



新课标高考总复习
2011年

★ 夺冠之路

—— 学生用书 ——



丛书主编：陈曾明

N **数学** 1
(理科)

江西科学技术出版社

以下学校参与本丛书的编写,在此鸣谢:

曲阜师大附中	山东省实验中学	烟台二中	牟平一中
济宁一中	高密一中	肥城泰西中学	东营一中
日照市第一中学	寿光市第一中学	临沂一中	莘县第一中学
南师附中	金陵中学	丹阳中学	前黄高级中学
常州高级中学	天一中学	南菁高级中学	苏州高级中学
扬州中学	启东中学	南通中学	姜堰中学
盐城中学	新海中学	淮阴中学	鹤岗市一中
哈尔滨市九中	鸡西市一中	齐齐哈尔市一中	东北师大附中
吉林省实验中学	长春市实验中学	吉林市一中	延边市二中
松原前郭五中	松原市第二中学	安庆市第二中学	太和县第二中学
赣州一中	宣城市水阳高级中学	滁州市实验中学	合肥市第一中学
桐城市桐城中学	马鞍山市第二中学	安庆市第一中学	濉溪中学
银川高中	银川第一中学	银川第二中学	西吉一中
贺兰一中	陕西师大附中	米脂县中学	城固县第一中学
山阳县中学	郑州一中	河南省实验中学	郑州外国语学校
郑州四中	开封高级中学	洛阳第一高级中学	焦作第十一中学
江西师大附中	南昌市第二中学	临川一中	临川二中
九江一中	宜春中学	樟树中学	长郡中学
株洲市一中	长沙市雅礼中学	长沙市周南中学	长沙县一中
宁乡县一中	永州市一中	郴州市一中	株洲市二中
衡阳市八中	洞口县三中	沅江市三中	岳阳市一中
岳阳县一中	桑植一中	广州三中	执信中学
华师附中	华南理工大学附中	省实验中学	深圳中学
汕头金山中学	惠州第一中学	高州中学	海南华侨中学
海口市第一中学	海师附中	海南省农垦中学	福建师大附中
南平高级中学	福州三中	厦门市第一中学	龙岩一中
漳州市第一中学	福州一中	福州八中	宁德市第一中学
厦门双十中学	莆田二中	杭州市高级中学	宁波效实中学
绍兴市第一中学	金华市一中	浙师大附中	衢州二中
绍兴柯桥中学	温州中学	杭州市外国语学校	杭州市第二中学
杭州市学军中学	台州中学	温岭中学	鹰潭一中
余江一中	金溪一中	新建二中	

版权所有 翻版必究

前 言

新一轮教育改革浪潮席卷全国,为了适应这一新的教育形势,进一步提高教育教学质量,让学生尽快适应新教材的学习,应广大学子的要求,我们特邀了几大课改省区的一线高级教师,本着课程改革的精神,精益求精,编写了这套符合新课标要求,适合学生使用的《夺冠之路》系列丛书。

本丛书编写体现以下特色:

1. 采用“书加卷”的编写形式,注重基础,勇于创新

本系列丛书在编写时充分考虑到实际教学的需要,运用了“书加卷”这一灵活的编写体例。“书”——讲解部分,内容源于教材,紧扣基础知识,贴近学生,贴近课堂,在注重基础知识的同时,力求深研教材,并在一定程度上突破教材,积极创新。“卷”——综合测试卷,在打牢双基的同时,提高学生的学习能力和应试能力。

2. 讲练结合,科学实用,步步为营,循序渐进

本系列丛书采用实用的讲练结合模式,依据新教材《课程标准》和《考试大纲》的要求,遵循“适度”“适量”的编写原则,合理安排题型及题量,合理控制难易程度,知识讲解及练习题的设计由浅入深,由易到难,层层推进,步步为营,学生能迅速入门,轻松吸收。综合测试部分设置了合理的时间和分值,方便教师批阅,有利于学生了解自身的能力和水平。

3. 详细精练的思维点拨,注重培养解题能力

“书”的讲解答案和“卷”的练习答案精解精析,突出要点和解题方法,尽可能多地提供解题技巧,注重重点、难点、疑点,帮助学生提高解题能力。

本系列丛书凝结了几大课改省区一线高级教师们的心血和汗水,教师们审时度势,以一种全新的视角和理念,精辟诠释高中新教材,敏锐洞察高考新动向,助您高考路上一路夺冠!

