# 复变函数疑难分析与解题方法

大学数学学习方法丛书

基本内容归纳提炼

学习方法疑难分析

典型例题解答技巧

考研知识总结升华

FUBIAN HANSHU YINAN FENXI YU JIETI FANGFA

孙清华 孙昊

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

大学数学学习方法丛书

# 复变函数
## 疑难分析与解题方法

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社
中国·武汉

本书是《大学数学学习方法丛书》之一，是学习复变函数课程的一本很好的辅导书.本书按复变函数教学大纲编写，内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射.本书对基本概念、方法与技巧中的疑难问题作了详尽的分析解答，对问题的证明与计算引入了大量例题进行演绎比较、归纳总结，非常有益于读者的学习(本书典型例题中还包含了西安交大编《复变函数》中的全部习题).

相信本书能成为您的良师益友，欢迎您选择本系列丛书.

**图书在版编目(CIP)数据**

复变函数疑难分析与解题方法/孙清华　孙 昊.-2版.—武汉：华中科技大学出版社，2010年1月

ISBN 978-7-5609-5926-9

Ⅰ.复…　Ⅱ.①孙…　②孙…　Ⅲ.复变函数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第238650号

**复变函数疑难分析与解题方法**　　孙清华　孙　昊

责任编辑：徐正达　　封面设计：潘　群
责任校对：张　琳　　责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国・武汉)
武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)87557437
录　排：武汉佳年华科技有限公司
印　刷：华中科技大学印刷厂

开本：710mm×1000mm　1/16　　印张：14.25　　字数：400 000
版次：2010年1月第2版　　印次：2010年1月第5次印刷　　定价：20.00元
ISBN 978-7-5609-5926-9/O・522

# 前　言

复变函数是高等学校的一门重要的数学基础课，也是自然科学与工程技术中常用的数学工具.它是微分方程、奇异积分方程、计算数学和概率论等数学分支的主要解析方法，又是空气动力学、流体力学、弹性力学、电磁学和热力学等学科进行几何定性研究的重要方法.因此，学好复变函数课程对于在校大学生和科学技术工作者是十分重要的.本书就是为了帮助广大读者学好复变函数而编写的.

复变函数的许多基本概念，如函数、极限、连续、导数和积分在形式上与微积分几乎相同，但复变函数却有本质上的深化，尤其是在方法和技巧上，更有着显著的不同.读者在学习中要特别注意它们之间的联系、发展和变化，理解概念、掌握方法、熟悉技巧.

本书按照《复变函数课程教学大纲》要求编写，在概念与例题选编上难度都略有提高.为了使读者学习和使用起来更加方便，本书采用了以章节为序的编写方式.每节分三个部分：主要内容部分对概念和方法进行了归纳和凝练，强调了读者应该注意的问题；疑难分析部分针对读者在理解概念和掌握方法中可能出现的问题进行了解剖、分析、比较和论证，尽可能使读者消除疑惑、解决困难；本书主要内容典型例题分析部分引入了大量的例题，对分析问题、研究问题、计算数据和求取结果的方法作了大量的介绍和必要的比较，为读者掌握方法、熟悉技巧创造了很好的条件.只是限于篇幅的原因，许多可以一题多解的问题我们只能列出一两种方法，读者可以利用本书的知识尝试以多种方法来解题，这对学习会产生更好的效果(本书典型例题中题号前加“•”的是西安交通大学数学教研室编《复变函数》中的习题).

相信本书能给读者以帮助，能成为读者的良师益友.

本书是《大学数学学习方法丛书》之一，欢迎读者选用本系列丛书.本书在编写出版中，得到华中科技大学出版社的大力支持，编辑们作了大量精细的工作，在此向他们表示衷心的感谢.

欢迎读者和同行对本书存在的问题提出宝贵意见.

孙清华　孙　昊

2010 年元月

# 目　　录

# 第一章　复数与复变函数

## 第一节　复数的概念与几何表示

### 主要内容

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 $x, y$ 为任意实数，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 称为虚单位. 又记 $x = \mathrm{Re}(z)$，$y = \mathrm{Im}(z)$，它们分别称为复数 $z$ 的实部与虚部.

