高等学校高等数学教学系列丛书

高等数学典型问题剖析与解题技能培养

GAODENGSHUXUE

主　编　米洪海　方　耀　潘晓春
副主编　王志京　王　艳　李翠环

天津科学技术出版社

高等学校高等数学教学系列丛书

高等数学典型问题剖析与解题技能培养

主　编　米洪海　方　耀　潘晓春
副主编　王志京　王　艳　李翠环

TJKJ 天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型问题剖析与解题技能培养/米洪海等主编.—天津:天津科学技术出版社,2005
(高等学校高等数学教学系列丛书/米洪海等主编)
ISBN 7-5308-4013-4

Ⅰ.高… Ⅱ.米… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 081401 号

责任编辑:吉 静
版式设计:雒桂芬
责任印制:王 莹

天津科学技术出版社出版
出版人:胡振泰
天津市西康路 35 号 邮编 300051
电话(022)23332393(发行部) 23332390(市场部) 27217980(邮购部)
网址:www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
河北省昌黎县第一印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 18.5 字数 331 000
2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定价:25.00 元

高等学校高等数学教学系列丛书

编写委员会

总主编 米洪海 金少华 于新凯

编 委 (按姓氏笔画排序):

于新凯 马俊霞 王志京 王 艳 方 耀
卢玉文 闫广霞 李秀军 李志国 李翠环
李慧云 米洪海 刘丽娜 刘淑平 金少华
程俊明 陈德强 谭春晓 穆军芬 潘晓春

前　　言

高等数学是高等工科院校一门十分重要的基础理论课程。掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,对学生学好后续课程是至关重要的,同时,对提高学生的综合素质以及今后的发展也起着重要的作用。

学好高等数学必须同时注意两个方面,其一是加强对基本知识的学习,做到概念清、理论明、计算熟;其二是注重解题能力的训练与培养。基于这种考虑,我们根据长期的教学实践,参考了大量有关资料,编写了《高等数学典型问题剖析与解题技能培养》。

本书与同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)相配合,共安排23讲。每讲含主要内容、教学要求、思考问题、典型题分析、练习题及其解答等六部分。“主要内容”是各讲涉及到的相关内容;“教学要求”的主要依据是教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会颁布的工科类本科数学基础课程教学基本要求和现行教学大纲;“思考问题”是与各讲内容相关的典型疑难问题剖析;“典型题分析”精选了有代表性的题目,通过分析、解答,归纳解题思路与技巧,培养学生分析问题和解决问题的能力;“练习题”的选取既注意培养学生的基本解题技巧,又注意培养综合应用能力。

本书具有相对独立性,既可作为高等数学的学习指导书,又可作为报考工科硕士研究生的复习参考资料。

本书编者及具体分工如下:米洪海(第一章),闫广霞(第二章),李秀军(第三章),卢玉文(第四章),潘晓春(第五章),刘淑平(第六章、第十一章第一讲),王艳(第七章),方耀(第八章),于新凯(第九章),王志京(第十章第一、二讲),刘丽娜(第十章第三讲),程俊明(第十一章第二、三讲),金少华(第十二章)。编写工作由米洪海主持、统稿。

本书的出版得到了河北工业大学副校长展永教授、理学院院长刘

国欣教授、教务处处长范顺成教授、丁会利教授等的大力支持。天津科学技术出版社的吉静同志为该书的出版付出了大量心血。在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,虽然我们尽了最大努力,但书中仍难免存在错误与不妥之处,恳请读者批评指正。