尽管我们在编写过程中力求精益求精,历时数月,反复校审,但仍难免存在一些错误和疏漏,真诚希望广大读者朋友指正,《夺冠之路》愿与您一路同行!

编 者

目 录

第一篇 集合与简易逻辑(必修1+选修2-1)	1
第一章 集合(必修1)	1
§ 1.1.1 集合的概念与运算	1
第二章 常用逻辑用语(选修2-1)	7
§ 1.2.1 命题间相互关系、充要条件、量词及逻辑联结词	7
第二篇 函 数(必修1)	14
第一章 函数(必修1)	14
§ 2.1.1 函数的概念及其解析式	14
§ 2.1.2 函数的定义域、值域和最值	19
§ 2.1.3 函数的奇偶性与周期性	24
§ 2.1.4 函数单调性	29
§ 2.1.5 二次函数	33
§ 2.1.6 指数与指数函数	38
§ 2.1.7 对数与对数函数	42
§ 2.1.8 幂函数、函数的图像	45
§ 2.1.9 函数与方程	51
§ 2.1.10 函数的综合应用	55
第三篇 导数及其应用(选修2-2)	62
第一章 导数及其应用(选修2-2)	62
§ 3.1.1 导数的概念及运算	62
§ 3.1.2 导数在研究函数中的应用	67
§ 3.1.3 定积分	71
§ 3.1.4 函数与导数的综合应用	76
第四篇 三角函数与解三角形(必修4+必修5)	81
第一章 三角函数与解三角形(必修4+必修5)	81
§ 4.1.1 角的概念、任意角的三角函数、同角三角函数关系式与诱导公式	81
§ 4.1.2 两角和与差的三角函数及三角恒等变换	86
§ 4.1.3 三角函数的图像	92
§ 4.1.4 三角函数的性质	97
§ 4.1.5 正弦定理与余弦定理、解三角形的应用问题	103
第五篇 平面向量(必修4)	110
第一章 平面向量(必修4)	110
§ 5.1.1 平面向量的概念及其运算	111
§ 5.1.2 平面向量基本定理及向量的坐标表示	115
§ 5.1.3 平面向量的数量积	119
§ 5.1.4 平面向量的综合应用	124
第六篇 数列(必修5)	130
第一章 数列(必修5)	130
§ 6.1.1 数列的概念和数列的通项公式	131
§ 6.1.2 等差数列	136
§ 6.1.3 等比数列	141
§ 6.1.4 数列的求和与递推数列、等差数列	145
第七篇 不等式(必修5)	153
第一章 不等式(必修5)	153
§ 7.1.1 不等关系与不等式的性质、基本不等式	154
§ 7.1.2 不等式的解法	160