**一、复数的各种表示法**

**1.** 复数的复平面表示　复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与坐标平面上的点 $(x, y)$ 构成一一对应的关系，如图 1.1 所示. 用点 $(x, y)$ 表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的方法，称为复数的复平面表示法. 此时，直角坐标平面称为复平面或 $z$ 平面，$x$ 轴称为实轴，$y$ 轴称为虚轴，点 $z(x, y)$ 即复数 $z$. 也记为复平面 $\boldsymbol{C}$.

**2.** 复数的向量表示　在复平面上，复数 $z$ 又与从原点指向点 $z = x + \mathrm{i}y$ 的向量构成一一对应，所以复数 $z$ 可以用向量 $\overrightarrow{oP}$ 表示. 向量的长度称为 $z$ 的模；当 $z \neq 0$ 时，以 $x$ 轴正向为始边，以 $\overrightarrow{oP}$ 为终边的角（弧度）称为 $z$ 的辐角. 分别记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \mathrm{Arg}z = \theta + 2k\pi\ (k\ 为任意整数)$$

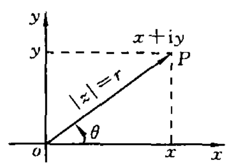


图 1.1

辐角有无穷多个，其中满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 $\theta_0$ 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记为 $\theta_0 = \arg z$. $\mathrm{Arg}z = \theta + 2k\pi$，$\theta$ 为任一辐角. $z = 0$ 时，辐角可以任取.

**3.** 复数的极坐标表示　利用直角坐标 $(x, y)$ 与极坐标 $(r, \theta)$ 之间的关系，将复数 $z$ 表示为三角函数表示式

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

其中

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \theta = \arg z.$$

**4.** 复数的指数表示式　应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，复数 $z$ 可表示为 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，称为复数的复指数表示式.

复数在不同的运算中可选择不同的表示式进行运算，以求简捷、适当.

**二、复数的运算**

**1.** 相等　两个复数 $z_1$ 和 $z_2$，当且仅当实部与虚部分别相等时才相等.

**2.** 对于两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，有

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2),$$

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2),$$

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$z$ 分别称为 $z_1$ 和 $z_2$ 的和、差、积、商. 在商中，$z_2 \neq 0$.

**3.** 实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数，它有如下运算性质：

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\quad \bar{\bar{z}} = z;$$

$$z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = |z|^2;\quad z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z),\quad z - \bar{z} = \mathrm{i}2\mathrm{Im}(z).$$

**4.** 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和. 即若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则 $z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$.

**5.** 两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差. 即若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2 - \theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_2 - \theta_1)] = \frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)}.$$

**6.** 复数的乘幂与方根　若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta),\quad w = \sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

这里 $k = 0,1,\cdots,n-1$. $w$ 的 $n$ 个值恰为以原点为中心 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周的内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点. 当 $k = 0$ 时，$w_0$ 称为主值.

## 疑难分析

**1. 复数为什么不能比较大小?**

**答**　实数能比较大小，是因为实数是有序的；而复数是无序的，所以不能比较大小.

因为复数是实数的推广，则若复数有大小，其大小关系应与实数中大小关系保持一致. 不妨取复数 0 和 i 加以讨论：

因为 $\mathrm{i} \neq 0$，设 $\mathrm{i} > 0$，则 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} > \mathrm{i}\cdot 0 = 0$，得 $-1 > 0$，显然不成立；设 $\mathrm{i} < 0$，则 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} > \mathrm{i}\cdot 0 = 0$(不等式两边同乘以小于零的数，不等号反向)，也有 $-1 > 0$，所以，i 与 0 无法比较大小. 从而知，两个复数是不能比较大小的.

然而，复数的模、实部和虚部都是实数，辐角也是实数，是有序的. 因此，可以比较两个复数的模、实部、虚部和辐角的大小. 在这个意义上，也称复数是部分有序的.

