西安交大
考研

2011版 数学考研

典型题

数学一和数学二

主　编　龚冬保
副主编　魏战线　张永怀
　　　　魏立线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

（2011 版）

数学考研典型题

（数学一和数学二）

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

内容简介

本书自1999年问世以来，2011版是最新修订版，也是本书第12版.由于本书的例题和练习题经典，所以在本书问世后的11年中，每年均以高分覆盖当年考题，深受考生欢迎.

本书第一部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第二部分是典型题选讲与练习：选了1500余道题，其中500多道例题（包含了往届的考题），讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了详细解答；附录是对往年经典考题的分析.

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

作者在网上为本书读者免费答疑，时间：2010年7月下旬至2011年1月考试前；答疑信箱：glsdy@126.com.

图书在版编目(CIP)数据

2011版.数学考研典型题 数学一和数学二/龚冬保主编. —12版.
—西安：西安交通大学出版社，2010.5
ISBN 978-7-5605-3536-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①龚… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第070392号

书　　名 2011版数学考研典型题（数学一和数学二）
主　　编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路10号　邮政编码710049）
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西新世纪印刷厂

开　　本 787mm×1 092mm　1/16　**印张** 26　**字数** 807千字
版次印次 2010年5月第12版　2010年5月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3536-4/O·334
定　　价 35.70元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

2011 版 前 言

—— 兼释 2010 年的部分试题

拿到 2010 年考研的三套数学试卷后，像往年一样，与我们所编写的几本辅导书(《数学考研考点精讲方法精练》《数学考研典型题》《数学考研模拟考试试卷》，分别简称：《精讲精练》、《典型题》、《模拟试卷》") 作了对比，除了考点、题型的覆盖率很高之外，今年的试题与我们书中一些几乎一样的题更多了一些，而且我们书中介绍的一些特殊的解题方法与技巧，可以使这些题做起来又快捷又不易出错. 以下我们选出一部分今年的试题作为例题，讲述于下.

一、客观题

例 1 设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$. 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $=$

(A) x　　(B) z　　(C) $-x$　　(D) $-z$　　[　　]

解 令 $F(u,v)=u+v$，则由 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 可得 $z=-y$. 于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-y=z$. 故选(B).

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，$r(\boldsymbol{A})=3$ 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

[　　]

解 由于任何矩阵与自身相似，令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$，便知满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故选(D).

以上是我们介绍的"特殊试验"法，当然只适用于选择题. 平时做题，应将此方法与基本方法结合起来练习.

例 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y)}$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y)}$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}$　　[　　]

解 此题属"积分和"型的极限，既可视为二重积分，也可用定积分作. 明显可看出(D) 是正确选项.

用二重积分解：就是把正方形：$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1\}$ 均匀分成 n^2 个面积为 $\dfrac{1}{n^2}$ 的小正方形：

$\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\dfrac{i}{n};\dfrac{j-1}{n}\leqslant y\leqslant\dfrac{j}{n}\right\}$ 中作积分微元：$\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 作

和的极限即得

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)};$$

用定积分解：可由$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}$.

分别将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$ 各 n 等分即有

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i};$$

$$\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$$

故$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

例 4 函数 $y=\ln(1-2x)=0$，在 $x=0$ 点处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

解 此题出在数学二试卷上，根据考试大纲，不能用泰勒级数，故用泰勒公式. 同样比较 x^n 项系数可得

$$\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)=-\frac{2^n}{n}\qquad\therefore\ y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!$$

即填 $-2^n(n-1)!$

例 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}=3.$

此题与《精讲精练》(数学一和数学二）中例 10.8 和(数学三）中例 7.8 基本一样. 例题要难些.

今年唯一出乎意料的是下面一道“超纲”的题：

例 6 设 m、n 是正整数，则反常积分$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性.

(A) 仅与 m 的取值有关　　(B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m、n 的取值都有关　　(D) 与 m、n 的取值都无关　　[　　]

解 首先，$x=0$ 和 $x=1$ 都是暇点. 在 $x=0$ 点有：$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$，而$\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$，故反常积分总是收敛的；在 $x=1$ 点，由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)^{\varepsilon}\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$. $\varepsilon>0$ 可任意小，故收敛也与 m、n 无关. 故选(D).