§ 7.1.3 简单的线性规划	164
第八篇 立体几何(必修 2+选修 2-1)	171
第一章 空间几何体与点、直线、平面之间的位置关系(必修 2)	171
§ 8.1.1 直观图、三视图、空间几何体的表面积与体积	172
§ 8.1.2 平面的基本性质、空间两条直线	178
§ 8.1.3 平行关系	183
§ 8.1.4 垂直关系	189
第二章 空间向量与立体几何(选修 2-1)	197
§ 8.2.1 空间向量及其运算	197
§ 8.2.2 空间角与距离	203
§ 8.2.3 立体几何与空间向量的综合应用	211
第九篇 平面解析几何(必修 2+选修 2-1)	218
第一章 直线与圆(必修 2)	218
§ 9.1.1 直线方程	219
§ 9.1.2 两直线的位置关系	223
§ 9.1.3 圆的方程	227
§ 9.1.4 直线与圆的位置关系及平面解析几何的综合运用	231
第二章 圆锥曲线与方程(选修 2-1)	237
§ 9.2.1 椭圆	238
§ 9.2.2 双曲线	244
§ 9.2.3 抛物线	250
§ 9.2.4 直线与圆锥曲线的位置关系	256
§ 9.2.5 圆锥曲线的综合应用	261
第十篇 计数原理、概率与统计(必修 3+选修 2-3)	268
第一章 计数原理(选修 2-3)	268
§ 10.1.1 两个计数原理与排列组合的应用	268
§ 10.1.2 二项式定理	274
第二章 概率(必修 3)	280
§ 10.2.1 古典概型与几何概型	280
第三章 随机变量及其分布(选修 2-3)	287
§ 10.3.1 条件概率与独立事件	287
§ 10.3.2 离散型随机变量及其均值、方差	293
§ 10.3.3 常见离散型随机变量分布与正态分布	299
第四章 统计和统计案例(必修 3+选修 2-3)	305
§ 10.4.1 抽样方法、用样本估计总体、变量的相关性	305
§ 10.4.2 回归分析与独立性检验	314
第十一篇 算法初步、推理与证明、复数(必修 3+选修 2-2)	321
第一章 算法初步(必修 3)	321
§ 11.1.1 算法的基本思想与算法的基本结构及设计	321
§ 11.1.2 几种基本语句	328
第二章 推理与证明(选修 2-2)	335
§ 11.2.1 合情推理与演绎推理	336
§ 11.2.2 直接证明、间接证明与数学归纳法	341
第三章 数系的扩充与复数的引入(选修 2-2)	348
§ 11.3.1 复数	348
坐标系与参数方程(选修 4-4)	353
不等式选讲(选修 4-5)	359
参考答案	365



第一篇 集合与简易逻辑(必修1+选修2-1)

第一章 集合(必修1)

考纲诠释

锁定目标 扬帆启航

考纲要求

1. 集合的含义与表示

- (1) 了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系.
- (2) 能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

2. 集合间的基本关系

- (1) 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
- (2) 在具体情境中,了解全集与空集的含义.

3. 集合的基本运算

- (1) 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.
- (2) 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.
- (3) 能使用韦恩图(Venn)表达集合的关系及运算.

考纲解读

有关集合的高考试题,考查重点是集合与集合之间的关系,近年试题加强了对集合的计算化简的考查,并向无限集发展,考查抽象思维能力,在解决这些问题

时,要注意利用几何的直观性,注意运用 Venn 图解题方法的训练,注意利用特殊值法解题,加强集合表示方法的转换和化简的训练. 考试形式多以一道选择题或填空题为主.

预测 2011 年高考将继续体现本章知识的工具作用,多以小题形式出现,也会渗透在解答题的表达之中,相对独立. 具体题型估计为:

1. 题型是 1 个选择题或 1 个填空题;
2. 热点是集合的基本概念、运算和工具作用.

应试策略

本章内容概念性强,考题大都为客观题,因此复习中应注意:

1. 复习集合,可以从两个方面入手,一方面是集合的概念之间的区别与联系,另一方面是对集合知识的应用.
2. 主要是把握集合与元素、集合与集合之间的关系,弄清有关的术语和符号,特别是对集合中的元素的属性要分清楚.
3. 强化对集合与集合关系题目的训练,注意利用几何直观性研究问题,注意运用 Venn 图解题方法的训练,加强两种集合表示方法转换和化简训练.

§ 1.1.1 集合的概念与运算

知识清单

吸取精华 轻松上场

知识要点

1. 集合的含义及其关系

- (1) 集合中的元素具有的三个性质:确定性、无序性和互异性;
- (2) 集合的 3 种表示方法:列举法、描述法、韦恩图;
- (3) 集合中元素与集合的关系:

文字语言	符号语言
属于	$\in$
不属于	$\notin$

(4) 常见集合的符号表示

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$

2. 集合间的基本关系





(1) 集合间的关系

表示 关系	文字语言	符号语言
相等	集合A与集合B中的所有元素都相同	$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A \Rightarrow A=B$
子集	A中任意一元素均为B中的元素	$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$
真子集	A中任意一元素均为B中的元素,且B中至少有一元素不是A的元素	$A \subsetneq B$
空集	空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集	$\emptyset \subseteq A, \emptyset \subsetneq B (B \neq \emptyset)$

(2) 集合间的关系的几个重要结论

- ① 空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;
 ② 任何集合都是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;
 ③ 集合关系的传递性:若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$,

若 $A=B, B=C$,则 $A=C$.