编著者

2005.6

目　　录

第一章　极限与连续……………………………………………………（ 1 ）

第一讲　函数、极限及其运算 ……………………………………………（ 1 ）

第二讲　极限存在准则，函数的连续性 …………………………………（ 12 ）

第二章　导数与微分……………………………………………………（ 22 ）

第一讲　导数的概念与求导法则…………………………………………（ 22 ）

第二讲　高阶导数，隐函数、参数方程确定的函数的导数及微分………（ 33 ）

第三章　中值定理与导数的应用………………………………………（ 44 ）

第一讲　中值定理与洛必达法则…………………………………………（ 44 ）

第二讲　导数的应用………………………………………………………（ 56 ）

第四章　不定积分………………………………………………………（ 67 ）

第五章　定积分…………………………………………………………（ 76 ）

第六章　定积分的应用…………………………………………………（ 88 ）

第七章　空间解析几何与向量代数……………………………………（101）

第一讲　向量代数…………………………………………………………（101）

第二讲　曲面与曲线，平面与直线 ………………………………………（109）

第八章　多元函数微分学………………………………………………（125）

第一讲　多元函数微分学的基本理论……………………………………（125）

第二讲　多元函数微分学的应用…………………………………………（139）

第九章　重积分…………………………………………………………（155）

第一讲　二重积分…………………………………………………………（155）

第二讲　三重积分,重积分的应用 …………………………………… (164)

第十章　曲线积分与曲面积分…………………………………… (176)

第一讲　曲线积分…………………………………… (176)
第二讲　格林公式…………………………………… (186)
第三讲　曲面积分,高斯公式,斯托克斯公式…………………………………… (196)

第十一章　无穷级数…………………………………… (210)

第一讲　常数项级数…………………………………… (210)
第二讲　幂级数…………………………………… (221)
第三讲　傅里叶级数…………………………………… (235)

第十二章　微分方程…………………………………… (252)

第一讲　一阶微分方程…………………………………… (252)
第二讲　高阶微分方程,常系数线性微分方程 …………………………………… (268)

第一章 极限与连续

第一讲 函数、极限及其运算

一、主要内容

映射、函数的基本概念,数列、函数极限的定义和性质,无穷小与无穷大,极限的运算法则.

二、教学要求

1. 函数.

(1) 理解函数概念,熟悉函数符号 $f(x)$ 的意义和用法.

(2) 正确表述函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性.

(3) 了解反函数的概念,理解复合函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质和图形.

(5) 熟悉分段函数.

2. 了解极限的"ε—N","ε—δ"定义,并能按定义证明简单的数列或函数极限.

3. 了解函数极限与数列极限的性质,并会运用性质判定数列或函数极限是否存在.

4. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的性质.

5. 掌握极限的运算法则.

三、思考问题

1. 在数列中去掉、添上或改变有限项,会不会改变数列的收敛性?

答 不会.

证 我们只需证明"在数列的前面部分去掉、添上或改变有限项,不会改变数列的收敛性".因为其他情形(即在数列中任意去掉、添上或改变有限项的情形)都可以看成在数列的前面部分先去掉有限项后,再添上有限项的结果.

设将数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}, \cdots \tag{1}$$

的前 k 项去掉,则得数列

$$x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}, \cdots \tag{2}$$

数列(2) 实际上就是数列(1) 的一个子数列,因此,由数列(1) 收敛可推出数列(2) 也收敛.反之,若数列(2) 收敛于 a,则对任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在自然数 M,当 $m > M$ 时,有 $|x_{k+m} - a| < \varepsilon$.

取 $N = k + M$,则在数列(1) 中,当 $n > N$ 时,$|x_n - a| < \varepsilon$.

事实上,对 n,一定存在自然数 m,使 $n = k + m$.由于 $n > N$,即 $k + m > k + M$,从而 $m > M$.于是有

$$|x_{k+m} - a| < \varepsilon. \text{即} \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

故(1) 也收敛于 a.

由此可知,数列(1) 与数列(2) 有相同的收敛性.

2.怎样表述数列$\{x_n\}$无界?如何证明数列$\{x_n\}$无界?

答 数列 $\{x_n\}$ 无界的表述是:对任意给定 $M > 0$,总存在 n_0,使

$$|x_{n_0}| > M.$$

证明数列$\{x_n\}$无界的常用方法是找出它的一个无穷大子列$\{x_{n_k}\}$.我们有下述定理.

