震造成的大灾害，20 世纪以来，世界主要震区国家的科学工作者进行了巨量的调查和研究工作。概略地讲，地震学家和地质学家研究地震，特别是强震的发生规律，工程地震学家观测并探查强震对于结构物的作用方式，工程学家调查和研究强震破坏结构物的机理并总结出抗御强震的经验，力学家测定各种结构物的动力特性并研究抗震设计计算方法。对于与地震有关的多方面的工程学问题，已取得相当深入的研究结果，这些成果汇集而成一门新兴学科——地震工程学。

工程结构的抗震分析方法，作为地震工程学的一个重要组成部分，它的发展经历了几个阶段，权威学者们划分为三个阶段。

静力法是第一个阶段（19 世纪末、20 世纪初）。此法比较简单地认为设计地震荷载是结构物各部分的质量与地震加速度的乘积。从力学原理来评判，此法仅适用于绝对刚性（极刚）的结构物。随后，吸取震害经验并参考结构模型试验结果，对各部分地震荷载的分布做了一些修正，形成修正的静力法。修正的静力法初步隐含对结构物固有的动力特性的考虑。

反应谱法是第二个阶段（20 世纪前期、中期）。Biot 从弹性体系动力学的基本原理出发，基于振型分解的途径，为建立结构抗震分析的系统性方法做了推演，地震反应谱曲线的力学概念由是萌生；Housner 精选若干有代表性的强震加速度记录并做处理，十分有效地变革了当时计算反应谱的技术，最早完成一大批反应谱曲线的计算，并将这些结果引入设计规范应用，于是理论成果与工程实际相结合，反应谱法的完整架构体系得以形成。时至今日，反应谱法经过不断改进，更加完善，正广泛应用于世界各国的工程设计中。

动力法是第三个阶段（20 世纪中、后期）。反应谱法的应用涉及振型组合问题，对于一般结构，已研究出几种可供选择的组合方案。但对于特别的结构，比如特高的长（自振）周期结构，振型组合方案还需深入研究，而且反应谱的长周期区段计算结果也嫌不足，因而就应当根据有代表性的地震加速度时程记录，用先进计算工具（直接积分、联立求解）确定结构时程反应以完成抗震设计。这是动力法的概略内容。使用动力法必须合理选取地震记录，记录数目不能太少，计算工作量大，过程较复杂，但精确性较反应谱法好，且易于进一步从弹性阶段延伸以求解非弹性阶段的反应。

抗震分析方法的理论基础是结构动力学，一系列理论研究进展汇集而成体系，习称为地震力理论。

## 第二节 抗震分析上界解法的研究进展

通过以上发展历史的回顾,可以认为,工程结构的抗震分析方法经过百余年的不断改进与充实,目前在理论上已相当完善了。

然而,在一些情况下,结构物的抗震计算结果往往与实际观测结果还不十分符合,有时甚至出入较大,主要原因不在于计算方法不够完善,而是由于力学计算模型未能完好地如实反映工程实际所致。

约在 60~80 年代,工程结构的系统识别研究甚为活跃。根据对真实结构或模型结构的某些动力特性和振动反应的实测数据,用数理方法推算结构模型中的某些参数,从而建立符合实际的分析模型。这方面的研究进展是显著的。不过,系统识别方法的实际应用需要一定的财力和人力,除重要结构和典型建筑外,一般结构难以引用此方法以确定分析模型。

工程实际情况下,结构分析模型的质量分布一般是分明的,易于点算查清。但在许多情况下,结构模型的刚度分布难以清楚确定,可以举出一些刚度分布不明的例子:

- (1) 处于初步设计阶段的拟建结构;
- (2) 需要进行抗震验算,但设计图纸已散失的老旧建筑;
- (3) 使用期间内部改建的结构物;
- (4) 构造十分复杂的建筑;
- (5) 其他。

对于此类结构,我们只能设法计算最不利的刚度分布情况下的地震反应以完成抗震设计。

连续拱是一种复杂结构,在刚度分布不明情况下,为求解墩顶的地震反应,对其力学表达式(参与因子函数与振型反应之积——积函数)用极值条件求极值,于是得到反应的上界(上限)值,以及相应的最不利变形状态。这样,在 80 年代末,初次解得主上界地震反应,形成了“积函数极值法”的雏形(第五章第四节)。这是抗震分析上界解法研究的起步。