3. 集合的基本运算及性质

(1) 集合的基本运算

- ① 两个集合的交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;
 ② 两个集合的并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;
 ③ 设全集是U,集合 $A \subseteq U$,则 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$

交	并	补
$\cap$	$\cup$	
$A \cap B = \{x x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$	$A \cup B = \{x x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$	$\complement_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$

方法:常借助数轴或韦恩图进行集合的交、并、补三种运算.

(2) 集合常用的运算性质及一些重要结论:

- ① $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$;
 ② $A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$;
 ③ $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$;
 ④ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A; A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
 ⑤ 德摩根公式: $\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B, \complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$.

⑥ 容斥原理: $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(C \cap A) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

⑦ 若有限集A有n个元素,则A的子集有 2^n 个,真子集有 $2^n - 1$,非空子集有 $2^n - 1$ 个,非空真子集有 $2^n - 2$ 个.

决胜考场

胸有成竹 圆梦梦想

高考命题指向

预测在2011年高考中,对集合的考查的重点仍然是集合间的关系判定以及集合间的运算问题.既有可能考查具体集合的问题,也有可能考查抽象集合的问题;既有可能单独考查集合,也有可能考查集合与其他知识的交汇处命题;既有可能考查较为简单的常规集合问题,也有可能考查较为灵活的非常规的开放题、探究题、信息迁移题等.

典例剖析

题型1 集合的概念

【例1】(1)M、N是两个非空集合,定义M与N的差集为 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$,则 $M - (M - N)$ 等于 ()

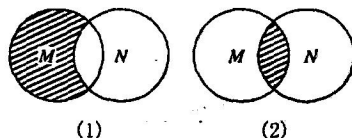
- A. N B. $M \cap N$ C. $M \cup N$ D. M

(2)设由实数 $a^2 - a + 1, 3, a, -1$ 为对象组成的集合为M,且M中仅含有3个元素,则这样的不同的实数a共有 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【分析】(1)题为一道信息迁移题,注意差集的定义,结合Venn图便能迅速求解;对于(2)题,四个数中有且仅有两个是相等的,究竟哪两个是相等的,必须通过讨论来确定.

【解】(1) $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$ 是指图(1)中的阴影部分.



同样 $M - (M - N)$ 是指图(2)中的阴影部分.

(2) $\because M$ 中的元素仅有3个, $\therefore$ 其中有且仅有两个数是相等的.

若 $a^2 - a + 1 = 3$,解之得 $a = -1$,或 $a = 2$,当 $a = -1$ 时,四个数的取值仅有 -1 和 3 两种,与已知矛盾, $\therefore a \neq -1$,而 $a = 2$ 时, $M = \{-1, 2, 3\}$;

若 $a^2 - a + 1 = a$,解之得 $a = 1$,此时 $M = \{-1, 1,$



3);

若 $a^2 - a + 1 = -1, a \in \emptyset$;若 $a = 3$, 则 $a^2 - a + 1 = 7$, 此时 $M = \{-1, 3, 7\}$ 综上所述 $a = 2, 1, 3$.

【答案】(1)B (2)C

【点评】(1)解决集合型信息迁移题的基本方法是以旧带新法,即把新定义的运算纳入到已有的集合交、并、补的运算体系之中,并用已有的解题方法来分析、解决新的问题.

(2)对于集合的概念题,一般运用一些基本的概念和定义推断分析来求解.其中集合的元素所具有的“三性”(确定性、无序性、互异性)也是我们在解题中容易忽略的地方,应时刻提防.

变式训练

1. (1)(2009年江西理)定义集合运算: $A * B = \{x | x = xy, x \in A, y \in B\}$. 设 $A = \{1, 2\}, B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 的所有元素之和为 ()

A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

(2)(2010届高三黄冈中学第一次月考卷)设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 集合 $A = \{x | f(x) = x\} = \{a\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型2 集合间的关系

【例2】(1)设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}, N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

A. $M = N$ B. $M \subseteq N$
C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

(2)设集合 $P = \{m | -1 < m \leq 0\}, Q = \{m \in \mathbb{R} | mx^2 + 4mx - 4 \leq 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 则下列关系中成立的是 ()

A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$ C. $P = Q$ D. $Q = \emptyset$

【分析】第(1)小题有两种解题思路:将 M 和 N 的元素列举出来,然后进行判断;也可依据表达式之间的关系进行判断;对于第(2)小题,可借助数轴来弄清两个集合 P 间的包含关系.