定理 数列$\{x_n\}$无界的充分必要条件是存在无穷大子列.

证 条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设数列$\{x_n\}$无界,则对任给 $M > 0$,存在正整数 n_0 使$|x_{n_0}| > M$,取 $M_1 = 2$,有 n_1,使$|x_{n_1}| > M_1$;取 $M_2 = 2^2$,因数列$\{x_n\}$去掉前 n_1 项后留下的数列仍然无界,故有 $n_2 > n_1$,使$|x_{n_2}| > M_2$.

如此继续,即得子数列$\{x_{n_k}\}$,且有

$$|x_{n_k}| > M_k = 2^k \to +\infty \quad (k \to \infty).$$

即子数列$\{x_{n_k}\}$为无穷大.

例 证明数列 $\{x_n\} = \{n + (-1)^n n\}$ 无界.

证 因 $x_{2k} = 4k$,而当 $k \to \infty$ 时,$x_{2k} \to \infty$,故$\{x_n\}$无界.

3.下列条件是否分别为极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件?

(1) 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < k\delta$ 时,有 $|f(x) - A| < l\varepsilon$(其中 k、l 为任意确定的正数).

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - A| \leqslant \varepsilon$.

答 条件(1)和条件(2)分别是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件,从而分别为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的等价定义.这是因为:对条件(1),若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则任给 $\varepsilon >$

0,对 $l\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<l\varepsilon$.取 $\delta_1=\frac{1}{k}\delta$,则当 $0<|x-x_0|<k\delta_1$ 时,有 $|f(x)-A|<l\varepsilon$,从而条件(1)成立.

反之,若条件(1)成立,则任给 $\varepsilon>0$,对 $\frac{\varepsilon}{l}>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<k\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<l\cdot\frac{\varepsilon}{l}$.取 $\delta_1=k\delta$,则当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|f(x)-A|<l\cdot\frac{\varepsilon}{l}=\varepsilon$,于是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

对条件(2),请读者自行证明.

4.在函数极限与数列极限的关系中,我们知道,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,且 $x_n\neq x_0\quad(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

若去掉条件 $x_n\neq x_0$,结论是否仍成立?

答 不一定成立.如设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

取 $x_n=1\ (n=1,2,\cdots)$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,但

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(1)=f(1)=1\neq 2.$$

四、例题分析

例 1 设 $f(x+1)=\sin(x^2+2x)-2x$,求 $f(x-1)$.

解 为了求 $f(x-1)$,先求 $f(x)$.我们给出求 $f(x)$ 的两种方法.

方法一 $f(x+1)=\sin[(x+1)^2-1]-2(x+1)+2$,所以

$$f(x)=\sin(x^2-1)-2x+2.$$

方法二 令 $x=t-1$,则

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin[(t-1)^2+2(t-1)]-2(t-1)\\&=\sin(t^2-1)-2t+2\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(x-1)&=\sin[(x-1)^2-1]-2(x-1)+2\\&=\sin(x^2-2x)-2x+4.\end{aligned}$$

例 2 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$

求:(1) $\varphi[\varphi(x)]$;(2) $\varphi[\psi(x)]$.

解 (1)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$. 从而 $|\varphi(x)|\leqslant 1$,于是

$$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 因为 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, |\psi(x)|\leqslant 1,\\0, |\psi(x)|>1,\end{cases}$ 而 $|x|=1$ 时,$\psi(x)=1$; $|x|\neq 1$ 时,$1<\psi(x)\leqslant 2$,故 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, |x|=1,\\0, |x|\neq 1,\end{cases}$ 其定义域是$(-\infty,+\infty)$.

例 3 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}=\dfrac{2}{3}$.