由于《考试大纲》中从未提及反常积分收敛判别法，所以本题应属“超纲”题. 希望今后试卷中不要出现这样的题！

二、计算题

例 7 求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

解 我们在《典型题》的附录中讲到不套公式，只用微积分运算的技巧解微分方程的方法. 下面这样来解此题：方程两边同乘 e^{-2x} 得

$$e^{-2x}(y'-y)'-2e^{-2x}(y'-y)=2xe^{-x}$$

即 $$[e^{-2x}(y'-y)]'=2xe^{-x}$$

两边积分得 $$e^{-2x}(y'-y)=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_1$$

再用 e^x 乘上方程两边，得 $$[e^{-x}y]'=-2x-2+C_1e^x$$

积分得 $$e^{-x}y=-x^2-2x+C_1e^x+C_2.$$

即得解 $$y=-(x^2+2x)e^x+C_1e^{2x}+C_2e^x$$

例 8 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定，$\psi(t)$ 二次可导，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$. 已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求 $\psi(t)$.

解 由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\ddot{\psi}\dot{x}-\dot{\psi}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ 得关于 $\psi(t)$ 的微分方程：$(1+t)\ddot{\psi}-\dot{\psi}=3(t+1)^2$. 由于系数是 t 的多项式，因此，我们可以预知 $\psi(t)$ 是 t 的三次多项式. 故设 $\psi(t)=at^3+bt^2+ct+d$

由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$ 得 $a+b+c+d=\dfrac{5}{2}$ (1)

$\psi'(1)=6$ 得 $3a+2b+c=6$ (2)

及将 $\psi(t)$ 代入方程得：$3at^2+6at+(2b-c)=3t^2+6t+3$.

得 $a=1,2b-c=3$. 代入(1)、(2) 得 $b=\dfrac{3}{2},c=d=0$.

从而解得 $\psi(t)=t^3=\dfrac{3}{2}t^2$.

例 9 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件：$x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解 与此题几乎同样的题在我们所编的三种书上均有，而且我们都介绍了用“线性代数”相结合的方法求解这样的题：

设 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2-z^2-10)$.

令 $L_x=y+2\lambda x=0$ (1)

$L_y=x+2z+2\lambda y=0$ (2)

$L_z=2y+2\lambda y=0$ (3)

$(1)\cdot x+(2)\cdot y+(3)\cdot z$ 得 $2(xy+2yz)+2\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$.

由 $x^2+y^2+z^2=10$，知 $xy+2yz\Big|_{\text{极值}}=-10\lambda$.

所以求出 λ 便可求得最值. 回到方程组(1)、(2)、(3) 是关于 x、y、z 的一次齐次方程组. 而 $x^2+y^2+z^2=10$ 说明此方程组有非零解. 故系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(4\lambda^2-5)=0$$

而 $\lambda\neq 0$，故得 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故最大值为 $5\sqrt{5}$，最小值为 $-5\sqrt{5}$.

这里用到连续函数 $xy+2yz$ 在闭域 $x^2+y^2+z^2=10$ 上必能达到最大值和最小值. 且最值即极值，这时 λ 只有两个值故对应大的 $5\sqrt{5}$ 最大，$-5\sqrt{5}$ 最小.

对于这道平凡的题，用微积分与线性代数综合的方法来解，过程显得快捷简便；而对于下面的这道综合性的例题，我们却要用平凡的方法去解.

解 10 设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解 设 P 点坐标为 (x,y,z)，则切平面法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y-z,2z-x\}$，与 z 轴垂直，得 $2z-x=0$.

故 P 点轨迹为 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-yz=0 \\ 2z-x=0 \end{cases}$ 或 $C:\begin{cases} x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1 \\ 2z-y=0 \end{cases}$. 所以 Σ 在 xOy 上投影是 $x^2+\dfrac{3}{4}y^2\leqslant 1$.