随后 10 年有余,积函数极值法的研究继续深入,理论上渐趋完善。研究结果示明,积函数的极值条件一般给出两个解,较大者为主上界值,较小者为次上界值。相应的两个变形状态形似第一和第二固有振型,互相正交,但一般不同于第一和第二固有振型。此二变形曲线可供抗震设计计算用,它们是对地震反应有贡献的振型,故称之为主、次贡献振型。高振型可基于主、次贡献振型,根据正交条件计算确定,结果不惟一,都无贡献,故称之为无贡献振型。贡献振型和无贡献振型都是人工的振型,它们共同组成一套完整的正交函数序列。

近年的研究探明了主上界值、次上界值和等效静力解(拟静解)之间的和差关系;还导得了水平和摇摆基底运动下伸臂结构地震剪力和地震弯矩的理论上界解。

对于几种不同的结构模型,如刚度分布不明的静定模型(第四章)、刚度分布不明的超静定模型和刚度分布部分不明的超静定模型(第五章),分别提出了不同的求上界解的方法。

对于刚度分布已知的超静定模型,虽然常规方法可解得地震反应,但应特别说明,也可用积函数极值法求得上界解(第五章第一、二、五节),这样就从不同的另一途径完成可信赖的校核。

对于悬吊体系和挡水结构,也研究了地震反应的上界解(第七章)。

还将积函数极值法推广应用于高层建筑的抗风分析,取得了成功(参见附录)。

为了能对地震反应的上界解了解得更具体形象化，试将地震反应用矢量表示（第三章）。借助平面和空间矢量图，从几何角度理解上界解，这可能是一条便捷的途径，易于对上界解形成较清晰的概念。

在抗震文献中常出现的常规解，工程设计人员是很熟悉的。但近年才出现在文献中的上界解，一般就未必了解了。为此，将积函数极值法的求解步骤从理论上做了总结，并与常规方法的计算步骤做了对比（第六章）。

所有以上所述抗震分析上界解法所涉及的结构动力学理论部分的汇集，我们称为上界地震力理论。

## 第二章 上界地震力初探

### 第一节 二质点体系

#### § 2.1.1 自由振动

图 2.1.1(a)所示为一二质点体系(二自由度、剪切型结构),概略代表一幢普通的二层楼房。这是一个十分简单的体系。

现以  $m$  表示质量,以  $k$  表示层间刚度。根据力的平衡条件,可以写出自由振动方程如下:

$$m_2 \omega^2 u_2 = k_2(u_2 - u_1) \quad (2.1.1a)$$

$$m_1 \omega^2 u_1 = k_2(u_1 - u_2) + k_1 u_1 \quad (2.1.1b)$$

式中,  $u$  为水平向位移(幅值);  $\omega$  为自振(圆)频率。

底层的层间刚度通常大于上层,若取  $k_1 = 2k$ ,  $k_2 = k$  和  $m_1 = m_2 = m$ , 则有

$$m \omega^2 u_2 = k(u_2 - u_1) \quad (2.1.2a)$$

$$m \omega^2 u_1 = k(u_1 - u_2) + 2k u_1 \quad (2.1.2b)$$

令

$$\lambda = \frac{m \omega^2}{k} \quad (2.1.3)$$

将式(2.1.3)引入式(2.1.2)中,并进行整理,可得

$$u_1 + (\lambda - 1)u_2 = 0 \quad (2.1.4a)$$

$$(\lambda - 3)u_1 + u_2 = 0 \quad (2.1.4b)$$

自式(2.1.4)写出特征方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1.5)$$

或

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \quad (2.1.6)$$

可解得

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2} = 0.586 \quad (2.1.7a)$$

$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} = 3.414 \quad (2.1.7b)$$

于是,自式(2.1.3)得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 k}{m}} = 0.766 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1.8a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 k}{m}} = 1.848 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1.8b)$$

将式(2.1.7)代入式(2.1.4),可确定振型位移:

$$u_1^{(1)} = (1 - \lambda_1)u_2^{(1)} = \frac{u_2^{(1)}}{3 - \lambda_1} = 0.414u_2^{(1)} \quad (2.1.9a)$$

$$u_1^{(2)} = (1 - \lambda_2)u_2^{(2)} = \frac{u_2^{(2)}}{3 - \lambda_2} = -2.414u_2^{(2)} \quad (2.1.9b)$$

