国家级示范性高等院校精品规划教材

概率论与数理统计

GAI LÜ LUN YU SHU LI TONG JI

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/吴斌　汤立智

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

国家级示范性高等院校精品规划教材

概率论与数理统计

主　编　吴　斌　汤立智
副主编　张　甜　关　凯

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书根据经济类、管理类及工科类各专业概率论与数理统计课程的基本要求编写,主要内容包括:随机事件及其概率;一维随机变量及其分布;多维随机变量及其分布;随机变量的数字特征;大数定律及中心极限定理;样本及抽样分布;参数估计;假设检验;回归分析。每节后基本都配有习题,每章后还配有本章小结及复习题。

本书可供高等院校工科和其他非数学类专业的学生使用,也适用于学时少或多层次办学的概率论与数理统计课程的教学。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/吴斌,汤立智主编.—天津.天津大学出版社,2010.8
国家级示范性高等院校精品规划教材
ISBN 978-7-5618-3639-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①吴…②汤… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 163100 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 14
字　　数 350 千字
版　　次 2010 年 8 月第 1 版
印　　次 2010 年 8 月第 1 次
定　　价 29.00 元

前　言

概率论与数理统计是高等院校工科、理科及经管类专业一门十分重要的基础课程.这不仅是因为它在各个领域中应用的广泛性,而且从人才素质的全面培养来说,这门课程也是不可或缺的.因此编写一本适合当前学生实际又符合教育部有关课程基本要求的数学教材为各校教学的当务之急,特别对于培养实用型人才的一般院校、独立学院而言,目前国内尚缺乏这类教材.为此,我们结合自己多年丰富的教学经验,编写本书.本书的特色主要体现在以下几个方面.

(1) 在符合教育部关于"概率论与数理统计"课程教学基本要求的前提下,以"必需、够用"为原则,不片面追求理论体系的完整性和运算技巧,突出数学思想、数学方法及数学的应用,在保持了传统教材优点的基础上,也注意适当渗透现代概率统计的概念、思想和方法,并对体系进行了适当的调整和优化.

(2) 本课程属于随机数学范畴,概念和原理较为抽象,因此每一个概念的引入力求从身边的实际问题出发,由浅入深、循序渐进,注重数学理念的直观背景和数学概念的直观理解,如介绍概率的公理化定义之前,我们全面介绍了概率的几种特殊定义(古典概率、几何概率、概率的统计定义),使学生了解人类形成的丰富的概率思想.

(3) 强调实际应用.本着学习数学是为了使用数学这一宗旨,本书注重将数学建模的思想融入概率论与数理统计的基本教学内容中,书中较多选择了工程和经济方面的例题和习题,以提高运用概率论与数理统计知识解决实际问题的意识和能力.

(4) 本书的习题基本按节配置,遵循循序渐进的原则,除了充分注意基本概念、基本方法和理论,还适当配置了一些富有启发性的应用性习题,每章后配置复习题,供学有余力的学生复习、提高之用,每章末尾都有本章小结,以帮助读者把握本章的要点和基本要求,加深对概念的理解,方便对课程内容的复习.

本书结构严谨,逻辑清晰,叙述清楚,说明到位,文字通俗流畅,例题丰富,注重应用,习题量较大,便于自学,可读性强,它可以用作高等学院工科类、经济类、管理类专业的学生教材.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中难免存在不妥之处,敬请专家、同行及读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编　者
2010.8

目 录

第一章　随机事件及其概率

第一节　随 机 事 件

一、随机现象

在科学研究与社会生活中，有许多现象是在一定条件下必然会发生的. 如：太阳每天从东方升起；在 1 个标准大气压下水加热到 100℃会沸腾等. 这类现象称为**确定现象**. 当然，也有一些现象是必然不会发生的，如：掷一枚骰子掷出点数为 7；一个人身高为 5 米等. 这类现象称为**不可能现象**.

还有一些现象不确定是否发生的，如：明天你的朋友是否来看你；明天是晴天还是下雨；投掷一枚硬币时，正面是朝上还是朝下等. 这类现象的共同点是：在基本条件保持不变的情况下，时而会出现这样的结果，时而又会出现那样的结果，而事先又无法断定会出现哪一种结果，这类现象称为**随机现象**. 概率论与数理统计的主要任务就是研究随机现象的统计规律性.