而 $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{-2x}{2z-y}\right)^2+\left(\dfrac{2y-z}{2z-y}\right)^2}dxdy=\dfrac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-4yz}}{|2z-y|}dxdy$

$$= \frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|2z-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ （结果是看着被积函数化来的！）

$\therefore I = \iint\limits_{x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$.（其中$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$）.

基本功好，并能灵活运用，像以上计算题是不用"草稿"就能做出的！所以平时一定要反复练习基本题，方能作到"熟能生巧"，解题时定能游刃有余.

例 11 （这是唯一非今年的考题，是我们《模拟试卷》第 2 套中的(21) 题）：已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f = 2y_1 - y_2^2 - y_3^2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$，求 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 及 $|\boldsymbol{A}|=2$ 知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于特征值 2 的特征向量，故 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 由于其它两个特征值都是 -1，故 $\boldsymbol{Q}$ 的第二、三列可以取与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交又彼此正交的任意两个单位向量如 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\alpha}_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$. 于是 $\boldsymbol{Q}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，它的逆变换是

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2-x_3) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+x_3) \\ y_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1-x_2+x_3) \end{aligned}$$

故 $f = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = \frac{2}{3}(x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2+x_3)^2 - \frac{1}{6}(2x_1-x_2+x_3)^2$

$= 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

举这个例子是说我们这道模拟题与今年一道考题几乎一样，考题稍容易些：

例 12 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 此题比上题容易处在直接告之 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$ 是对应特征值为 0 的特征向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，如上例可取 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$. 于是逆变换为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad \text{即} \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_3) \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$f = y_1^2+y_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3. \text{故 } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

三、证明题

例 13 设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内二阶可导，且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(2)+f(3)$. 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

证 这里我们略去了问题(Ⅰ)，使问题略难一点. 将已知条件 $f(0) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(2)+f(3)}{2}$.

由连续函数的平均值定理，知存在 $\eta_1 \in [0,2]$，$\eta_2 \in [2,3]$，使 $f(0) = f(\eta_1) = f(\eta_2)$. 要往下走必须有 $\eta_1 \in (0,2)$. 所以积分中值定理得用微分中值定理来证明. 即设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(F(2) - F(0)) = F'(\eta_1) = f(\eta_1)$. 故 $\eta_1 \in (0,2)$. 因此在$[0,\eta_1]$，$[\eta_1,\eta_2]$上对 $f(x)$ 用罗尔定理知，存在 $\xi_1 \in (0,\eta_1)$，$\xi_2 \in (\eta_1,\eta_2)$，使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再在$[\xi_1,\xi_2]$上对 $f'(x)$ 用罗尔定理得存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,3)$. 使 $f''(\xi) = 0$

与这道类似的题近年来数学三考得很多，可参看《典型题》的附录.

例 14 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0) = 0$，$f(1) = \frac{1}{3}$，证明存在 $\xi \in (0,\frac{1}{2})$，$\eta \in (\frac{1}{2},1)$. 使 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$

证 将结论改成 $f'(\xi) - \xi^2 + f'(\eta) - \eta^2 = 0$. 便很容想到作辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$. 问题变成 $F'(\xi) + F'(\eta) = 0$. 下面证明方法再自然不过了.

$$0 = F(1) - F(0) = [F(1) - F(\frac{1}{2})] + [F(\frac{1}{2}) - F(0)] = \frac{1}{2}[F'(\eta) + F'(\xi)]$$

不必我们往下写了，结论已得证明！

2010 年证明题比较容易，但估计得分率不高，原因是在平时数学中推理能力的训练很少. 所以读者仍要重视做证明题的思路和方法. 做题最好能一题多变和坚持一题多解. 如本题可变为：

例 15 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且 $f(0) = 0$，$f(1) = \frac{1}{1+m}$，证明存在 $\xi_i \in (\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，使 $\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^m$

证 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{m+1}x^{m+1}$，则有

$0 = F(1) - F(0) = [F(1) - F(\frac{n-1}{n})] + [F(\frac{n-1}{n}) - F(\frac{n-2}{n})] + \cdots + [F(\frac{1}{n}) - F(0)]$，用拉氏公式得，存在 $\xi_i \in (\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$，使 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i) = 0$，即可得本题的证明.