**2. 怎样确定辐角的主值 $\arg z$?**

**答**　因为复数 $z$ 的辐角 $\mathrm{Arg}z = \theta$，$\tan\theta = y/x$. 而 $-\pi < \arg z = \theta_0 \leqslant \pi$. 所以，$\theta_0$(见图 1.2) 按下列关系式来确定：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0,\ y > 0; \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y > 0; \\ \pi, & x < 0,\ y = 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0; \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

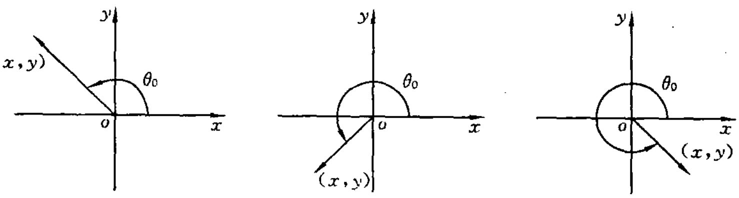


图 1.2

除 0 以外的复数都有确定的辐角. 0 的辐角可以是任意的.

**3. 复数可以用向量表示,是否就此可以认为复数的运算与向量的运算相同?**

**答**　不能. 复数的运算与向量的运算有相同之处也有不同之处.

如复数运算与向量运算有相同的加法运算和数乘运算,但向量运算有数量积、向量积和混合积,复数则没有;复数运算有乘、除、乘幂和方根,向量则没有. 复数相乘的几何意义是将复数 $z_1$ 的模 $|z_1|$ 伸缩 $|z_2|$ 倍,再将其辐角按逆时针方向旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$,即先作一个相似变换,再作一个旋转变换,而向量的数量积与向量积都不是这样的.

**4. 怎样理解两个复数 $z_1$ 与 $z_2$ 的乘积和商的辐角公式?**

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2,\quad \mathrm{Arg}(z_1/z_2) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

**答**　由于上述两个公式两边的辐角都有无穷多个值,因此等式的意义是:任意给定一个等式右边两个多值函数一对可能取的值,左边多值函数也必有一个值使这个等式成立. 反之也是这样.

也就是说,等式的值是在全体意义上的相等,而不是某一组值的相等. 例如,若 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 为 $\mathrm{Arg}z_1$ 和 $\mathrm{Arg}z_2$ 的任一对选定值,则 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 中一定有一个 $\theta$ 存在,使得 $\cos\theta = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $\sin\theta = \sin(\theta_1 + \theta_2)$. $\theta$ 不一定就是 $\theta_1 + \theta_2$,而可以是使 $\theta + 2k\pi = \theta_1 + \theta_2$ 中的一个. 反之也是这样.

**5. 复数所具有的运算性质是否使复数集合成为复数域?**

**答**　是. 复数的运算具有以下规律:

(1) 若 $z_1, z_2$ 是复数,则 $z_1 + z_2$ 也是复数.

(2) 满足对加法的结合律与交换律,即对于复数 $z_1, z_2, z_3$,有

$$z_1 + (z_1 + z_2) = (z_1 + z_2) + z_3,\quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

(3) 关于加法存在零元素. 对于任意复数 $z$,有

$$0 + z = z + 0 = z.$$

(4) 关于加法存在逆元素. 对于任意复数 $z$,存在复数 $-z$,使得

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

(5) 若 $z_1, z_2$ 是复数,则 $z_1z_2$ 也是复数.

(6) 满足对乘法的结合律与交换律,即对于复数 $z_1, z_2, z_3$,有

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3,\quad z_1z_2 = z_2z_1.$$

(7) 关于乘法存在单位元素 1,对于任意复数 $z$,有

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z.$$

(8) 关于乘法存在逆元素. 对于任意复数 $z \neq 0$,存在复数 $1/z$,使得

$$z \cdot 1/z = 1/z \cdot z = 1.$$

(9) 满足对加法与乘法的分配律,即对于任意复数 $z_1, z_2$ 和 $z_3$,有

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

所以,全体复数构成一个复数域.

# 典 型 例 题

首先,作为基本概念,要熟悉复数的各种表示形式及其相互转换,特别是辐角主值的确定. 其

次，复数运算必须遵循复数的运算规律，注意复数运算与实数运算的不同点.

**一、复数的概念**

**例 1** 求下列复数的模与辐角：

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$； ·(2) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$； ·(3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$；

(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n$； ·(5) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$； (6) $\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$.

