高等学校教材

概率统计引论

何远江 区景祺 尹小玲

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率统计引论

■ 何远江 区景祺 尹小玲

GAILÜ TONGJI YINLUN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书注重基本概念和方法，表述详略得当，突出易学易教，论述相对严谨。

全书内容包括事件与概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，统计估计，假设检验，线性模型初步，贝叶斯统计简介等共八章。另外，本书还列举了一些利用 Excel 解题的例子，读者可以通过学习利用 Excel 来解决相关问题。

本书可作为高等学校理工类本科生的概率论与数理统计课程的教材，也可供相关院校经济管理类本科生使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率统计引论/何远江，区景祺，尹小玲编．—北京：高等教育出版社，2010.7
ISBN 978-7-04-029759-1

Ⅰ．①概… Ⅱ．①何… ②区… ③尹… Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 113590 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 王凌波
责任绘图 黄建英 **版式设计** 史新薇 **责任校对** 杨凤玲
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	010-58581118 400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	北京四季青印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010 年 7 月第 1 版
印　　张	18.25	印　　次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	定　　价	23.20 元

物料号　29759-00

序 言

概率论与数理统计是定量地研究随机现象内在规律性的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分。随着现代科学技术和经济的发展，这门学科在各方面都得到迅速的发展。一方面，它有自己独特的概念和方法，形成了系统的理论；另一方面，它是最活跃的数学分支之一，在学科发展上向各学科渗透，发展成一些边缘分支。特别值得一提的是，近年来计算机及软件技术的迅速发展，使得能够迅速完成以往人力很难或根本无法完成的复杂统计计算，这就极大地拓宽了概率统计的应用范围，增添了应用对象。现在，概率统计的应用几乎遍及各个科学领域和国民经济各部门，概率统计的一些基本概念和知识已成为很多社会生活和经济活动的必备常识。

由于概率统计的迅速发展及其越来越广泛性的应用，它已成为高等学校大部分专业的必修或选修课程。通过本课程的学习可以使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，为各专业的深入学习或应用打下良好的基础。

这本教科书是为大学理科、工科以及经济类和管理类各专业二年级水平的学生作为一学期课程的教材而编写的，读者只需预先具有微积分的知识（作为参考材料的第七章和附录 A 还需要少量矩阵的知识）。

本书努力做到简明易懂。书中有较为丰富的例题和适量的习题（附答案），便于读者自学。删去部分内容（例如第一章只保留前面的 5 节，第四章只保留定理 1.2，定理 1.3，定理 2.1 和定理 2.2，第六章只保留前面的 3 节，其他部分删去一些内容及较难或较繁的例题），本书还可以用于文科专业。

本书力图对概念和命题作准确叙述，作者也希望本书大部分命题都有完整的证明。但是由于对概率论和数理统计的理论的严格的叙述和命题的严格证明需要较深的数学（特别是测度论）知识，所以在不少的地方，我们不得不仅仅写出命题而略去证明，或者只给出不严格的或者在某些特定条件下的证明。

本书对直观的理解也作了考虑，对于大部分以应用为目的读者，他们最重要的是理解概念和定理的意义和学会怎样利用它们，而不是掌握定理的证明。

我们认为，大学的教材应该比课堂讲授的内容多一些，这样有利于学生课外阅读和充当查阅的资料。书中带有 * 号的内容，都不要求学生掌握，部分读者可能对这些内容有兴趣。余下的部分也略多于一个学期 72 学时讲授的内容，授课教师也应根据实际情况予以取舍。

本书是根据在中山大学统计学专业的多年教学和科研的积累集体编写而成

的。自 2004 年初成稿以来，书稿作为教材使用于中山大学各专业及中山大学新华学院统计学专业，根据教材使用反馈的信息和自身的教学实践，作者对书稿作过多次修改，努力使本书写得富有内容，简洁而不失叙述的相对严谨性，且比较易于学和易于教。

区景祺编写了书稿第一章至第四章以及附录 A，何远江编写了第六章，第八章和附录 B，C，D，尹小玲和区景祺编写了第五章和第七章，尹小玲校对了全部习题的答案。何远江对全稿进行了统一策划，修改，最后定稿和排版，其中包括为各章增删了不少内容。程伟丽，何凌在编辑习题，核对答案和电脑输入文稿方面出了不少力。最后，作者谨向对书稿提供宝贵意见的郭先平教授，翟建仁教授，何伟弘博士和蔡敬衡博士等致以衷心的感谢，对前辈梁之舜教授的教导和对中山大学数学与计算科学学院、中山大学新华学院的支持表示深深的谢意。

何远江　中山大学新华学院
区景祺　中山大学数学与计算科学学院
尹小玲　中山大学数学与计算科学学院
2010.3

目 录

第一章　事件与概率

§1.1　概率空间

§1.1.1　试验,样本空间,事件

在概率论中"**试验**"这一术语包括主动设计的实验和被动进行的观察.下面是一些试验的例子.