总之，分析每一次的考试题，都会给我们带来一些启发，对准备今后的考试有利. 我们分析了 2010 年的部分试题，并就大多数题提出了一些快捷解题方法. 但仍要强调每位考生对您未来的考试要坚持做到"凡是考试的基本题都会作，凡是会作的题一定不错". 我们以上分析也是抛砖引玉，希望考生在复习迎考时要像这样去分析近年的所有考题，对今后的考试肯定会有帮助.

和往年一样，我们将于 2010 年 7 月下旬至 2011 年元月考试前，在网上回答阅读我们书的读者提出的问题. 答疑信箱：glsdy@126. com.

编　者

2010 春于西安交大

第1版前言

（2007年修订）

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书. 在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分（第1章）是考卷分析. 我们对2005至2007三年的考卷作了列表分析. 通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了. 只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么. 比如在数学能力方面，计算题基本上要占80分左右；在认知水平上，要求“理解”水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等. 这样，您看了本书第1章应当对数学考试“心中有数”了. 进一步，如果您藉助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了. 因此，第1章是作复习前准备必不可少的. 第二部分（第2章）是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略. 在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键. 而“策略”又是最容易被人们忽视的. “考试又不是打仗，讲什么策略”？ 岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键. 我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视. 其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗？ 有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩. 第三部分（第3～12章）是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分. 我们选了1 500多道题，其中500道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示. 要想考个好成绩，关键是提高解题能力. 我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的. 我们不主张单纯“猜题”，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比“猜题”更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分（第13章）是模拟题，数学一和数学三各两套. 在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”. 用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距. 值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以“从难、从严、从实战”出发设计的. 每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得90分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考90分以上. 但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们！

编者

2007.4 于西安交大

（因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版，故本书第四部分取消. ——出版者注）

目　录

绪论

应试对策

在复习迎考时，如何提高复习效率，增强复习效果；在临考时怎样能超水平发挥，考出理想成绩？这就是我们“应试对策”的话题．应试对策当因人而异，本章我们就复习和考试中一些普遍的、重要的问题，提出来供读者参考．

0.1 全面复习 把书读薄

“知己知彼，百战不殆”．在复习中，首先应当知道考试的范围和内容是什么，那就是要熟悉“考试大纲”．凡是考试大纲中提及的内容，都可能考到；凡大纲中未提及的内容都不会考．参照大纲全面复习，不留遗漏，是应试的基本对策．

数学考研的内容很多，因此，在全面复习的同时，要注意抓住各内容的实质和不同内容、不同方法间的本质联系，从而把要记的东西降到最少程度（什么是“最少”是因人而异的，但每个人都要努力去加深对所学知识的理解，多抓住些问题之间的联系，少记一些死知识）．而且把要记的内容和方法，牢牢靠靠地掌握．对于将从事工程技术和科学研究的人来说，一些最重要、最基本的数学知识与方法，应当做到终生不忘．其它的知识，可以在此基础上，运用联系，经推演而得到．这就是全面复习，把书读薄的意思．比如在高等数学中抓住微分与积分的联系，只要把微分的基本概念、性质及其运算的基本公式搞深搞透，作到“倒背如流”，许多积分、微分方程的公式就不必死记硬背，而相关的题均可顺利求解．

例 0.1 如我们熟悉$(\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，便可以立即作类似的积分题：

$$\int x(1+x^2)^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2}+C.$$

因为可想到$[a(1+x^2)^{5/2}]'=\dfrac{5}{2}a\cdot(1+x^2)^{3/2}\cdot 2x$. 故 $a=\dfrac{1}{5}$.