二、随机试验

观察或测量一次随机现象在一定条件下出现的结果称为一次随机试验，用 E 表示. 如：投掷一次骰子就是一次随机试验. 许多实践早已证明，当大量重复试验时，其结果就会出现某种固有的规律性，而这种规律性就是我们将要研究的.

若试验具有下列特征：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验的所有结果是明确可知的，并且不止一个；

(3)每次试验总能出现可能结果中的一个，但在试验之前又无法肯定出现哪一个，则称为**随机试验**，简称**试验**.

三、随机事件和样本空间

先来观察两个随机试验：

(1)掷一枚均匀的骰子，骰子有六面；

(2)在数轴上的(0,1)区间内投点.

在(1)中，随机试验将要出现的结果是 6 个，分别是点数 1,2,3,4,5,6. 而(2)中，(0,1)区间内的点有无数个，这就意味着可能的结果有无数个.

为了更好地研究随机试验，我们将每个可能的结果称为**样本点**，用 ω 表示. 把含有一个样本点的集合称为**基本事件**. 在(1)中若讨论的是“掷得的点数是偶数”这样一个随机现象，由于它本身有多个可能(掷得的点数可能是 2,4,6 中的一个)，它包含 3 个样本点，我们称之为**复杂事件**，一般用字母 A,B,C 等表示，如：$A=\{$掷得的点数为偶数$\}$.

复杂事件有两个极端，一是包含了所有样本点，如："掷得的点数为 1,2,3,4,5,6". 显然，掷一次骰子就一定会发生，故称为**必然事件**，又因为它包含了所有的样本点，故又称为**样本空间**，用 Ω 表示. 另一个则是不包含任何样本点的情形，如："掷得的点数为 7"，明显不可能发生，称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示. 从本质上来讲，这两种极端情形已不是随机事件，但为了讨论的方便，我们还是把它们看作随机事件.

从以上的描述中，我们可以体会到，不论是 Ω、A 还是 $\varnothing$，均是由某些特征的样本点组成的集合，所以从集合论的观点来看，一个随机事件只不过是样本空间的一个子集而已，而 $\varnothing$ 是不包含任何样本点的空集.

例 1　试给出下列随机试验的样本空间.

E_1：某个十字路口某时间段内所通过汽车的数量；

E_2：在单位圆内任意取一点，记录它的坐标；

E_3：对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

解　试验 E_1 的结果为经过的汽车车辆数，可以为 0,1,2,3,…，因而

$$\Omega_1=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

E_2 中任取一点的坐标为 (x,y)，则样本空间为

$$\Omega_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}.$$

E_3 中，如果设 1 表示正品，0 表示次品，则样本空间为

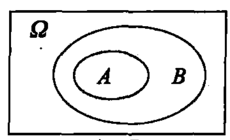
$\Omega_3=\{(0,0),(1,0,0),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0),$
$(1,0,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}.$

四、事件关系和运算

既然随机事件就是集合，那么，事件之间的关系和运算就与集合之间的关系和运算类似（在以下的叙述中，设 Ω 为给定的样本空间，A,B,C,A_i 等均为其中的事件），并且也可以用文氏图来表示.

1. 包含关系

如果 A 发生，必然导致 B 发生，则称 B 包含 A，记作 $A\subset B$，从集合的角度看，就是某一样本点 $\omega\in A$，就一定有 $\omega\in B$，如图 1-1所示.



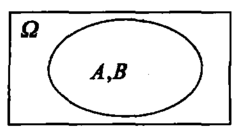
$A\subset B$

图 1-1

例如，掷一枚骰子，令 A 表示"掷出 2 点"的事件，即 $A=\{2\}$；B 表示"掷出偶数点"的事件，即 $B=\{2,4,6\}$，则 $A\subset B$.

2. 等价关系

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B 等价，或称 $A=B$，即 A,B 为同一事件，如图 1-2 所示.



$A=B$

图 1-2

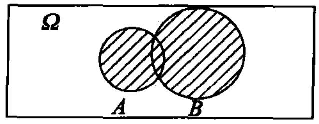
例如，从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，令 A 表示"取到至少有 3 张红桃"的事件；B 表示"取得至多有一张不是红桃"的事件，显然 $A=B$.

3. 事件的并

如果事件 A,B 至少有一个发生，则称 A,B 的并，记为 $A\cup B$，或称为 A 与 B 的和，如图

1-3所示.