例 1.1.1　投掷一颗骰子,观察掷出的(即面朝上的)点数.

例 1.1.2　制造一个显像管并测试它的使用寿命.

例 1.1.3　观察新生婴儿的性别.

例 1.1.4　观察某种新产品未来两个月的总销量.

在试验中,每一个可能出现的结果 ω 都称为**样本点**,而由全体样本点(即全体可能出现的结果)组成的集合称为**样本空间**.例如在例 1.1.1 中,以数字 1,2,3,4,5,6 分别表示掷出的点数为 1,2,3,4,5,6,则 1,2,3,4,5,6 都是样本点,$\{1,2,3,4,5,6\}$ 是由全体可能出现的结果组成的集合,故样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

把试验中发生的一些情况称为**事件**(或**随机事件**).例如在例 1.1.1 中,把"掷出偶数点","掷出奇数点","掷出的点数不少于 5","掷出的点数为 6"等情况都称为事件,又如在例 1.1.2 中,把"寿命超过 2 万小时","寿命超过 2 万小时但不超过 4 万小时","寿命恰好为 2 万小时"等情况亦称为事件.事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

注 1.1.1*　后面的公理 1.1.1 规定了在概率论中事件必须满足的条件.

按照集合论的观点,样本空间是全集,样本点是样本空间的元素,事件是样本空间的子集.例如在例 1.1.1 中,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集 $A_1=\{2,4,6\}$ 表示事件"掷出偶数点",$A_2=\{1,3,5\}$ 表示事件"掷出奇数点",$A_3=$

$\{5,6\}$表示事件“掷出的点数不少于5”,(单点集)$A_4=\{6\}$表示事件“掷出的点数为6”等.

称一个事件(在某次试验中)发生,如果试验的结果属于这一事件.或者可以用集合论的符号来表示,设ω是试验E的结果,称事件A(在试验E中)发生,如果$\omega\in A$.在例1.1.1中,如果掷出的点数为6,即试验的结果$\omega=6$,则事件A_1,A_3,A_4都发生而事件A_2不发生,这是因为$6\in A_1=\{2,4,6\}$,$6\in A_3=\{5,6\}$,$6\in A_4=\{6\}$而$6\notin A_2=\{1,3,5\}$.

在概率论中规定样本空间(全集)Ω和空集$\varnothing$都是事件(见后面的公理1.1.1和性质1.1.2).由于Ω是由全体可能出现的结果组成的集合,故试验的结果必然属于Ω,即事件Ω是必然发生的,因此我们称Ω为**必然事件**.由于$\varnothing$是空集,试验的结果不可能属于$\varnothing$,即事件$\varnothing$是不可能发生的,因此我们称$\varnothing$为**不可能事件**.

§1.1.2 事件的关系与运算

因为事件是样本空间的子集,所以事件的关系与事件的运算就是集合的关系与运算,集合的记号和运算规律也适用于事件.下面是一些在概率论中常见的事件的关系与事件的运算的记号、意义和运算规律.

定义1.1.1 设A,B都是事件,则

1) 称事件$A\cup B$为A与B的**并**.由于$\omega\in A\cup B\Leftrightarrow\omega\in A$或$\omega\in B$,故事件$A\cup B$发生表示$A$和$B$两者中至少有一个发生.

2) 称事件$A\cap B$为A与B的**交**(图1.1).由于$\omega\in A\cap B\Leftrightarrow\omega\in A$且$\omega\in B$,故事件$A\cap B$发生表示$A,B$都发生.通常把$A\cap B$简记为$AB$.