这样做熟了，不但题解得快，且不会错，因为我们已用微分作了验算．

例 0.2 (1) 方程 $xy'+y=0$，满足 $y(1)=2$ 的解为________．

(2) 方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为________．

解 (1) 由乘法求导公式知 $xy'+y=(xy)'=0$

故 $xy=C$，由 $y(1)=2$ 得所求解为$\underline{y=\dfrac{2}{x}}$.

(2) 于方程两边同乘以 x 得，$x^2y'+2xy=x^2\ln x$

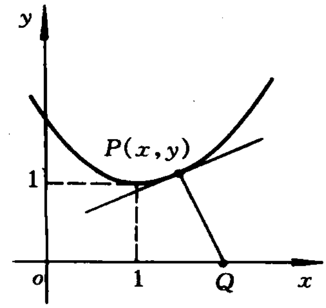
因为 $x^2y'+2xy=(x^2y)'$

故 $x^2y=\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$. 由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 得 $C=0$. 故得解 $\underline{y=\dfrac{x}{9}(3\ln x-1)}$.

这两道都是一阶线性微分方程的题，在求解过程中，我们只用到了微积分的运算，一样顺利得到了所求解．

例 0.3 在上半平面求一向上凹的曲线 L，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度

的倒数(Q是过P点的法线与x轴的交点). 且L在$(1,1)$点的切线平行于x轴.



例 0.3 题图

(这是1991年数学一的一道考题,考点多,而我们将仅用微积分的方法来求解,说明书是怎样可以读薄的).

解　首先,我们用曲率是曲线弯曲程度,即曲线切线的倾角相对弧长的变化率的概念得到曲率公式:

$\tau=\left|\dfrac{\mathrm{d}(\arctan y')}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$,而不用死记此公式.

其次我们用最熟悉的向上凹曲线$y=x^2$之$y''=2>0$知,一般向上凹的曲线$y=y(x)$有$y''(x)\geqslant 0$.

第三,过$P(x,y(x))$点曲线的法线方程是:

$Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$,令$Y=0$得$X_0=yy'+x$,于是知Q点坐标为$(yy'+x,0)$. PQ长为$[(yy')^2+y^2]^{1/2}=y\sqrt{1+y'^2}$.

于是由曲线$=$(法线长)$^{-1}$得到此曲线应满足的方程:

$\dfrac{y''}{1+y'^2}=\dfrac{1}{y}$这又是一个可降价的二阶方程,其实,我们只要仅用微分运算解:由$y''=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$即可将微分方程化为$\dfrac{y'\mathrm{d}y'}{1+y'^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$.

两边积分得$\dfrac{1}{2}\ln(1+y'^2)=\ln yC_1$

即$1+y'^2=Cy^2$,用$(1,1)$点切线平行x轴得$C=1$. 于是方程变为$y'=\pm\sqrt{y^2-1}$

即　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{y^2-1}}=\mathrm{d}x$,或$x+C=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$

由$x=1,y=1$,得$C=-1$,因此我们有解

$y=\mathrm{ch}(x-1)$.

这里,我们抓住了曲率、变化率、曲线凹向、法线长,可降价二阶方程这些概念的本质以及它们与导数微分概念和运算性质的本质联系. 没有硬套公式,解出了一道综合性的难题.

例 0.4　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^{n+1}}\dfrac{x^n}{n}$的收敛域.

解　我们先用达朗伯判别法(即检比法)来求级数的收敛区间:由$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{3^n+(-2)^n}{|x|^n}\right]=\dfrac{|x|}{3}$,知收敛区间是$(-3,3)$. 再讨论端点,以$x=3$代入得级数:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$其通项与$\dfrac{1}{n}$是等价无穷小,因此发散.

再以$x=-3$代入得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{(3^n+(-2)^n)n}$

这里$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛,而由达朗伯判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{(3^n+(-2)^n)n}$绝对收敛,故此级数收敛,从而幂级数收敛域是$[-3,3)$.

如果有人以为以$x=-3$代入所得到级数是一交错级数,由莱布尼兹判别法说它收敛,是没有根据的. 原因是这时$a_n=\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$并非是单调减的. 这是本题的一个"难点",比一般教材,或一般数学教学要求更高,更灵活. 说明考研比平时教学要求更高些,所以我们说,全面复习要以"考试大纲"为依据.