**解** (1) $$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2,\quad \arg z=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

(2) $$\frac{1}{3+2\mathrm{i}}=\frac{3-2\mathrm{i}}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}=\frac{3}{13}+\left(\frac{-2}{13}\right)\mathrm{i},$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(\frac{-2}{13}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad \arg z=-\arctan\frac{2}{3}.$$

(3) $$\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=-\left(-2+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)(2-5\mathrm{i})=-\frac{7}{2}-13\mathrm{i},$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2+(-13)^2}=5\,\frac{\sqrt{29}}{2},\quad \arg z=\arctan\frac{26}{7}-\pi.$$

(4) $$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^n=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right),$$

$$|z|=1,\quad \arg z=\frac{n\pi}{3}+2k\pi\ \left(\text{取使}-\pi<\frac{n\pi}{3}+2k\pi\leqslant\pi\text{ 的 }k\right).$$

(5) $$\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}=(-1)^4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}=1-3\mathrm{i},$$

$$|z|=\sqrt{1+(-3)^2}=\sqrt{10},\quad \arg z=-\arctan 3.$$

(6) $$\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{7-\mathrm{i}}{7+\mathrm{i}}=\frac{48}{50}-\frac{14}{50}\mathrm{i},$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{48}{50}\right)^2+\left(\frac{-14}{50}\right)^2}=1,\quad \arg z=-\arctan\frac{7}{24}.$$

$|z|$ 还可由以下方法求得：

$$|z|^2=z\bar{z}=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\frac{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=1\Longrightarrow|z|=1.$$

$$|z|=\left|\frac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right|\left|\frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right|=1\times1=1\ (\text{共轭复数的模相等}).$$

·**例 2** 复数 $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 的模 $|z|=$ ______，辐角 $\arg z=$ ______.

**解** $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{-5}{2}\right)\mathrm{i}$，故 $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$，$\arg z=-\arctan\dfrac{5}{3}$.

·**例 3** 当 $x,y$ 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 成立？

**解** 将等式右边化为 $u+\mathrm{i}v$，比较两边实部与虚部，建立方程组求解. 由原式得

$$x+1+\mathrm{i}(y-3)=(5+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=2+8\mathrm{i},$$

故有
$$\begin{cases}x+1=2,\\ y-3=8,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x=1,\\ y=11.\end{cases}$$

**例 4** 求满足下列条件的复数 $z$：

(1) $z+|z|=2+\mathrm{i}$； (2) $z=3+a\mathrm{i}$，且 $|z-2|<2$；

(3) $(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$； (4) $1\leqslant z+10/z\leqslant 6$ 为实数，$x,y$ 为整数.

**解**　(1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $x+\mathrm{i}y+\sqrt{x^2+y^2}=2+\mathrm{i}$.

由 $x+\sqrt{x^2+y^2}=2, y=1$,得 $x=3/4$,故 $z=3/4+\mathrm{i}$.

(2) 因为 $|z-2|=|3+a\mathrm{i}-2|=\sqrt{1+a^2}<2$,所以,$a$ 的值可取$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 间任一实数,$z$ 有无穷多个.

(3) 因为 $\bar{z}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$,所以 $z=2+\mathrm{i}$.

(4) 设 $z=x+\mathrm{i}y$ ($x,y\in\mathbf{R}$,且 $x,y$ 不同时为零),则

$$z+\frac{10}{z}=x+\mathrm{i}y+\frac{10}{x+\mathrm{i}y}=\left(x+\frac{10x}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}\left(y-\frac{10y}{x^2+y^2}\right).$$

由条件知 $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$.

当 $y=0$ 时,满足 $1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}=x+\dfrac{10}{x}\leqslant 6$ 的 $x$ 不存在.

当 $x^2+y^2=10$ 时,由 $1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}=2x\leqslant 6$ 知,$\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3$,故 $x$ 可取 1,2,3,$y$ 可取$\pm 3$,$\pm 1$. 于是,满足条件的复数为 $1+3\mathrm{i}$, $1-3\mathrm{i}$, $3+\mathrm{i}$, $3-\mathrm{i}$.