【解】(1)方法一:可利用特殊值法,令 $k = -2, -1, 0, 1, 2$ 可得

$M = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\}, N = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}, \therefore M \subseteq N$.

方法二:集合 M 的元素为: $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 集合 N 的元素为: $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 而

$2k+1$ 为奇数, $k+2$ 为整数, $\therefore M \subseteq N, \therefore M \subseteq N$.

(2) $mx^2 + 4mx - 4 \leq 0$ 对任意实数 x 恒成立时,分以下两种情况:

① $m = 0$ 时, $-4 \leq 0$ 恒成立;② $m \neq 0$ 时,依题意得 $\begin{cases} m < 0, \\ \Delta = 16m^2 - 4m \times (-4) \leq 0. \end{cases}$ 解得 $-1 \leq m < 0$.

综合①②知 $-1 \leq m \leq 0, \therefore Q = \{m | -1 \leq m \leq 0\}, \therefore P \subseteq Q$.

【答案】(1)B (2)A.

【点评】(1)判断集合与集合之间的关系的方法有以下三种:

①特征分析法.抓住两个集合的元素所具有的特征(或共同属性)进行分析,看一个集合的所有元素是否具有另一个集合所具有的特征;

②元素分析法.求出集合的所有元素,比较两个集合的元素之间的差异;

③图示法.利用韦恩图或数轴把两个集合表示出来,再判断它们之间的关系.

(2)含有参数的问题,常常结合参数的意义及对结果的影响而进行分类讨论,并做到不重不漏.

变式训练

2. (1)(2009年广东高考卷)第二十九届夏季奥林匹克运动会将于2008年8月8日在北京举行,若集合 $A = \{\text{参加北京奥运会比赛的运动员}\}$, 集合 $B = \{\text{参加北京奥运会比赛的男运动员}\}$, 集合 $C = \{\text{参加北京奥运会比赛的女运动员}\}$, 则下列关系正确的是 ()

A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq C$
C. $A \cap B = C$ D. $B \cup C = A$

(2)设集合 $A = \{x | x = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, 若 $x = \frac{9}{2}$, 则下列关系正确的是 ()

A. $x \subseteq A$ B. $x \in A$
C. $\{x\} \in A$ D. $\{\frac{9}{2}\} \subseteq A$

(3)已知集合 $A = \{m, m+d, m+2d\}, B = \{m, mq, mq^2\}$, 其中 $m \neq 0$, 且 $A = B$, 则 $q = \underline{\hspace{2cm}}$

题型3 集合的运算

【例3】若 $B = \{x | x^2 - 3x + 2 < 0\}$, 是否存在实数 a , 使 $A = \{x | x^2 - (a+a^2)x + a^3 < 0\}$, 且 $A \cap B = A$? 请说明你的理由.

【分析】 $B = \{x | 1 < x < 2\}$, A 是含参数的一元二次不等式的解集, 参数 a 决定了两根 a, a^2 的大小, 故需对参数 a 分三种情况进行分类讨论, 分别求出集合



A, 根据“ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ ”, 利用数轴建立不等式组, 分别求出 a 的范围, 最后综合得解.

【解】 $\because A = \{x | (x-a)(x-a^2) < 0\}, B = \{x | 1 < x < 2\}$, 若存在实数 a , 使 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$.

(1) 若 $a = a^2$, 即 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, 此时 $A = \{x | (x-a)^2 < 0\} = \emptyset$, 满足 $A \cap B = A$, $\therefore a = 0$ 或 $a = 1$;

(2) 若 $a^2 > a$, 即 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时, $A = \{x | a < x < a^2\}$, 要使 $A \cap B = A$, 则 $\begin{cases} a \geq 1 \\ a^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a \leq \sqrt{2}, \therefore 1 < a \leq \sqrt{2}$;

(3) 若 $a^2 < a$, 即 $0 < a < 1$ 时, $A = \{x | a^2 < x < a\}$, 要使 $A \cap B = A$, 则 $\begin{cases} a \leq 2 \\ a^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a \leq 2, \therefore a \in \emptyset$.