证 因
$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{8n-3}{3(3n^2+4n)}<\frac{8n}{3(3n^2+4n)}=\frac{8}{3(3n+4)}<\frac{8}{9n}<\frac{1}{n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$,欲使 $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$,只需 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 即可. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则对 $\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ 成立. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}=\frac{2}{3}.$$

例 4 已知数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

证 对 $\forall\varepsilon>0$,因 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$,则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|y_n-x_n|<\varepsilon$. 由于

$$|x_n-a|=a-x_n\leqslant y_n-x_n=|y_n-x_n|,$$
$$|y_n-a|=y_n-a\leqslant y_n-x_n=|y_n-x_n|,$$

进而,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$,$|y_n-a|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

例 5 用极限的"ε—δ"定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}=1$.

证 由定义,只要证明对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,不等式

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|=\left|\frac{x^2}{x+2}-1\right|=\left|\frac{(x-2)(x+1)}{x+2}\right|<\varepsilon$$

成立. 因研究的是 $x\to 2$ 时函数的极限,我们不妨限定在 $x=2$ 的去心邻域 $\mathring{U}(2,1)$ 内考虑,即 $0<|x-2|<1$,在此条件下,

$$|x+1|=|(x-2)+3|\leqslant|x-2|+3<4,$$

$$|x+2| = |(x-2)+4| \geqslant 4 - |x-2| > 3,$$

因而,当 $0 < |x-2| < 1$ 时,有 $\left|\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}\right| < \dfrac{4}{3}|x-2|$.

要使 $\left|\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4} - 1\right| < \varepsilon$,只要 $\dfrac{4}{3}|x-2| < \varepsilon$,即 $|x-2| < \dfrac{3}{4}\varepsilon$.取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{3}{4}\varepsilon\right\}$,则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时,有 $\left|\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4} - 1\right| < \varepsilon$ 成立.故

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = 1.$$

例 6　证明 $f(x) = x\cos x$,当 $x \to +\infty$ 时,既无极限,也非无穷大.

证　取 $x_n = 2n\pi$,当 $n \to +\infty$ 时,$x_n \to +\infty$,而 $f(x_n) \to +\infty$,又取 $x'_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$,当 $n \to +\infty$ 时,$x'_n \to +\infty$,但 $f(x'_n) \to 0$.因此,当 $x \to +\infty$ 时,$f(x)$ 无极限,但非无穷大.

注　该方法基于如下结论:$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$(或 ∞)的充分必要条件是对任意的 $x_n \to \infty (n \to \infty)$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$(或 ∞).

例 7　设 $\{x_{p_k}\}$、$\{x_{q_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的两个子数列,且满足:

(1) $\{p_k\} \cup \{q_k\} = \mathbf{N}^*$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{q_k} = a$.

证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证　由(2),对 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists K_1 > 0$,当 $k > K_1$ 时,有 $\left|x_{p_k} - a\right| < \varepsilon$;$\exists K_2 > 0$,当 $k > K_2$ 时,有 $\left|x_{q_k} - a\right| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{p_{K_1}, q_{K_2}\}$,当 $n > N$ 时,若 $n \in \{p_k\}$,则有某个 $p_k = n > N \geqslant p_{K_1}$,于是 $k > K_1$,因此有 $|x_n - a| = \left|x_{p_k} - a\right| < \varepsilon$.

若 $n \notin \{p_k\}$,则 $n \in \{q_k\}$,即有某个 $q_k = n > N \geqslant q_{K_2}$,于是 $k > K_2$,因此有 $|x_n - a| = \left|x_{q_k} - a\right| < \varepsilon$.故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注　在讨论有关数列极限的问题中,通常取 $\{p_k\} = \{2k-1 \mid k = 1,2,\cdots\}$,$\{q_k\} = \{2k \mid k = 1,2,\cdots\}$.

例 8　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)(\sqrt{n^2+1} - n)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2-1}\right)$;

(3) 设 $x_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(4) 若 $|x| < 1$,求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})$.

解 (1)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}.$$

(3)因为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

因此 $x_n=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(4)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

例 9 已知$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+a}{x-2}=b$,$a$ 和 b 为有限常数.求 a 与 b 的值.