式 (2.1.9) 的结果示于图 2.1.1(b) 中。这两个振型的正交关系为

$$m_1 u_1^{(1)} u_1^{(2)} + m_2 u_2^{(1)} u_2^{(2)} = m \times 0.414 \times (-2.414) + m \times 1 \times 1 = 0 \quad (2.1.10)$$

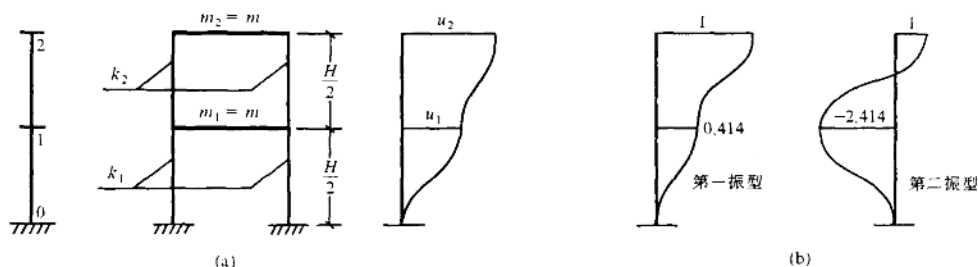


图 2.1.1 二质点体系

(a) 计算模型; (b) 振型 ( $k_1 = 2k_2$ )

## § 2.1.2 地震反应

水平地面运动作用下, 集中质点  $m_i$  上的第  $r$  振型地震荷载为

$$S_{ir} = \eta_r u_i^{(r)} m_i A_r \quad (2.1.11)$$

式中,  $i$  为质点序号;  $r$  为振型序号;  $A$  为地震加速度反应谱;  $\eta$  为振型参与因数,

$$\eta_r = \frac{\sum_i m_i u_i^{(r)}}{\sum_i m_i (u_i^{(r)})^2} \quad (2.1.12)$$

于是计算可得

$$\eta_1 = \frac{m \times 0.414 + m \times 1}{m \times 0.414^2 + m \times 1^2} = 1.207 \quad (2.1.13a)$$

$$\eta_2 = \frac{m \times (-2.414) + m \times 1}{m \times (-2.414)^2 + m \times 1^2} = -0.207 \quad (2.1.13b)$$