综上所述, 当 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ 或 $a = 0$ 时满足 $A \cap B = A$.

即存在实数 a , 使 $A = \{x | x^2 - (a+a^2)x + a^3 < 0\}$, 且 $A \cap B = A$ 成立.

【点评】 (1) 本题是以集合为载体考查解含有参数的探索性问题, 探索性问题一般用以下策略求解: 先假设存在, 在此前提下进行推理, 或者证明其存在, 或者得出矛盾的结果, 而否定假设.

(2) 对于集合的运算问题, 特别要关注能否取空集.

变式训练

3. 已知 $A = \{x | x^3 + 3x^2 + 2x > 0\}, B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$ 且 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 2\}, A \cup B = \{x | x > -2\}$, 求 a, b 的值.

题型4 集合与其他知识综合

【例4】 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + mx - y + 2 = 0\}, B = \{(x, y) | x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$, 如果 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

【分析】 如果目光总是停留在集合这一狭窄的知识范围内, 此题的思维方法是很难找到的. 事实上, 集合符号在本题中只起了一种“化妆品”的作用, 它的实际背景是“抛物线 $x^2 + mx - y + 2 = 0$ 与线段 $x - y + 1 = 0 (0 \leq x \leq 2)$ 有公共点, 求实数 m 的取值范围”. 这种数学符号与数学语言的互译, 是考生必须具备的一种数学素质.

【解】 由 $\begin{cases} x^2 + mx - y + 2 = 0, \\ x - y + 1 = 0 (0 \leq x \leq 2), \end{cases}$ 得

$$x^2 + (m-1)x + 1 = 0. \quad ①$$

$\because A \cap B \neq \emptyset, \therefore$ 方程①在区间 $[0, 2]$ 上至少有一个实数解.

首先, 由 $\Delta = (m-1)^2 - 4 \geq 0$, 得 $m \geq 3$ 或 $m \leq -1$.

当 $m \geq 3$ 时, 由 $x_1 + x_2 = -(m-1) < 0$ 及 $x_1 x_2 = 1$ 知, 方程①只有负根, 不符合要求;

当 $m \leq -1$ 时, 由 $x_1 + x_2 = -(m-1) > 0$ 及 $x_1 x_2 = 1 > 0$ 知, 方程①有两个互为倒数的正根. 故必有一根在区间 $(0, 1]$ 内, 从而方程①至少有一个根在区间 $[0, 2]$ 内.

综上所述, 所求 m 的取值范围是 $(-\infty, -1]$.

【点评】 上述解法应用了数形结合的思想. 如果注意到抛物线 $x^2 + mx - y + 2 = 0$ 与线段 $x - y + 1 = 0 (0 \leq x \leq 2)$ 的公共点在线段上, 本题也可以利用公共点内分线段的比 λ 的取值范围建立关于 m 的不等式来解.

变式训练

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \in P, \\ -x & x \in M, \end{cases}$ 其中 P, M 为实数

集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}, f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$. 给出下列四个判断, 其中正确判断有 ()

①若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$ ②若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$ ③若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$ ④若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

方法归纳

1. 对于集合问题, 要首先确定属于哪类集合(数集、点集或某类图形), 然后确定处理此类问题的方法.

2. 关于集合的运算, 一般应把参与运算的各集合化到最简, 再进行运算.

3. 为了直观表示集合之间的关系, 常用 Venn 图或者曲线、数轴上的区间来直观表示. 对于用描述法表示的集合若改用列举法, 或用不等式(方程)的解集表示出来, 会更具体、更明确.

3 特别注意不要忽略“空集是任意集合的子集”这一性质, 在解题时, 若未指明集合非空, 则要考虑集合为空集的可能性.

4. 利用相等集合的定义解题时, 特别要注意集合中元素的互异性, 对计算的结果要加以检验. 此外, 若



● 锁定目标 一路夺冠 ●

两个有限的数集相等,则它们元素的和(或积)也相等.