例如，甲、乙两人向同一目标射击，令 A 表示“甲击中目标”的事件，B 表示“乙击中目标”的事件，则 $A\cup B$ 表示“目标被击中”的事件.



$A\cup B$

图 1-3

推广：任意有限个

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

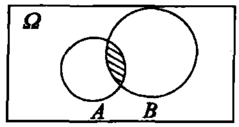
无穷可列个

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots$$

表示 $A_1,A_2,\cdots$ 至少有一个发生.

4. 事件的交

事件 A,B 同时发生时，称为事件 A,B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB，也称为 A 与 B 的积，如图 1-4 所示.



$A\cap B$

图 1-4

例如，在 E_1 中，观察汽车通过的辆数，令 $A=\{$有偶数辆通过$\}$，$B=\{$有 3 的倍数辆通过$\}$，则 $A\cap B=\{$有 6 的倍数辆通过$\}$.

推广：任意有限个

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

表示 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生.

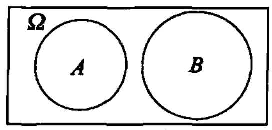
无穷可列个

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cdots$$

表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

5. 互不相容事件

如果 A,B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A,B 两事件互不相容(或称互斥)，如图 1-5 所示.



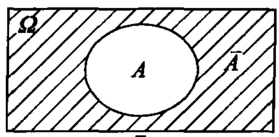
$AB=\varnothing$

图 1-5

例如，观察某路口在某时刻的红绿灯：若 $A=\{$红灯亮$\}$，$B=\{$绿灯亮$\}$，则 A 与 B 便是互不相容的.

6. 对立事件

定义 $\overline{A}$ 为事件 A 的不发生事件，称为事件 A 的逆，或称 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件，即 $\overline{A}=\{\omega\mid\omega\in\Omega,$ 但 $\omega\notin A\}$，如图 1-6 所示.



$\overline{A}$

图 1-6

若记 $B=\overline{A}$，则 $B=\overline{A}\Leftrightarrow\begin{cases}A\cup B=\Omega,\\ AB=\varnothing.\end{cases}$

此外，显然有 $\overline{\overline{A}}=A$，例如，从有 3 个次品、7 个正品的 10 个产品中任取 3 个，若令 $A=\{$取得的 3 个产品中至少有 1 个次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$取得的 3 个产品均为正品$\}$.

7. 事件的差

“事件 A 发生，但 B 不发生”也是一个事件，记为 $A-B$，称为事件 A 与 B 的差，显然 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A,$ 但 $\omega\notin B\}$，同时 $A-B=A\overline{B}=A-AB$，如图1-7所示.

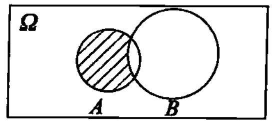


图 1-7

例如，测量晶体管的 β 参数值，令 $A=\{$测得 β 值不超过 50$\}$，$B=\{$测得 β 值不超过 100$\}$，则，$A-B=\varnothing$，$B-A=\{$测得 β 值为 $50<\beta\leqslant 100\}$.

例 2 设 A,B,C 是 Ω 中的随机事件，则

事件“A,C 发生，B 不发生”可以表示为 $A\bar{B}C$；

事件“A,B,C 中至少有一个发生”可以表示为 $A\cup B\cup C$；

事件“A,B,C 中至少有两个发生”可以表示为 $AB\cup AC\cup BC$；

事件“A,B,C 恰好有两个发生”可以表示为 $\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$.

例 3 一名射手连续向某一目标射击三次，令 $A_i=\{$第 i 次射击击中目标$\}$，$i=1,2,3$，试用文字叙述下列事件：$A_1\cup A_2$，$\bar{A}_2$，$A_1\cup A_2\cup A_3$，$A_1A_2A_3$，A_3-A_2，$\overline{A_1\cup A_2}$，$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$.

解 $A_1\cup A_2=\{$前两次射击中至少有一次击中目标$\}$，

$\bar{A}_2=\{$第二次射击未击中目标$\}$，

$A_1\cup A_2\cup A_3=\{$三次射击至少有一次击中目标$\}$，

$A_1A_2A_3=\{$三次射击都击中目标$\}$，

$A_3-A_2=\{$第三次击中目标但第二次未击中目标$\}$，

$\overline{A_1\cup A_2}=\{$前两次均未击中目标$\}$（注：$\overline{A_1\cup A_2}=\bar{A}_1\bar{A}_2$），

$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2=\{$前两次射击至少有一次未击中目标$\}$.