地震荷载为

$$S_2^{(1)} = 1.207 \times 1 \times mA_1 = 1.207mA_1 \quad (2.1.14a)$$

$$S_1^{(1)} = 1.207 \times 0.414 \times mA_1 = 0.5mA_1 \quad (2.1.14b)$$

$$S_2^{(2)} = -0.207 \times 1 \times mA_2 = -0.207mA_2 \quad (2.1.14c)$$

$$S_1^{(2)} = -0.207 \times (-2.414) \times mA_2 = 0.5mA_2 \quad (2.1.14d)$$

式 (2.1.14) 的结果如图 2.1.2(a) 所示。

由地震荷载确定地震剪力为

$$Q_{1-2}^{(1)} = 1.207mA_1 \quad (2.1.15a)$$

$$Q_{0-1}^{(1)} = 1.207mA_1 + 0.5mA_1 = 1.707mA_1 \quad (2.1.15b)$$

$$Q_{1-2}^{(2)} = -0.207mA_2 \quad (2.1.15c)$$

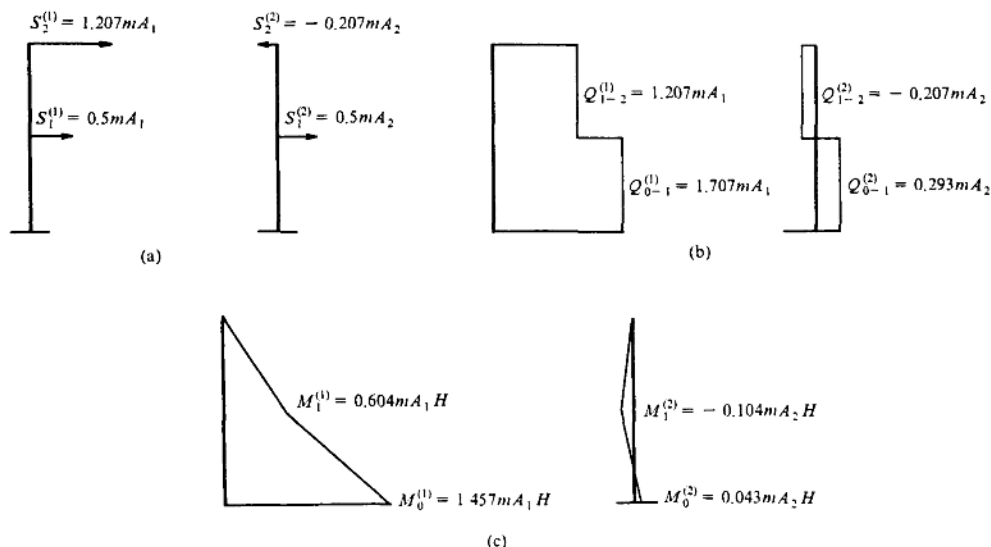


图 2.1.2 二质点体系地震荷载、地震剪力及地震弯矩图 ( $k_1 = 2k_2$ )

(a) 地震荷载图; (b) 地震剪力图; (c) 地震弯矩图

$$Q_{0-1}^{(2)} = -0.207mA_2 + 0.5mA_2 = 0.293mA_2 \quad (2.1.15d)$$

进一步设  $m_1$  的高程为  $\frac{H}{2}$ ,  $m_2$  的高程为  $H$ , 可算得地震弯矩:

$$M_1^{(1)} = 1.207mA_1 \cdot \frac{H}{2} = 0.604mA_1H \quad (2.1.16a)$$

$$M_0^{(1)} = 1.207mA_1 \cdot H + 0.5mA_1 \cdot \frac{H}{2} = 1.457mA_1H \quad (2.1.16b)$$

$$M_1^{(2)} = -0.207mA_2 \cdot \frac{H}{2} = -0.104mA_2H \quad (2.1.16c)$$

$$M_0^{(2)} = -0.207mA_2H + 0.5mA_2 \cdot \frac{H}{2} = 0.043mA_2H \quad (2.1.16d)$$

地震剪力图和地震弯矩图如图 2.1.2(b)和图 2.1.2(c)所示。

这些都是常规抗震计算方法的内容。

### § 2.1.3 上界地震反应

以上给出了  $k_1/k_2=2$  时的地震反应计算结果。如果刚度不明, 如何确定地震反应呢? 我们现将  $k_1/k_2$  取为不同的值 (正值), 算得地震反应, 并将结果绘成曲线示于图 2.1.3 和图 2.1.4 中。

从图 2.1.3 可见, 当  $k_1/k_2=2$  时, 框架上层的第一振型地震剪力  $\frac{Q_{1-2}^{(1)}}{mA_1}$  具有最大值 1.207, 相应的第二振型剪力  $\frac{Q_{1-2}^{(2)}}{mA_2}$  为 0.207。可认为  $k_1=2k_2$  (图 2.1.1(b)和图 2.1.2(b)) 正是对于上层地震剪力最不利的刚度分布。当  $k_1/k_2$  很小时, 下层的第一振型地震剪力  $\frac{Q_{0-1}^{(1)}}{mA_1}$  接近最大值 2, 而第二振型地震剪力  $\frac{Q_{0-1}^{(2)}}{mA_2}$  接近 0。实际上这时此二自由度体系已退化为单自由度体系。