5. 对于含参数的集合问题,多根据集合元素的互异性来处理.

6. 集合问题多与函数、方程、不等式有关,要注意各类知识的融会贯通.解决问题时常用数形结合、分类讨论等数学思想.

夺冠训练

平时原创 考前夺冠

一、选择题(每小题 6 分,共 30 分)

1. 下列关系中正确的个数为 ()

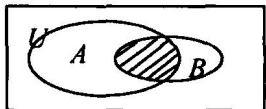
- ① $0 \in \{0\}$, ② $\emptyset \subseteq \{0\}$, ③ $\{0,1\} \subseteq \{(0,1)\}$, ④ $\{(a,b)\} = \{(b,a)\}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (韶关 09 届高三摸底考)已知 $A = \{x | x(1-x) > 0\}$, $B = \{x | \log_2 x < 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(0,1)$ B. $(0,2)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. (09 年吴川市川西中学 09 届第四次月考)设全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | x(x+3) < 0\}$, $B = \{x | x < -1\}$, 则下图中阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{x | x > 0\}$ B. $\{x | -3 < x < 0\}$
C. $\{x | -3 < x < -1\}$ D. $\{x | x < -1\}$

4. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

5. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m+1 < x < 2m-1\}$ 且 $B \neq \emptyset$, 若 $A \cup B = A$, 则 ()

- A. $-3 \leq m \leq 4$ B. $-3 < m < 4$
C. $2 < m < 4$ D. $2 \leq m \leq 4$

二、填空题(每小题 6 分,共 24 分)

6. 设集合 $A = \{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B =$.

7. (2010 · 北京卷)设 A 是整数集的一个非空子集,对于 $k \in A$, 如果 $k-1 \notin A$ 且 $k+1 \notin A$, 那么 k 是 A 的一个“孤立元”, 给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 由 S 的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“孤立元”的集合共有 个.

8. $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, a > 0, b > 0\}$, 当 $A \cap B$ 只有一个元素时, a, b

的关系式是 .

9. 定义集合运算: $A \circ B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \circ B$ 的所有元素之和为 .

三、解答题(共 46 分)

10. (15 分)已知集合 $A = \{x | mx^2 - 2x + 3 = 0, m \in \mathbb{R}\}$.

- (1) 若 A 是空集, 求 m 的取值范围;
(2) 若 A 中只有一个元素, 求 m 的值;
(3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 m 的取值范围.

11. (15 分)(2010 · 河南省上蔡一中高三月考)

已知集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$.

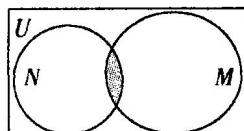
- (1) 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围;
(2) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围.

12. (16 分)设 $A = \{(x, y) | y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) | 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 是否存在 $k, b \in \mathbb{N}$, 使得 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 证明此结论.



❖ 真题回放 ❖

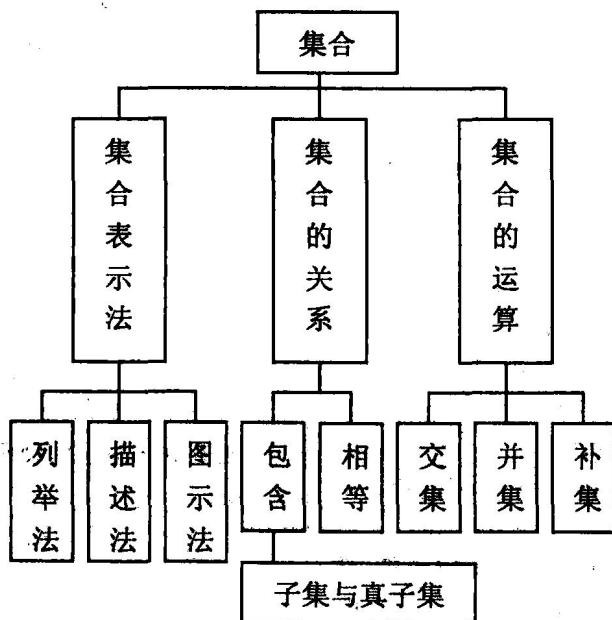
- (2009·宁夏)已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{0,3,6,9,12\}$, 则 $A \cap \complement_N B =$ ()
 A. $\{1,5,7\}$ B. $\{3,5,7\}$
 C. $\{1,3,9\}$ D. $\{1,2,3\}$
- (2009·浙江)设 $U=\mathbb{R}$, $A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|x>1\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ ()
 A. $\{x|0 \leq x < 1\}$ B. $\{x|0 < x \leq 1\}$
 C. $\{x|x < 0\}$ D. $\{x|x > 1\}$
- (2009·山东)集合 $A=\{0,2,a\}$, $B=\{1,a^2\}$, 若 $A \cup B = \{0,1,2,4,16\}$, 则 a 的值为 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
- (2009·广东)已知全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $M=\{x|-2 \leq x-1 \leq 2\}$ 和 $N=\{x|x=2k-1, k=1,2,\dots\}$ 的关系的韦恩(Venn)图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有 ()