事件的运算满足下列运算法则：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$；

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(AC)\cup(BC)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4)摩根定律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$；

将其推广到 n 个事件的情形，有 $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap\limits_{i=k}^{n}\bar{A}_k$；$\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bar{A}_k$.

例 4 已知 $(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\overline{A\cup B}\cup\overline{\bar{A}\cup B}=C$，求 B.

解 由事件运算的分配律，以及摩根定律，可知

$$\begin{aligned}&(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\overline{A\cup B}\cup\overline{\bar{A}\cup B}\\&=A(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{B}(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{A}\bar{B}\cup\bar{\bar{A}}\bar{B}\\&=(A\bar{A}\cup A\bar{B})\cup(\bar{B}\bar{A}\cup\bar{B}\bar{B})\cup\bar{A}\bar{B}\cup A\bar{B}\\&=A\bar{B}\cup\bar{B}\cup\bar{A}\bar{B}\cup A\bar{B}=(A\cup\bar{A})\bar{B}=\bar{B}=C.\end{aligned}$$

所以 $B=\bar{C}$.

习题 1-1

1. 口袋中有红、白、黄三种颜色的球，从中一次取出 2 只，考察球的颜色。用 A 表示取出的球中没有红色球，B 表示只有红色球，C 表示球的颜色各不相同，D 表示球的颜色相同。试用集合表示样本空间和随机事件 A,B,C,D.

2. 在某系学生中任选一名同学，设 A 表示选出的学生是男生，B 表示选出的是三年级学生，C 表示选出的学生是系足球队队员．

(1)叙述事件 $AB\overline{C}$ 的含义；

(2)在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3)叙述关系式 $C\subset B$ 的含义．

3. 将 4 本图书随机地放在书架上，用 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 本倒放。请用 A_i 表示下列事件：

$A=\{$恰好都是倒放$\}$；

$B=\{$不全是正放$\}$；

$C=\{$只有第一本是倒放$\}$；

$D=\{$有一本是正放$\}$.

4. 设 A,B 是两个随机事件，下面的关系式在什么条件下成立？

(1)$A\cup B=A$；

(2)$AB=A$；

(3)$A-B=A$；

(4)$A-B=\varnothing$.

5. 下列命题是否正确？

(1)若 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$；

(2)若 $A-C=B-C$，则 $A=B$；

(3)若 $AC=BC$，则 $A=B$；

(4)$A\overline{B}$ 与 AB 互不相容，$A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 也是互不相容．

第二节　事件的概率

在一次随机试验中，仅仅只是知道哪一些事件将可能发生，对我们是没有多大意义的，更重要的是发生这些事件的可能性的大小.

定义　随机事件 A 发生的可能性大小的度量(数值)称为 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$.

从这个定义我们可以看到，与一根木棒有长度、一块土地有面积一样，事件发生可能性的大小也可以去度量，并且这种度量是客观存在的，历史上人们曾经想出了不少的方式去度量它.

一、古典概率

在概率论发展早期，古典概率是人们用来描述这一度量的最原始方式.

以掷均匀的硬币为例，我们很容易想到，由于硬币的两面是对称的，所以出现“正面”和“背面”的可能性一样，故都是$\frac{1}{2}$.

类似的问题也出现在掷骰子、抽中彩票等问题上，它们有如下的共同特征.

(1)有限性：试验的可能结果为有限个.

(2)等可能性：各个可能结果出现是等可能的.

我们把这类问题称为**古典概型**,对任意事件 A,对应的可能性的度量即概率记为 $P(A)$,计算公式如下:

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的样本点数}(k)}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 包含的样本点总数}(n)}.$$

例 1 一个盒子中有 100 只球,白球 30 个,红球 70 个,现按以下两种方式随机抽取两个球:

(1) 有放回,即先取一个,观察后放回盒中,再任取一球;

(2) 不放回,即先取一个,观察后不放回盒中,再取另一球.

试分别按这两种抽样方式求:

(1) 两个都是红球的概率;

(2) 第一个是红球,第二个是白球的概率.

解 设 $A=\{$两个球都是红色$\}$, $B=\{$第一个球是红色,第二个球是白色$\}$.