**例 5**　化简 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}}$, $|x|\geqslant 1$.

**解**　设原式 $=u+\mathrm{i}v$,则 $1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}=u^2-v^2+2\mathrm{i}uv$,由

$$u^2-v^2=1,\quad 2uv=2x\sqrt{x^2-1},$$

解得 $u=\pm x, v=\pm\sqrt{x^2-1}$,所以

$$\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}}=\pm(x+\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}).$$

**例 6**　求下列复数的三角表示式与指数表示式:

(1) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　(2) $1+\mathrm{i}\tan\theta$ $(\pi<\theta<2\pi)$;　(3) $-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$;

(4) $\dfrac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}$;　(5) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

**解**　(1) 因为 $|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=2, \arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\pi/3$,所以

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}.$$

(2) 因为 $|1+\mathrm{i}\tan\theta|=\sqrt{1+\tan^2\theta}=-\sec\theta, \arg z=\dfrac{3}{2}\pi-\theta$,所以,当 $\pi<\theta<2\pi$ 时,有

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=-\frac{1}{\cos\theta}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right]=-\frac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}.$$

(3) 因为 $|-\sqrt{12}-2\mathrm{i}|=\sqrt{12+4}=4, \arg z=-\dfrac{5}{6}\pi$,所以

$$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}.$$

(4) 先将分子、分母分别用指数式表出,则

$$\frac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\varphi})^2}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi})^3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}19\varphi}=\cos 19\varphi+\mathrm{i}\sin 19\varphi.$$

(5) 因为 $|1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi|=\sqrt{2(1-\cos\varphi)}=2\sin\dfrac{\varphi}{2}$,所以

$$\arg(1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\arctan\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\arctan\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}.$$

故 $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\right]=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}$　$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

也可以这样得出结果：

$$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

·**例 7** 对任何 $z$，$z^2=|z|^2$ 是否成立？若成立就给出证明．若不成立，对哪些 $z$ 值才成立？

**解** 因为 $z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$， $|z|^2=x^2+y^2$，
要两式相等，仅当 $y=0$ 时成立．所以当 $z$ 为实数时，$z^2=|z|^2$ 成立．

·**例 8** 当 $|z|\leqslant 1$ 时，求 $|z^n+a|$ 的最大值，其中 $n$ 为正整数，$a$ 为复数．

**解** 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则 $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$，得

$$|z^n+a|\leqslant|z^n|+|a|,$$

因 $|z|\leqslant 1$，故 $|z^n|\leqslant 1$，于是 $|z^n+a|\leqslant 1+|a|$．

**例 9** 设 $\arg(z+2)=\pi/3$，$\arg(z-2)=5\pi/6$，求 $z$．

**解** 设

$$z+2=r_1\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}r_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}r_1,$$

$$z-2=r_2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+\frac{1}{2}\mathrm{i}r_2,$$

则

$$z=\left(\frac{1}{2}r_1-2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}r_1=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2\right)+\frac{1}{2}\mathrm{i}r_2.$$

比较实部与虚部，得

$$\frac{1}{2}r_1-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}r_1=\frac{1}{2}r_2,$$

解得 $r_1=2$．于是 $z=(1-2)+\sqrt{3}\mathrm{i}=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

**二、复数的代数运算**

复数的代数运算包括和、差、积、商，还包括乘幂和方根．为了使运算更加简捷和准确，应该选择合适的表示式来表示复数．有时还可以由几何意义来讨论复数的代数运算．

·**例 10** 将复数 $z$ 乘以 $-\mathrm{i}$，$z$ 的模与辐角会(　　)．

(A) 模不变，辐角减少 $\pi/2$；　　(B) 模不变，辐角增加 $\pi/2$；

(C) 模不变，辐角也不变；　　(D) 模增大，辐角不改变．

**解** 因为 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$，$-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$，所以

$$z\cdot(-\mathrm{i})=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi/2)},$$

即，此时 $z$ 的模不变，辐角减少 $\pi/2$．故选(A)．

**例 11** 计算 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$.

**解法 1**

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}=\left(\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}\right)^{10}=\left(\frac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}\right)^{10}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{10}=\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3\right]^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$=\left(\frac{8}{8}\right)^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

**解法 2**

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3},$$

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3},$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}=\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}}\right)^{10}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})^{10}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}20\pi/3}=\cos\frac{20}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{20}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

**例 12**　计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

**解**　因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/4},\ k=0,1,2,3.$$

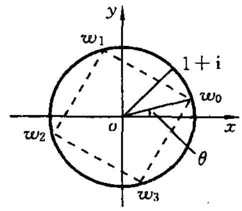

图 1.3

其四个根为

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),\quad w_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right),$$

这四个根是以原点为中心、半径为$\sqrt[8]{2}$ 的圆内接正四边形的四个顶点(见图 1.3)，$w_0$ 的辐角 $\theta=\pi/16$.