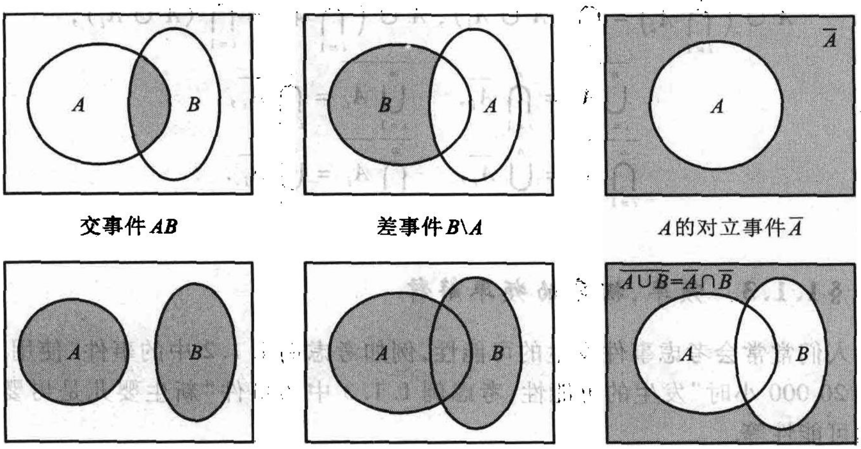
3) 称事件$B\backslash A$为B与A的**差**.由于$\omega\in B\backslash A\Leftrightarrow\omega\in B$且$\omega\notin A$,故事件$B\backslash A$发生表示$B$发生但$A$不发生.

4) 称事件$\bar{A}=\Omega\backslash A$为$A$的**对立事件**.由于$\omega\in\bar{A}\Leftrightarrow\omega\notin A$,故事件$\bar{A}$发生表示$A$不发生.

5) 关系式$A\subset B$成立时称B**包含**A.由于$A\subset B$的意义是$\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$,故(事件$A,B$成立关系式)$A\subset B$表示若$A$发生,则$B$必定发生.

6) 等式$A=B$成立的意义是$A\subset B$且$B\subset A$,故(事件A,B成立关系式)$A=B$表示A发生的充分必要条件是B发生.

7) 等式$A\cap B=\varnothing$成立时称A,B**互不相容**.由于$A\cap B=\varnothing$的意义是不存在$\omega\in\Omega$使得$\omega\in A$且$\omega\in B$,故(事件A,B成立关系式)$A\cap B=\varnothing$表示A,B不可能同时发生.



交事件AB　　差事件$B\backslash A$　　A的对立事件$\overline{A}$

互不相容事件A与B　　事件$A\cup B$与其对立事件$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

图 1.1

命题 1.1.1 设 A,B,C 都是事件,则

1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$. （交换律）

2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$. （结合律）

3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. （分配律）

4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. （对偶律）

5) $B\backslash A=B\backslash(AB)=B\cap\overline{A}$.

可以把事件的运算推广到有限个或无限个事件的情况. 设 $A,A_1,A_2,\cdots$都是事件,则

事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生;

事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生表示 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生;

事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生;

事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生表示 $A_1,A_2,\cdots$ 都发生.

类似地,下面的分配律和对偶律也成立:

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\quad A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),$$

$$A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i),$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

§1.1.3 频率,概率的频率解释

人们常常会考虑事件发生的可能性,例如考虑例 1.1.2 中的事件"使用寿命大于20 000 小时"发生的可能性,考虑例 1.1.3 中的事件"新生婴儿是男婴"发生的可能性等.

例 1.1.2(续) 在相同的条件下制造 1000 个显像管并测试它们的寿命,观察到有 651 个显像管的寿命大于 20 000 小时,则人们会说,事件"使用寿命大于20 000 小时"发生的可能性大约是 651/1000 = 0.651.

下例的数据来自参考文献[13].

例 1.1.3(续) 观察 1927—1932 年间波兰每年出生的婴儿,得到如下的数据:

出生年份	出生婴儿总数	出生男婴总数	男婴出生的频率
1927	958 733	496 544	0.517 9
1928	990 993	513 654	0.518 3
1929	994 101	514 765	0.517 8
1930	1 022 811	528 072	0.516 3
1931	964 573	496 986	0.515 2
1932	934 663	482 431	0.516 2
合计	5 865 874	3 032 452	0.517 0

人们可以由上表估计新生婴儿是男婴的可能性大约是 0.517.