易知本题的试验为古典概型,先考虑有放回:在两次抽取中每次都有 100 种可能,因而总的样本点数为 $n=100^2=10000$. 有放回时,每次抽取都有 70 种结果,因而事件 A 包含的样本点数为 $k=70^2=4900$. 于是

$$P(A)=\frac{70^2}{100^2}=0.49.$$

同理,事件 B 发生,第一次有 70 种选择,第二次有 30 种选择,样本点数为 70×30,所以

$$P(B)=\frac{70\times30}{100^2}=0.21.$$

再考虑不放回的情形,第一次抽有 100 种可能,但第二次只有 99 种选择,故总的样本点数为 $n=100\times99$,事件 A 包含的样本点数为 $k=70\times69$,事件 B 包含的样本点数为 70×30,故

$$P(A)=\frac{70\times69}{100\times99}\approx0.488,$$

$$P(B)=\frac{70\times30}{100\times99}\approx0.212.$$

例 2 在有 n 个人($n\leqslant365$)的班级中,至少有两个人生日在同一天的概率有多大?

解 假定一年按 365 天计算,把 365 天看作 365 个"房间",设 $A=\{n$ 个人至少有两人生日相同$\}$,这时事件 A 所包含的情况比较复杂,但是另一方面,$\overline{A}=\{n$ 个人的生日全不相同$\}$,则简单得多.

故我们先考察 $\overline{A}$,总的样本点数应这样看:n 个人中每一个人的生日都有 365 种选择,即可以入住 365 个"房间"中的任一个,则 n 个人共有 365^n 种选择,而 n 个人生日全不相同,则第 1 个人有 365 个"房间"可选,第 2 个人则只有 364 个,以此类推,共有 A_{365}^n 种选择.

故
$$P(\overline{A})=\frac{\mathrm{A}_{365}^n}{365^n}.$$

很明显
$$P(A)=\frac{\text{总样本点数}-\overline{A}\text{ 包含的样本点数}}{\text{总样本点数}}=1-\frac{\mathrm{A}_{365}^n}{365^n}.$$

对不同的 n 值,计算得相应的 $P(A)$ 值如下表:

n	10	20	23	30	40	50
$P(A)$	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

上表所列的结果令许多人很诧异，因为“一个班级至少有两个人生日相同”这一事件发生的概率，并不像大多数人直觉想象的那样小.

例 3 m 个人抽签分配 m 张彩票，其中有 n 张彩票有奖（$1\leqslant n\leqslant m$），试求第 k 个人抽得有奖彩票的概率（$1\leqslant k\leqslant m$）.

解 记 $A_k=\{$第 k 个人抽得有奖彩票$\}$，则彩票总的分配方法有 $m!$ 种，如果第 k 个人抽得有奖彩票，余下的彩票则有 $(m-1)!$ 种分配方案，而有奖彩票共有 n 张.

故 A_k 包含的基本事件数为 $\mathrm{C}_n^1(m-1)!$.

$$P(A_k)=\frac{\mathrm{C}_n^1(m-1)!}{m!}=\frac{n}{m}.$$

这说明：A_k 发生的可能性只与 m、n 有关，与 k 无关，即不论你是第一个抽，还是最后一个抽，都很“公平”，这与人们直观上感到抽签分配“公平”是一致的.

例 4 （女士品茶问题）一位常饮牛奶加茶的女士称：她能从一杯冲好的饮料中辨别出先放茶还是先放牛奶，并且她在 10 次试验中都正确地辨别出来. 问该女士的说法是否可信？

解 假设该女士说法不可信，即假定该女士纯粹是猜测. 则在此假设下每次试验的两个可能结果：牛奶＋茶或茶＋牛奶，是等可能的，使用古典概率. 10 次试验一共有 2^{10} 个等可能结果. 如记事件 $A=\{$在 10 次试验中都能正确指出放置牛奶和茶的先后次序$\}$，则在全部 2^{10} 个样本点中 A 只含其中的一个，因而

$$P(A)=\frac{1}{2^{10}}=0.0009766.$$

这是一个非常小的概率. 人们在日常生活中遵循一个称之为“实际推断原理”的准则：“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的.”但现在概率很小的事件在一次试验中居然发生了，因此有理由怀疑“该女士纯粹是猜测的假设不成立”，有理由断言该女士的说法是可信的.