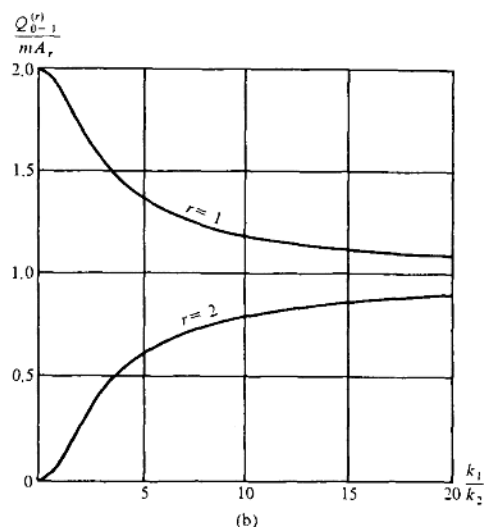
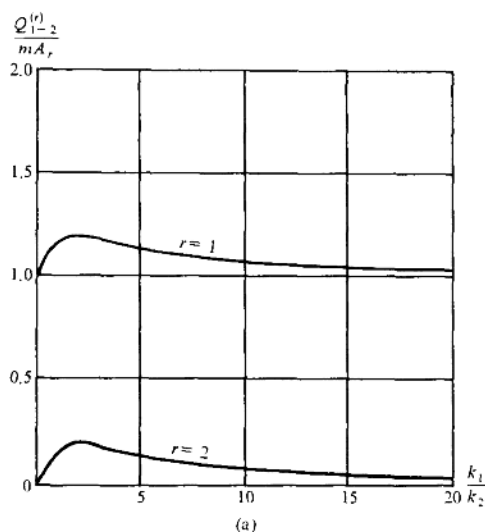


图 2.1.3 二质点体系地震剪力

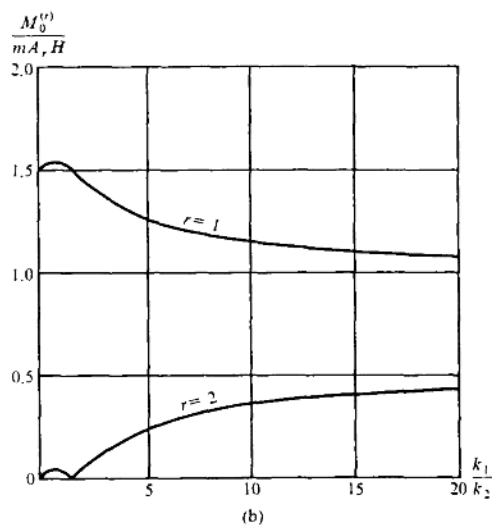
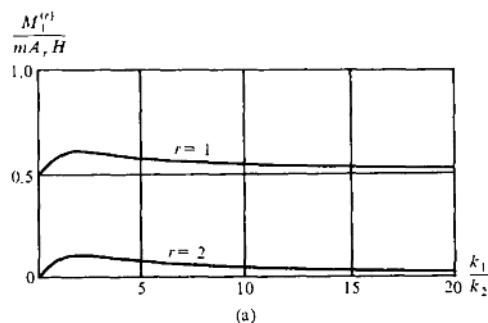


图 2.1.4 二质点体系地震弯矩

图 2.1.4 曲线表明,当  $k_1/k_2=2$  时,框架半高程处的第一振型地震弯矩  $\frac{M_1^{(1)}}{m A_1 H}$  呈现最大值 0.604, 相应的第二振型弯矩  $\frac{M_1^{(2)}}{m A_2 H}$  为 0.104。 $k_1=2k_2$  (图 2.1.1(b) 和图 2.1.2(c)) 也正是对于半高程地震弯矩最不利的刚度分布。当  $k_1/k_2$  约为 0.7 时,基底的第一振型地震弯矩  $\frac{M_0^{(1)}}{m A_1 H}$  具有最大值 1.541, 而第二振型弯矩  $\frac{M_0^{(2)}}{m A_2 H}$  为 0.041。

以上利用图 2.1.3 和图 2.1.4 确定的第一振型反应的最大值就是我们随后将研究的主上界,这时结构的刚度分布是最不利的。与之相应的第二振型反应可能是最大值 (图 2.1.3(a))

和图 2.1.4(a)), 也可能只是“局部”最大值(图 2.1.4(b)), 还可能退化(图 2.1.3(b)), 由于它与主上界同时出现(刚度分布情形相同), 我们称之为次上界。

图 2.1.1 中的结构模型极为简单, 可以利用图 2.1.3 和图 2.1.4 来确定上界地震剪力和弯矩反应。当结构模型复杂时, 我们必须另寻其他求解上界地震反应的方法。

通过以下的演算我们将可略见建立(积函数)极值条件并求解极值(上界)这一途径的梗概。

参照式 (2.1.11) 和式 (2.1.12), 对于任何振型, 写出地震荷载和振型参与因子函数的表示式:

$$S_2 = \eta u_2 mA \quad (2.1.17a)$$

$$S_1 = \eta u_1 mA \quad (2.1.17b)$$

和

$$\eta = \frac{mu_1 + mu_2}{mu_1^2 + mu_2^2} = \frac{u_1 + u_2}{u_1^2 + u_2^2} \quad (2.1.18)$$