0.2　突出重点 精益求精

在抓各内容、各方法的联系中,更要注意主次之间的联系,把主要内容、主要方法搞深搞透,并通过主次联系,

将次要内容与方法提挈起来，这是复习中最要重视的策略，比如高等数学中无穷小分析方法就特别重要，试看以下例题.

例 0.5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解　将和式写作 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$，$n\to\infty$ 时表示“无限和”，而第 k 项（$k=1,2,\cdots,n$），当 $n\to\infty$ 时都是无穷小. 因此，我们称之为“无限个无穷小的和”型的极限. 经过这样的分析，使我们想到定积分：若 $f(x)$ 在$[0,1]$上有界可积，将区间 n 等分，并取 $\xi_k=\dfrac{k}{n}$，则按定积分定义有：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$，也是无限个无穷小之和，这使我们想到用定积分来解决这个问题. 先看

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

再用一次无穷小分析：

$n\to\infty$ 时，$\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\sim\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$，这说明 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$ 与 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$ 之差是比 $\dfrac{1}{n}$ 更高阶的无穷小，于是我们容易得到下面的解法.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\right]$$

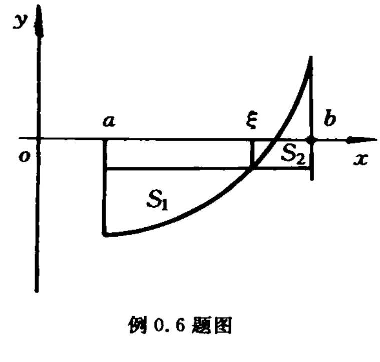
而
$$0<\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\right]\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n}}{n(n+\frac{1}{k})}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0.$$

故得
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{2}{\pi}.$$

这样，我们用无穷小分析和定积分的方法顺利地作出了这道看似很难的极限题.

以主要方法带次要方法，要对具体问题作具体的分析.

例 0.6　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内 $f'(x)>0$. 证明：存在唯一的 $\xi\in(a,b)$ 使曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 及 $y=f(\xi)$ 所围图形面积 S_1 是 $y=f(x)$，$x=b$ 及 $y=f(\xi)$ 所围面积 S_2 的三倍.



例 0.6 题图

解　如图. $S_1=\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t$；$S_2=\int_{\xi}^{b}[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}t$

要证明：$\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_{\xi}^{b}[f(t)-f(\xi)]\mathrm{d}t=0$

容易想得到辅助函数：$\varphi(x)=\int_a^{x}[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^{b}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$

用连续函数的介值定理，$\varphi(a)=-3\int_a^{b}[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t<0$，$\varphi(b)=$

$\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t>0$. 故由介值定理知,存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi(\xi)=0$,即证明了 ξ 的存在性. 以下证明唯一性. 由 $\varphi(x)$ 可导,且 $\varphi'(x)=(4x-a-3b)f'(x)$. 由此 $\varphi(x)$ 在 $[a,\frac{a+3b}{4}]$ 上单调减,从而 $\varphi\left(\frac{a+3b}{4}\right)<0$,在 $\left[\frac{a+3b}{4},b\right]$ 上单调增. 故我们知道 $\xi\in\left(\frac{a+3b}{4},b\right)$,且是唯一的.

先分析要证的命题条件与结论间的联系,将 ξ 换成 x,作辅助函数 $\varphi(x)$,求证 $\varphi(x)$ 的零点存在性,一般主要是用"介值定理";唯一性. 则用 $\varphi'(x)$ 找出增减的区间,利用增减性来证明零点的唯一性. 这是高等数学的一种分析问题的重要方法. 在考研的一些证明题中,往往要作辅助函数. 辅助函数可以用问题的几何意义,即形数结合的方法,也可用分析的方法.

例 0.7　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上友三阶连续导数,且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$,证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=3$.