**例 13**　求方程 $z^3+z^2+z+1=0$ 的根，并将 $z^3+z^2+z+1$ 分解因式.

**解**　因为$(z-1)(z^3+z^2+z+1)=z^4-1$，而 $z-1=0$ 的根为 $z_0=1$，则 $z^4-1=0$ 的其余三个根即为方程 $z^3+z^2+z+1=0$ 的根.

由 $z^4-1=0$，得 $z=\sqrt[4]{1}$. 因为 $1=\cos0+\mathrm{i}\sin0$，所以，$z^4-1=0$ 的四个根(见图 1.4) 为

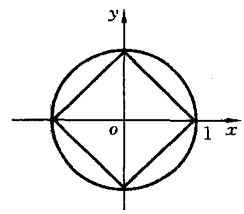

图 1.4

$$z_0=\cos\frac{0}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{0}{4}=1,\quad z_1=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i},$$

$$z_2=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1,\quad z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}=-\mathrm{i},$$

于是，$z^3+z^2+z+1=0$ 的根为 $\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$，且

$$z^3+z^2+z+1=(z-\mathrm{i})(z+1)(z+\mathrm{i}).$$

**例 14**　解方程$(1+z)^5=(1-z)^5$.

**解**　因为 $z=1$ 不是方程的根，将上式变形，即

$$w^5=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1=\cos0+\mathrm{i}\sin0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\pi},$$

则由复数的方根知，$w^5=1$ 的根为 $1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5},\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5},\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/5},\mathrm{e}^{\mathrm{i}8\pi/5}$.

设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$\alpha=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$，由 $w=\frac{1+z}{1-z}$，得

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha-1+\mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\alpha+1+\mathrm{i}\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

所以，方程的根为 $z=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2}$，其中 $\alpha=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$.

**例 15**　已知 $z^3=8$，求 $z^3+z^2+2z+2$ 的值.

**解**　因为 $z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)=0$，所以 $z=2$ 或 $z^2+2z+4=0$，于是

$$z^3+z^2+2z+2=8+(z^2+2z+4)-2=8-2=6.$$

**例 16**　解方程 $z^2-4\mathrm{i}z-(4-9\mathrm{i})=0$.

**解**　原方程 $=z^2-4\mathrm{i}z+(2\mathrm{i})^2+9\mathrm{i}=0$，得

$$(z-2\mathrm{i})^2=-9\mathrm{i}\Longrightarrow z=2\mathrm{i}+\sqrt{-9\mathrm{i}}.$$

因为，由棣美弗公式

$$\sqrt{-9\mathrm{i}}=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right]=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}).$$

故 $$z=2\mathrm{i}+\sqrt{-9\mathrm{i}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2\mp\frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

**例 17** 解方程 $\bar{z}=z^{n-1}$ ($n$ 为自然数).

**解** 若 $n=1$,则 $\bar{z}=1$,得 $z=1$; 若 $n=2$,则 $\bar{z}=z$,$z$ 为全体实数;

若 $n\geqslant 3$,则 $|\bar{z}|=|z^{n-1}|$ 或 $|z|=|z|^{n-1}$,得 $|z|=0$ 或 $|z|=1$.

由 $|z|=0$,得 $z=0$.

由 $|z|=1$,知 $z\bar{z}=z^n$,即 $z^n=1$. 于是 $z=\sqrt[n]{1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$. 当 $k=0$ 时,$z=1$.

**例 18** 解方程组 $\begin{cases}z_1+2z_2=1+\mathrm{i},\\3z_1+\mathrm{i}z_2=2-3\mathrm{i}.\end{cases}$

**解** 将第一式乘以 3 再减去第二式,得

$$(6-\mathrm{i})z_2=1+6\mathrm{i}\Longrightarrow z_2=\frac{1+6\mathrm{i}}{6-\mathrm{i}}=\mathrm{i}.$$

代回第二式,得 $z_1=1-\mathrm{i}$.