以上的推断思想在统计假设中是常用的，我们将在统计部分详细展开.

二、几何概率

古典概率对概率的度量须假定试验结果是有限个，这限制了它的适用范围，故而我们有必要做一个推广：保留等可能性，而允许试验结果为无限个，这就有事件发生可能性度量的另一种方式——**几何概率**.

以射击为例，一个射手向一个固定的靶子射击，任意一个可能的结果（或样本点）可以用射中的位置表示，假定击中靶子各种位置是等可能的，如果研究射手击中某一区域的可能性，我们会发现总的样本点数是无数个，而所求事件所包含的样本点数也是无穷的，无法进行计算，为此必须用一种新的方式来度量样本点的“数目”，而不再用“个”为单位，比如用“面积”来说明样本点的“数目”就是不错的选择.

设事件 A 为“射手射中靶子的 A 区域”，则有

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

类似的做法也适用别的情形.

例 5 公共汽车站从上午 8 时起，每隔 10min 来一趟车，一乘客在8:00～8:30间随机到达，求等待不超到 3min 的概率.

解 先设 $A=\{$等待不超过 3min$\}$.

由于基本事件是时间点，总的样本点数和 A 发生的样本点数都是无限个，我们就换个方式来度量样本点的“数目”，如用时间的长度，总的样本点时间长为 30min，A 发生的时间段分别为 8:07～8:10；8:17～8:20；8:27～8:30 共 9min，故

$$P(A)=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}.$$

例 6 甲、乙两艘轮船都要在某个泊位上停靠 6h，假定它们在 24h 内随机到达，则总有一艘船需要等待的可能性为多少呢？

解 不妨设甲船到达的时间为 x，乙船到达时间为 y，则两船时间间隔不超过 6h 时，总有一船在等待，也就是 $|x-y|<6$，以 (x,y) 为坐标系中的点，如图 1-8 所示.

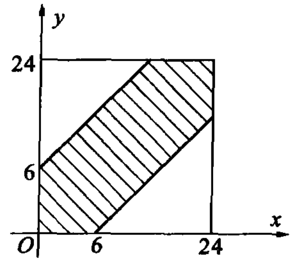


图 1-8

所有 (x,y) 组成的点，均在 $x=24$，$y=24$ 以及 x、y 轴围成的正方形中，而满足 $|x-y|<6$ 的点，均在阴影部分，设“有一船在等待”为事件 A，则很容易使我们想到

$$P(A)=\frac{S_{阴}}{S_{正}}=\frac{A\text{ 包含的样本点所在的面积}}{\Omega\text{ 的所有样本点所在面积}}=\frac{24^2-18^2}{24^2}=\frac{7}{16}.$$

由于我们是用“几何”的度量值，如面积、长度来说明概率的，故此类问题也被称为**几何概型**.

不论是古典概率还是几何概率，对事件发生可能性的度量都是通过事件 A 包含的样本点数(或所在区域面积，体积等)占总样本点数(或样本空间的面积，体积等)的比率来实现的，“基本事件是等可能的”是个基本假设，因而，对概率的描述有很大的主观色彩. 在实际问题中，往往并不知道这一假设是否成立，而只凭主观来判定是否“等可能”是站不住脚的. 比如掷一枚骰子时，我们一般主观上认为出现 1、2、3、4、5、6 六个点的可能性是相同的，但是多次抛掷的结果表明：刻有 4、5、6 点这三个面出现的可能性比 1、2、3 偏大些，这是因为骰子的重心有向 1、2、3 点处偏移的缘故. 为了克服这种主观上“等可能性”的依据不足，人们采用多次试验的方式来获得事件发生可能性的大小的度量.

三、统计概率

统计概率对可能性的度量是通过多次同等条件下的重复试验来实现的.

还是掷硬币的问题，为了弄清“正面”向上的可能性，我们采取重复多次试验的方式，即共掷 n 次，统计正面朝上的次数为 m 次，这时得到正面朝上的比率 $\frac{m}{n}$. 为了更好地说明问题，我们把这种在同等条件下，多次试验事件 A 发生的比率称为**频率**，记为 $f_n(A)$，定义

$$f_n(A)=\frac{A\text{ 出现的次数 }m}{\text{试验的总次数 }n}.$$

历史上不少数学家做过掷硬币这件事，结果如下表：