重复进行 n 次试验,事件 A 在这 n 次试验中发生了 m 次,则称 $f(A)=m/n$ 为在这 n 次试验中 A 出现的**频率**. 类似上面的两个例子,人们常常利用频率来估计事件发生的可能性.

例 1.1.5 历史上有些人做过对一枚钱币作多次投掷钱币的试验,有如下

纪录:

试验者	投掷次数 n	事件 A =“正面朝上”发生的次数 m	A 的频率 $f(A)=m/n$
DeMorgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

可以看出,投掷的次数越多,频率越接近 0.5.

通过日常生活中类似于例 1.1.5 的一些经验或直觉人们往往可以接受下面这一推测:如果试验是在相同的条件下重复地进行的,则随着试验次数的不断增大,频率会在某一个确定值附近趋于稳定.

事件的概率可以解释为事件发生的可能性.既然常常用频率估计可能性,因而下面把这一“确定值”定义为概率是有理由的.

定义 1.1.2(概率的频率定义) 设在相同的条件下重复地进行试验,则随着试验次数的不断增大,事件 A 的频率在某一确定值附近趋于稳定,称这一“确定值”为 A 的**概率**,记为 $P(A)$.

由于不是每一个试验都能在相同的条件下重复地进行的,即使能够,利用上述定义在实际上也是无法通过进行有限次重复试验精确地确定具体事件的概率的,因而上述的定义是有欠缺的,与其说是给出了概率的定义,倒不如说是给出了“概率的频率解释”.但是这个定义给人们提供了一种通过重复试验去估计概率的方法.例如在上面的几个例子中人们可以通过大量的试验去估计事件的概率.此外,更重要的是,这个定义使得人们很自然地通过频率的一些性质(性质 1.1.1)去规定概率的相应性质(公理 1.1.2).

不难得到频率的以下性质.

性质 1.1.1 设进行 n 次试验,$f(A)$ 为事件 A 的频率,则

1) $f(A)\geqslant 0$.

2) $f(A)=1$ 当且仅当 A 在每次试验都发生.

3) 设 $A_1,A_2,\cdots$ 为互不相容(即两两互不相容)的事件,则

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f(A_k).$$

证 1)和2)是显然的,仅证明3). 设事件 A_k 发生了 m_k 次, $k=1,2,\cdots$,则事件 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 发生了 $\sum_{k=1}^{\infty}m_k$ 次,事件 A_k 的频率为 $f(A_k)=m_k/n$,事件 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 的频率为

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}m_k=\sum_{k=1}^{\infty}(m_k/n)=\sum_{k=1}^{\infty}f(A_k).$$

§1.1.4 概率空间

读者可以先浏览一下这一小节的内容,待读完本章以后再回过头来细读这一小节.

在上一小节我们介绍了概率的频率定义,这一定义仅适用于能在相同的条件下重复地进行试验的场合. 在下面两节我们还要介绍古典概率,几何概率和主观概率,它们也能适用于其他一些场合. 从不同的角度出发,确定概率的途径或许会不同,但是不管是通过那一个途径,被确定的概率应该满足一般的常情. 下面我们要介绍作为概率论的基础的柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出的公理体系,这一体系以公理的形式规定了事件之间,事件的概率之间必须满足的一些关系.

以事件为元素组成的集合称为**事件族**,以 $\mathcal{F}$ 记由全体事件组成的事件族. 这样,"A 是一个事件"就可以表示为 $A\in\mathcal{F}$. 由于关心的情况可能不同,使得即使对于同一个样本空间,被考虑的事件可能不同,从而事件族 $\mathcal{F}$ 也可能不一样. 在概率论中,虽然被考虑的事件族可以不同,但是都要求满足一些基本条件,精确地说,要求事件族 $\mathcal{F}$ 满足如下公理.

公理 1.1.1*

1) $\Omega\in\mathcal{F}$.

2) 若 $A\in\mathcal{F}$,则 $\bar{A}\in\mathcal{F}$.

3) 若 $A_k\in\mathcal{F}$, $k=1,2,\cdots$,则 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{F}$.

满足上面的公理的事件族 $\mathcal{F}$ 称为 **σ 代数**. 由上面的公理可以推出 $\mathcal{F}$ 具有以下性质.

性质 1.1.2*

1) $\varnothing\in\mathcal{F}$.

2) 若 $A_k\in\mathcal{F}$, $k=1,2,\cdots$,则 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{F}$.