·**例 19** 求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$; (2) $(1+\mathrm{i})^6$; (3) $\sqrt[6]{-1}$; (4) $(1-\mathrm{i})^{1/3}$.

**解** (1) 原式$=(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6})^5=32\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}=32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$.

(2) 原式 $=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4})^6=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-8\mathrm{i}$.

(3) 原式 $=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)/6}$,$k=0,1,2,\cdots,5$. 六个值分别为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},\ \mathrm{i},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2},\ -\mathrm{i},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

(4) 原式 $=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{(-\pi/4+2k\pi)\mathrm{i}})^{1/3}$,$k=0,1,2$. 三个值分别为

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),\quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

·**例 20** 若$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$,试求 $n$ 的值.

**解** 由已知等式可得出

$$2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{-n\pi}{4}\right),$$

即 $$\sin\frac{n\pi}{4}=\sin\frac{-n\pi}{4},\frac{n\pi}{4}=-\frac{n\pi}{4}+2k\pi,n=4k,\quad k\text{ 为整数}.$$

·**例 21** (1) 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根; (2) 求微分方程 $y'''+8y=0$ 的一般解.

**解** (1) 由 $z^3+8=0$,得 $z=(-8)^{1/3}=2\mathrm{e}^{(\pi+2k\pi\mathrm{i})/3}$,$k=0,1,2$,故 $z=1+\mathrm{i}\sqrt{3},-2,1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

(2) 由特征方程 $r^3+8=0$,得 $r=-2,1-\sqrt{3}\mathrm{i},1+\sqrt{3}\mathrm{i}$. 故

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^x(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x),\ \text{其中 } C_1,C_2,C_3 \text{ 为任意常数}.$$

### 三、复数的等式与不等式的证明

证明关于复数的等式与不等式,是复数概念的一个难点,读者要善于借助 $z$ 的不同表示式、$z$ 与 $1/z$ 的关系、$\bar{z}$ 的性质,以及一些实数中的不等式和图形的几何性质来证明.

**例 22** 若 $|z|=1$,证明:对任何复数 $a$ 和 $b$,有 $\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$.

**证** 利用 $|z|=1$,则 $z=1/\bar{z}$,于是

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\,\bar{z}}\cdot\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{az+b}}\right|\cdot\frac{1}{|z|}=1.$$

**例 23** 设 $z+z^{-1}=2\cos\theta\ (z\neq0,\theta$ 是 $z$ 的辐角),证明:$z^n+z^{-n}=2\cos n\theta\ (z\neq0)$.

**证** 由题设条件,考虑用复数的指数形式或三角形式,又由求证的等式考虑使用棣美弗公式.所以,设

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

则 $$z^{-1}+z=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

比较 $z^{-1}+z=2\cos\theta$,得方程组

$$\begin{cases}r+1/r=2,\\ r-1/r=0,\end{cases}\Longrightarrow r=1\Longrightarrow z=\cos\theta+i\sin\theta,\quad z^{-1}=\cos\theta-i\sin\theta$$

由棣美弗公式,得

$$z^n+z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^{-n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta.$$

· **类题** 如果 $z=e^{it}$,证明:(1) $z^n+1/z^n=2\cos nt$; (2) $z^n-1/z^n=2i\sin nt$.

**证** (1) $$z^n+1/z^n=e^{int}+e^{-int}=2\cdot(e^{int}+e^{-int})/2=2\cos nt.$$

(2) $$z^n-1/z^n=e^{int}-e^{-int}=2i\cdot(e^{int}-e^{-int})/2i=2i\sin nt.$$

**例 24** 证明:$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$, $\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$.

**证** 利用棣美弗公式来证.由

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

和 $$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^3&=\cos^3\theta+i3\cos^2\theta\sin\theta+i^2 3\sin^2\theta\cos\theta+i^3\sin^3\theta\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),\end{aligned}$$

知 $$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,\quad \sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

· **例 25** 证明:

(1) $|z|^2=z\bar{z}$; (2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; (3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;

(4) $\bar{\bar{z}}=z$; (5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2\neq0)$; (6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

**证** 设 $z=x+iy,z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,则:

(1) $|z|^2=x^2+y^2,z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$,故 $|z|^2=z\bar{z}$.