解 1　(用泰勒公式). 由

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1).\ \xi_1\in(-1,0)$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2).\ \xi_2\in(0,1)$$

$\therefore$　$\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=1$. 由 $f'''(x)$ 连续,存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,0)$ 使 $\frac{f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)}{2}=f'''(\xi)$. 因此证明了 $f'''(\xi)=3$.

本题的解 1 是很常规、也是重要的方法;而下面的解 2,则是个比较巧妙的好方法.

解 2　(用多项式作辅导函数)

这种方法也可说是由特殊到一般的方法,即作一个三次多项式函数 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,使 $P(-1)=f(-1)=0,P(1)=f(1),P'(0)=f'(0)=0,P(0)=f(0)$,用这些条件可得

$P(x)=\frac{1}{2}x^3+(\frac{1}{2}-f(0))x^2+f(0)$. 显然有 $P'''(x)=3$

再作辅助函数:$\varphi(x)=f(x)-P(x)$.

先由 $\varphi(-1)=\varphi(0)=\varphi(1)=0$,分别在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上用罗尔定理知,存在 $-1<\eta_1<0<\eta_2$,使 $\varphi'(\eta_1)=\varphi'(\eta_2)=0$,加上 $\varphi'(0)=0$. 又在 $[\eta_1,0]$ 和 $[0,\eta_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理知,存在 $\xi_1\in(\eta_1,0),\xi_2\in(0,\eta_2)$,使 $\varphi''(\xi_1)=\varphi''(\xi_2)=0$,最后在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $\varphi''(x)$ 用罗尔定理知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使 $\varphi'''(\xi)=0$,而 $\varphi'''(x)=f'''(x)-3$,故证得 $f'''(\xi)=0$.

解 2 的方法是我们为读者介绍的用中值定理解一些难题的好方法,在本书第 2 章的例 2.30 ~ 2.33 中也介绍了这种用"多项式"作辅助函数的方法. 请读者留意,下面例题中作辅助函数的方法,是近年考研"难题"中常用的方法.

例 0.8　(2002,二) 设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

证 1　(直接用中值定理)

先证左边不等式,由拉氏中值定理的 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}(\xi\in(a,b))$

而
$$\frac{2a\xi}{a^2+b^2}<\frac{2ab}{a^2+b^2}<1$$

即
$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\text{ 成立.}$$

再证右边不等式. 即欲证

$$\frac{\ln\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}}=\frac{\ln b-\ln a}{\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}}<1$$

记$\dfrac{b}{a}=A>1$，在$[1,A]$上，令$f(x)=\ln x$，$g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 用柯西中值定理

$$\frac{f(A)-f(1)}{g(A)-g(1)}=\frac{\dfrac{1}{\xi}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}+\dfrac{1}{\xi\sqrt{\xi}}\right)}=\frac{2\xi\sqrt{\xi}}{\xi^2+(\sqrt{\xi})^2}<1(1<\xi<A).$$

即所要证明不等式成立.

证 2 （常规的用函数单调性证明）.

即在两边不等式中令a(或b)是常量. b(或a)是变量即如证右边不等式.

记　$f(b)=\ln b-\ln a-\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　显然 $f(a)=0$.

$$f'(b)=\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}\right)=-\frac{1}{2b\sqrt{ab}}(b-2\sqrt{ab}+a)=-\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2b\sqrt{ab}}<0$$

故$f(b)$单调减，从而$f(b)<0$. 即得所需证明的不等式.

同样可证左边的不等式，留给读者自行证明.

证 3 （改进的常规法）.

即令$\dfrac{b}{a}=x$. 那么右边不等式变成要证

$$\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<0\ (x>1).$$

令　$\varphi(x)=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\varphi(1)=0$.

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0.$$

故$\varphi(x)$单调减，从而$\varphi(x)<0\ (x>1)$即是所要证明的不等式. 请读者用同样方法证明左边不等式.

考研主要是考解题的能力，所以，这一段我们就高等数学中的一些例题说明只要搞透主要方法，以主带次必可提高解题能力，这是很关键的复习迎考对策.