解 因为$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$,$b$ 为常数,所以

$$\lim_{x\to 2}(x^3-x^2+a)=8-4+a=0,\text{即}\quad a=-4,$$

于是 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2+x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+2)=8$.

即 $b=8$.

例 10 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$,求出函数 $f(x)$的解析表达式,并画出它的图形.

解 当$|x|=1$时,$f(x)=0$;

当$|x|<1$时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=-x$;

$$\text{当}|x|>1\text{时}, f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\dfrac{1}{x^{2n+1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x.$$

$f(x)$的图形如图 1-1-1 所示.

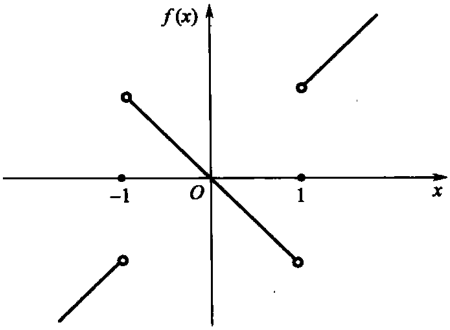

图 1-1-1

例 11　讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

分析　$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+1}$与$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x}$都不存在,不能断定原极限也不存在,也不能运用极限的运算法则,可考虑用其他适用的法则.(为什么?)

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.$$

因为　$\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$.

所以,由有界函数与无穷小之积为无穷小,得原式$=0$.

例 12　求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{2x^2-3x^5}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+1)^{10}(3x-1)^{20}}{(4x-3)^{30}}$;

(3)$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+x^4)}{\ln(1+x^5)}$.

解　(1)原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{2x^2-3x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{2-3x^3}=5.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^{10}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)^{20}}{\left(4-\dfrac{3}{x}\right)^{30}}=\dfrac{4^{10}\times 3^{20}}{4^{30}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^4\left(\dfrac{2}{x^4}+1\right)}{\ln x^5\left(\dfrac{1}{x^5}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln x+\ln\left(\dfrac{2}{x^4}+1\right)}{5\ln x+\ln\left(\dfrac{1}{x^5}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+(\ln x)^{-1}\ln\left(\dfrac{2}{x^4}+1\right)}{5+(\ln x)^{-1}\ln\left(\dfrac{1}{x^5}+1\right)}=\frac{4}{5}.$$

例 13 讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

分析 注意到 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,因此,要分别讨论 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

例 14 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right]$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=2$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$,所以

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right]=1.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$. 所以

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right]=1.$$

即 原式 $=1$.

例 15　设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-ax-b\right]=0$,求 a 与 b 的值.

解　原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0.$

于是　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0.$

由此得　$a=1$. 于是　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-x-b\right]=0.$

所以　
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x^2}{\sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}+x^2}=\frac{2}{3}.$$

注　若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$,则称直线 $y=ax+b$ 为函数 $f(x)$ 图形的一条斜渐近线. 可用解本题的方法求函数图形的斜渐近线.

五、练习题

1. 设 $f(x)$ 单调减,$f(x)<g(x)$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以相互复合及自己复合,证明 $f[g(x)]<g[f(x)]$.

2. 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,存在常数 $C\neq0$,使 $f(x+C)=-f(x)$,试讨论 $f(x)$ 的周期性.

3. 用"ε—N"定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n}{3+2n}=-3$.

4. 用"ε—X"定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\sin^2x=0$.

5. 设 $x_n=\dfrac{1}{2n+1}\left[n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}+2\right]$,讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)\right]$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(3x^2+1)-\ln(x^2+3)]$.

8. 设 $x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3}{e^{nx}+x^2}$,求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$,求 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{1}{n}\quad(n\in\mathbf{N},n>1)$ 点的左、右极限,并说明 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}}f(x)$ 是否存在.

11. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在.

(1)证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在;(2)若 $A=0$,结论怎样?

12. 试确定常数 a 和 b 使下式成立:$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$.