(2) $$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)}=x_1\pm x_2-i(y_1\pm y_2),$$

$$\bar{z}_1\pm\bar{z}_2=(x_1-iy_1)\pm(x_2-iy_2)=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2),$$

故 $$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2.$$

(3) $$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\bar{z}_1\bar{z}_2=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1),$$

故 $$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2.$$

(4) $$\bar{\bar{z}}=\overline{(x-iy)}=x+iy=z.$$

(5) $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)}=\frac{\overline{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2},$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2},$$

故 $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

(6) $$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}[(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)]=\frac{1}{2}(2x)=x=\mathrm{Re}(z),$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y)]=\frac{1}{2\mathrm{i}}(2\mathrm{i}y)=y=\mathrm{Im}(z).$$

·**例 26**　证明下列各题：

(1) 任何有理分式函数 $R(z)=P(z)/Q(z)$ 可以化为 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，其中 $x$ 和 $y$ 为具有实系数的 $x$ 和 $y$ 的有理分式函数；

(2) 如果 $R(z)$ 为题(1) 中的有理分式函数，但具有实系数，那么 $R(\bar{z})=x+\mathrm{i}y$；

(3) 如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 的根，那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根.

**解**　(1) 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则 $z^k=r^k(\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta)$，令 $a_{n-k}\cos k\theta=A_{n-k}$，$a_{n-k}\sin k\theta=B_{n-k}$，于是

$$\begin{aligned}P(z)&=A_0r^n+A_1r^{n-1}+\cdots+A_n+\mathrm{i}(B_0r^n+B_1r^{n-1}+\cdots+B_n)\\&=A+\mathrm{i}B\ (A,B\text{ 为具有实系数的有理函数}).\end{aligned}$$

同理
$$\begin{aligned}Q(z)&=C_0r^m+C_1r^{m-1}+\cdots+C_m+\mathrm{i}(D_0r^m+D_1r^{m-1}+\cdots+D_m)\\&=C+\mathrm{i}D\ (C,D\text{ 为具有实系数的有理函数}),\end{aligned}$$

于是
$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A+\mathrm{i}B}{C+\mathrm{i}D}=x+\mathrm{i}y,$$

其中 $x,y$ 为具有实系数的有理分式函数.

(2) $$R(\bar{z})=P(\bar{z})/Q(\bar{z})=\overline{P(z)}/\overline{Q(z)}=(\overline{P(z)/Q(z)})=R(z)=x+\mathrm{i}y.$$

(3) $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$，$a_i$ 为实数.

若 $z=a+b\mathrm{i}$ 是方程的根($0=0+\mathrm{i}0$)，则由题(1)、(2) 知

$$R(\bar{z})=a_0\bar{z}^n+a_1\bar{z}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\bar{z}+a_n=0-\mathrm{i}0=0,$$

故 $\bar{z}=a-\mathrm{i}b$ 也是方程的根.

**例 27**　设 $\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}=a+\mathrm{i}b$，其中 $a,b,x,y$ 均为实数. 证明：$a^2+b^2=1$.

**证**　先求出 $a,b$ 的 $x,y$ 的表达式. 因为

$$\frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}=\frac{(x+\mathrm{i}y)^2}{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)}=\frac{x^2-y^2+2\mathrm{i}xy}{x^2+y^2}=a+\mathrm{i}b.$$

比较系数，得
$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=a,\quad \frac{2xy}{x^2+y^2}=b.$$

于是 $$a^2+b^2=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=1.$$

**例 28**　设 $z=x+\mathrm{i}y$，证明：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$.

**证**　不等式左边等价于

$$\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2\leqslant|z|^2=x^2+y^2,$$

即
$$x^2+y^2+2|x||y|\leqslant2(x^2+y^2)\Longrightarrow(|x|-|y|)^2\geqslant0,$$

所以，左边不等式成立.

不等式右边等价于

$$|z|^2=x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2=x^2+2|x||y|+y^2,$$

即 $2|x||y|>0$，所以，右边不等式成立. 故题给不等式成立.

**例 29**　设 $|z_0|<1$，证明：若 $|z|<1$，则 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|<1$.