0.3　基本训练 反复进行

近年来每一份考研试卷中，基本题都占总分的70%左右，因此复习中要注意，把基本功练熟练透，但我们不主张"题海"战术，而提倡精练，即反复做一些典型的题，做到一题多解、一题多变. 要训练抽象思维能力，对一些基本定理的证明，基本公式的推导，以及一些基本练习题，要作到不用书写，就像棋手下"盲棋"一样，只需用脑子默想，即能得出正确答案. 如果能在40分钟内完成14道客观题，其中有些是不用动笔，一眼就能看出答案的题，这样才叫训练有素. "熟能生巧"，基本功扎实的人，遇到难题办法也多，不易被难倒. 相反，做练习时，眼高手低，总找难题做，结果，上了考场，遇到与自己曾经作过的类似的题目都有可能不会；不少考生把会做的题算错了，归结为粗心大意，确实，人会有粗心的，但基本功扎实的人，出了错立即会发现，很少会"粗心"地出错.

例 0.9　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解 1　用有理化分子的初等方法.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}$$

解 2　用洛必达法则.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}$$

基本功熟悉的人知道$\sqrt{1+x}$与$\sqrt{1-x}$不是无穷小量，在第二次用洛必达法则时，分母中两因式$\sqrt{1+x}\ \sqrt{1-x}$

$\to 1$，不必参与求导数.

解 3　用泰勒公式加无穷小分析. 在要求极限的式子中，分母是 x 的二阶无穷小，故只要将 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 展成 x 的泰勒多项式至 x^2 项：

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2+o(x^2)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)(-x)^2+o(x^2)$$

因此，　$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$. 从而得到解 1、2 同样的结果.

这是 1998 年数学一的第一道填空题(1999 年第一道填空题与此题类似)，举这个例子的意思是说明“精练”的含义，这是一道容易的题，但我们有三种解法. 当然还有其它解法，如求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ 时，分子减 1 和加 1，分两项用等价无穷小替换可得此极限为 -1，如果把这些方法都加上去，对于本题还可以得出一些解法，读者可以试试，这样一题多解，作一道题，比作三道题强. 进一步，由比较，可见用泰勒公式加上无穷小分析，这道题是可以这样简单地获得答案的.（只要默想，不用笔算）以下描述想的过程：

“$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\cdots\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\cdots$

$+(1-x)^{\frac{1}{2}}=\cdots\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\cdots$

$\cdots-\frac{1}{4}x^2+\cdots$　　答案为 $-\frac{1}{4}$.”

就是说，平常练一道题，反复做，用不同方法做. 并由比较而知，这一类型的题怎样做最方便，怎样做可以不用书写，默想出答案. 到了这一步，做一道题胜似十道题了！不仅如此，这道题还可以变，下面举几个变化的例子.

变化 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\beta}+(1-\beta x)^{\alpha}-2}{x^2}=\frac{\alpha\beta}{2}(2\alpha\beta-\alpha-\beta)$，($\alpha,\beta$ 是任意实数)

在求函数极限时，用泰勒公式方法往往十分奏效. 下面 5 个简单初等函数的泰勒公式，尤其要牢记：

当 $x\to 0$ 时(x 不一定是自变量)

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$；

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$（也可写作 $o(x^4)$）；

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$（也可写作 $o(x^3)$）；

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$（$\alpha$ 是任意实数）

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

变化 2. 我们可用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的泰勒公式编出一道极限题：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$$

或　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{1}{3}$$

上面的极限式中分子、分母同用 $\cos x$ 除，并分为两项得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\frac{1}{3}$$

我们从例 0.9 这道 1998 年数学一的第一道试题，用泰勒公式解，联想到变化 2 的这道题恰好是 1999 年数学一的第一道试题. 这样从解一道不太难的题，用多种解法，联想到泰勒公式，再反过来用泰勒公式编题，变化出多种题，不用去“题海”中没完没了地作题. 一大类函数极限的题都被我们破解了！

例 0.10　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}}$，则三直线