现取  $u_2=1$ ,  $u_1=x$  和

$$\eta = \frac{x+1}{x^2+1} \quad (2.1.19)$$

于是地震剪力和地震弯矩反应的上界求解如下:

(1) 框架上层地震剪力:

$$Q_{1-2} = S_2 = \frac{x+1}{x^2+1} mA \quad (2.1.20)$$

$$\bar{Q}_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{mA} = \frac{x+1}{x^2+1} \quad (2.1.21)$$

极值条件  $\frac{d\bar{Q}_{1-2}}{dx}=0$  给出

$$2x(x+1) - (x^2+1) = 0 \quad (2.1.22)$$

整理可得

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (2.1.23)$$

式 (2.1.23) 的解为

$$x_1 = 0.414 \quad (2.1.24a)$$

$$x_2 = -2.414 \quad (2.1.24b)$$

将式 (2.1.24) 代回到式 (2.1.21) 中可得主、次上界:

$$\bar{Q}_{1-2, \text{主上界}} = \frac{0.414+1}{0.414^2+1} = 1.207 \quad (2.1.25a)$$

$$\bar{Q}_{1-2, \text{次上界}} = \left| \frac{-2.414+1}{-2.414^2+1} \right| = 0.207 \quad (2.1.25b)$$

参照式 (2.1.24) 可见, 与主上界相应的变形状态为  $u_2=1$ ,  $u_1=0.414$ , 此人工振型我们称之为贡献振型; 与次上界相应的变形状态为  $u_2=1$ ,  $u_1=-2.414$ , 此另一人工振型我们称之为次贡献振型。这两个贡献振型如图 2.1.5 所示。易于校验它们是互相正交的。注意图 2.1.5(a) 与图 2.1.1(b) 相同, 即对于上层地震剪力的主、次贡献振型与  $k_1/k_2=2$  时的第一和第二固有振型相同。这表明  $k_1/k_2=2$  是对于上层地震剪力的最不利刚度分布。

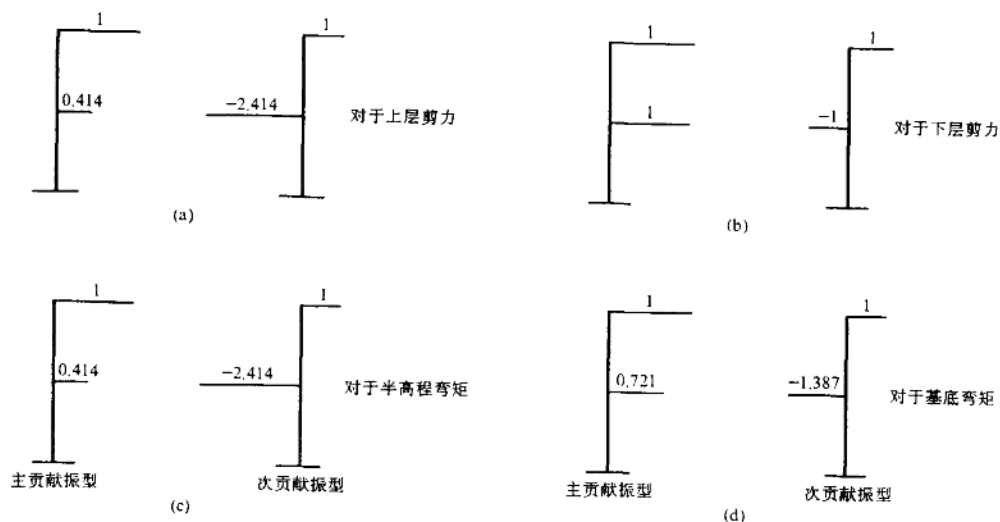


图 2.1.5 二质点体系的几组贡献振型

(2) 框架下层地震剪力:

$$Q_{0-1} = S_1 + S_2 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} mA \quad (2.1.26)$$

$$\bar{Q}_{0-1} = \frac{Q_{0-1}}{mA} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \quad (2.1.27)$$

极值条件  $\frac{d\bar{Q}_{0-1}}{dx} = 0$  给出

$$2x(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+1) = 0 \quad (2.1.28)$$