证 由公理 1.1.1 和对偶律知

$$\varnothing=\bar{\Omega}\in\mathcal{F},\quad \bar{A}_k\in\mathcal{F},\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k\in\mathcal{F},\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k}\in\mathcal{F}.$$

确定了事件族 $\mathcal{F}$ 后,再去考虑 $\mathcal{F}$ 中的元素(事件)的**概率**(或称**概率测度**).事件 $A\in\mathcal{F}$ 的概率记为 $P(A)$.对应于频率的性质 1.1.1,要求概率满足如下公理.

公理 1.1.2

1) $P(A)\geqslant 0, A\in\mathcal{F}$.

2) $P(\Omega)=1$.

3) (**可列可加性(或完全可加性)**)若 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{F}$ 且互不相容,则

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k).$$

由上面的公理 1.1.2 可以推出概率的以下性质.

性质 1.1.3

1) $P(\varnothing)=0$.

2) $P(A)\leqslant 1, A\in\mathcal{F}$.

3) (**有限可加性**)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$ 且互不相容,则

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

证* 1)之证:在公理 1.1.2 的 3)中,设 $A_1=A_2=\cdots=\varnothing$,则

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\varnothing\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\varnothing),\ P(\varnothing)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

故 $P(\varnothing)=0$.

3)之证:设 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,根据公理 1.1.2 有

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P(\varnothing)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).\end{aligned}$$

2)之证: 由 3)和公理 1.1.2 的 2)可得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),$$

由公理 1.1.2 之 1)知 $P(\bar{A})\geqslant 0$,故

$$P(A)=1-P(\bar{A})\leqslant 1.$$

由公理 1.1.2 还可以推出概率的连续性.

命题 1.1.2*（概率的连续性）

1）如果事件列 $A_1, A_2, \cdots$ 单调上升，即 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，则

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

2）如果事件列 $A_1, A_2, \cdots$ 单调下降，即 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，则

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

证　1）令 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, B_3 = A_3 \backslash A_2, \cdots$，则 $B_1, B_2, \cdots$ 互不相容且

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

由概率的可列可加性和有限可加性得

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} P(B_i) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

2）因为 $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \cdots$，故由 1）和对偶律得

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = 1 - \lim_{k\to\infty} P(\bar{A}_k) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k\right)$$

$$= 1 - P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

称满足公理 1.1.1 和公理 1.1.2 的三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为**概率空间**. 同欧几里得几何的公理体系不对点，线，面作定义而仅规定它们间的相互关系一样，柯尔莫哥洛夫公理体系也不对事件和事件的概率作定义，而仅规定它们间的相互关系. 这个公理体系的意义在于它为一种普遍而严格的概率理论奠定了基础.

柯尔莫哥洛夫公理体系只是规定了概率必须满足的一些基本性质，利用它不能直接定出具体事件的概率. 上一小节已经介绍过如何利用频率估计概率（概率的频率定义），下面两节还将介绍其他一些定出事件的概率的途径.

§1.2　古典概型与几何概型

§1.2.1　古典概型

设样本空间 Ω 共有 n 个样本点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，又设 Ω 的每一个子集都是事件，即事件族 $\mathcal{F}$ 由 Ω 的全体子集组成（共有 $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = (1$

$+1)^n=2^n$ 个事件)，每个结果 ω_i 的出现都是等可能的. 以下是古典概率的定义.

定义 1.2.1(古典概率)　在上面的条件下，如果事件 A 包含 m 个结果(样本点)，则 A 的概率为

$$P(A)=m/n. \tag{1.2.1}$$

可以认为上面的定义来源于公理 1.1.2(及由此而得的性质 1.1.3). 事实上，可以从公理 1.1.2 出发推理：由于每个结果 ω_i 的出现都是等可能的，故设事件 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 有相同的概率，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}). \tag{1.2.2}$$

由有限可加性(性质 1.1.3 之 3))和公理 1.1.2 之 2)知

$$P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\Big)=P(\Omega)=1. \tag{1.2.3}$$

(上式的意义是各个事件 $\{\omega_i\}$ 发生的可能性之和为 1，这在直观上也是合理的). 从而由(1.2.2)和(1.2.3)式有

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=1/n.$$

如果事件 A 含有 m 个样本点，设 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$，则由有限可加性得

$$P(A)=P\Big(\bigcup_{j=1}^{m}\{\omega_{i_j}\}\Big)=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_m}\})=m/n.$$

读者不难自行验证以上得到的三元组$(\Omega,\mathcal{F},P)$满足公理 1.1.1 和公理 1.1.2，因而$(\Omega,\mathcal{F},P)$是一个概率空间. 以上的模型称为**古典概型**，这个模型适用于不少常见的概率论问题.

对于具体的问题，如果关于试验的信息对各个结果的出现没有“偏爱”，或者说，各个结果在关于试验的信息的面前是“地位平等”的，则可以假设等可能性条件(1.2.2)满足. 根据(1.2.1)式，对古典概型一般可以按照以下的步骤计算事件 A 的概率：确定样本空间 Ω(即确定全体样本点)，求出样本点的总数 $n=|\Omega|$，求出事件 A 所含的样本点的个数 $m=|A|$，于是事件 A 的概率就是

$$P(A)=m/n.$$

例 1.1.1(续)　样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件“掷出偶数点”，“掷出奇数点”，“掷出的点数不少于 5”和“掷出点 6”分别为 $A_1=\{2,4,6\}$，$A_2=\{1,3,5\}$，$A_3=\{5,6\}$和 $A_4=\{6\}$. 故

$$|\Omega|=6,\quad |A_1|=|A_2|=3,\quad |A_3|=2,\quad |A_4|=1,$$

$$P(A_1)=P(A_2)=3/6=1/2,\quad P(A_3)=2/6=1/3,\quad P(A_4)=1/6.$$

例 1.2.1 设口袋中有 7 个球,其中有 3 个白球和 4 个黑球. 从这个口袋中取球,每个球被取到的可能性都相同.

1) 每次取一个球,取后放回,共取两次. 求两次都取到黑球的概率.

2) 每次取一个球,取后不放回,共取两次. 求两次都取到黑球的概率.

解 1) 有放回地取两次,每次都可能取到口袋中的 7 个球中的任一个,取球两次会有 $7 \times 7 = 49$ 个结果,每个结果的出现都是等可能的,样本点总数为 49.

如果两次都取到黑球,则每次都可能取到口袋中的 4 个黑球中的任一个,取球两次会有 $4 \times 4 = 16$ 个结果,事件 A"两次都取到黑球"包含 16 个样本点. 故所求的概率是

$$P(A) = 16/49.$$

2) 无放回地取两次,第一次可能取到口袋中的 7 个球中的任一个,第二次可能取到剩下的 6 个球中的任一个,取球两次会有 $7 \times 6 = 42$ 个结果,每个结果的出现都是等可能的,样本点总数为 42.

如果两次都取到黑球,则第一次可能取到口袋中的 4 个黑球中的任一个,第二次可能取到剩下的 3 个黑球中的任一个,取球两次会有 $4 \times 3 = 12$ 个结果,事件 B"两次都取到黑球"包含 12 个样本点. 故所求的概率是

$$P(B) = 12/42 = 2/7.$$

上例中的第一种取球方式称为**有放回抽取**,第二种取球方式称为**无放回抽取**. 从上例可以看到,抽取的方式不同,计算概率的方式也不同.

对于较复杂的情况,在计算(1.2.1)式的 n 和 m 的时候,常常要运用多种技巧,要特别注意避免重复计算和漏算.

下面再举几个计算古典概型中事件的概率的例子.

例 1.2.2 箱中放有 8 个球,其中有 3 个是白球,5 个是黑球. 从中任意取出 4 个. 求恰好取到 1 个白球和 3 个黑球的概率.

解 这里的试验是从 8 个球中任意取出 4 个,设从这 8 个球中选出 4 个球的每一个组合都是样本点,这样的组合的总数为 C_8^4,所以样本空间有 C_8^4 个样本点. 从 3 个白球中取出 1 个白球的组合数为 C_3^1,从 5 个黑球中取出 3 个黑球的组合数为 C_5^3,故从这 8 个球中取出 1 个白球和 3 个黑球的组合数为 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^3$,所以事件 A"恰好取到 1 个白球和 3 个黑球"含 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^3$ 个样本点. 因而由(1.2.1)式得所求的概率为

$$P(A) = \mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^3/\mathrm{C}_8^4 = 3/7.$$

例 1.2.3 有 n 位客人,每位客人都被任意地分配到 $N(n \leqslant N)$ 间房间中的