或

$$2x^2 - 2 = 0 \quad (2.1.29)$$

式 (2.1.29) 的解为

$$x_1 = 1 \quad (2.1.30a)$$

$$x_2 = -1 \quad (2.1.30b)$$

将  $x_1 = 1$  代回到式 (2.1.27), 可得

$$\bar{Q}_{0-1, \text{主上剪}} = \frac{(1+1)^2}{1^2+1} = 2 \quad (2.1.31)$$

将  $x_2 = -1$  代入式 (2.1.27) 的右端给出 0 值, 前已指出, 这时此二自由度体系退化为单自由度体系 (图 2.1.6)。主贡献振型 ( $u_2=1, u_1=1$ ) 如图 2.1.5 (b) 所示, 次贡献振型没有什么实际意义。

(3) 框架半高程地震弯矩:

$$M_1 = S_2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{x+1}{2(x^2+1)} mAH \quad (2.1.32)$$

$$\bar{M}_1 = \frac{M_1}{mAH} = \frac{x+1}{2(x^2+1)} \quad (2.1.33)$$

对比式 (2.1.33) 和式 (2.1.21), 可知极值条件给出的解  $x_1$  和

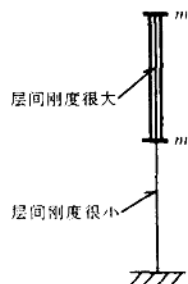


图 2.1.6 由二自由度体系退化而成的单自由度体系

$x_2$  也如式 (2.1.24) 所示。故

$$\bar{M}_{1, \text{主上界}} = \frac{0.414 + 1}{2(0.414^2 + 1)} = 0.604 \quad (2.1.34a)$$

$$\bar{M}_{1, \text{次上界}} = \left| \frac{-2.414 + 1}{2[(-2.414)^2 + 1]} \right| = 0.104 \quad (2.1.34b)$$

两个贡献振型如图 2.1.5(c) 所示, 与图 2.1.5(a) 相同。显然,  $k_1/k_2=2$  也是对于半高程地震弯矩的最不利刚度分布。

(4) 框架基底地震弯矩:

$$M_0 = S_1 \cdot \frac{H}{2} + S_2 H = \frac{(x+1)\left(\frac{x}{2} + 1\right)}{x^2 + 1} mAH \quad (2.1.35)$$

$$\bar{M}_0 = \frac{M_0}{mAH} = \frac{(x+1)(x+2)}{2(x^2 + 1)} \quad (2.1.36)$$

极值条件  $\frac{d\bar{M}_0}{dx} = 0$  给出

$$4x(x+1)(x+2) - [(x+2) + (x+1)] \cdot 2(x^2 + 1) = 0 \quad (2.1.37)$$

或

$$3x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (2.1.38)$$

式 (2.1.38) 的解为

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{10}}{3} = 0.721 \quad (2.1.39a)$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{10}}{3} = -1.387 \quad (2.1.39b)$$

于是

$$\bar{M}_{0, \text{主上界}} = \frac{(0.721 + 1)(0.721 + 2)}{2(0.721^2 + 1)} = 1.341 \quad (2.1.40a)$$

$$\bar{M}_{0, \text{次上界}} = \left| \frac{(-1.387 + 1)(-1.387 + 2)}{2[(-1.387)^2 + 1]} \right| = 0.041 \quad (2.1.40b)$$

主贡献振型 ( $u_2=1, u_1=0.721$ ) 和次贡献振型 ( $u_2=1, u_1=-1.387$ ) 如图 2.1.5(d) 所示, 它们是互相正交的。

图 2.1.5 中几组贡献振型不是图 2.1.1(a) 中框架结构的固有动力特性, 它们在力学概念上不同于传统动力学中的振型, 而是一种人工振型。

## 第二节 三质点体系

### § 2.2.1 上界地震剪力

图 2.2.1 所示为一三质点体系。它与图 2.1.1 中的二质点体系都是伸臂式体系。工程实际中很多结构的抗震分析模型可概略地取为伸臂式体系。

此体系的质量分布如图中所示, 刚度分布不明, 而且楼层高度也未给定, 我们现根据极值条件求水平地面运动作用下截面 1-2 上的上界地震剪力。

对于任何振型, 地震荷载可表为