- A. 3 个 B. 2 个
 C. 1 个 D. 无穷多个
- (2009·上海)已知集合 $A=\{x|x \leq 1\}$, $B=\{x|x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.
 - (2009·陕西)某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有 _____ 人.

本章知识小结

1. 知识网络



2. 重点与难点

重点: 集合元素的特征、集合的三种表示方法、集合的交、并、补三种运算.

难点: 正确把握集合元素的特征、进行集合的不同表示方法之间的相互转化, 准确进行集合的交、并、补三种运算.



第二章 常用逻辑用语(选修 2-1)

考纲诠释

锁定目标 扬帆启航

考纲要求

1. 命题及其关系

(1) 理解命题的概念

(2) 了解“若 p , 则 q ”形式的命题的逆命题、否命题与逆否命题, 会分析四种命题的相互关系.

(3) 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

2. 简单的逻辑联结词

了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.

3. 全称量词与存在量词

(1) 理解全称量词与存在量词的意义.

(2) 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

考纲解读

常用逻辑用语作为学习数学知识的工具, 在高考中多有体现, 并且所占比重也会越来越大, 在高考中多以选择题、填空题的形式出现, 有时也隐含于解答题中, 主要考查有关命题的概念、四种命题间的相互关系、充要条件、逻辑联结词的使用等.

预测 2011 年高考对本模块的考查为:

1. 命题仍保持原来的模式, 不会出现大的波动.
2. 命题的重点: 一是命题的四种形式及命题的等价性; 二是充要条件的判定, 主要考查命题的转换、逻辑推理能力和分析问题的能力.

3. 全称量词与存在量词作为新增内容, 会在选择题、填空题中出现.

应试策略

1. 在复习中首先把握基础性知识, 深刻理解基本知识点、基本数学思想和基本方法. 重点掌握集合、命题、充分必要条件的概念和运算方法, 掌握数形结合思想.

2. 涉及本章的高考题综合题不多, 难度不大, 多以选择填空题为主. 所以复习时不易做过多过高的要求, 只要灵活掌握小型综合题即可. 如集合与不等式, 充分必要条件与三角立几解几中知识的结合, 四种命题与一个命题的否定形式.

3. 活用定义法解题.

4. 重视数形结合. 数缺形时少直观, 形缺数时难入微, 本章是数形结合的开始与起点, 要重点练习.

§ 1.2.1 命题间相互关系、充要条件、量词及逻辑联结词

知识清单

吸取精华 轻松上场

1. 逻辑联结词与命题

(1) 命题: 可以判断真假的语句叫命题;

(2) 逻辑联结词: “或”“且”“非”这些词就叫做逻辑联结词, 其中“或”相当于集合中的“并集”; “且”相当于集合中的“交集”; “非”相当于集合在全集中的“补集”;

(3) 简单命题与复合命题: 不含逻辑联结词的命题叫简单命题, 由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫复合命题.

常用小写的拉丁字母 $p, q, r, s, \dots$ 表示命题, 故复合命题有三种形式: p 或 q ; p 且 q ; 非 p .

(4) 真值表: 表示复合命题真假的表叫真值表.

“非 p ”形式复合命题的真假可以用下表表示:

p	非 p
真	假
假	真

“ p 或 q ”形式复合命题的真假可以用下表表示:

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

“ p 且 q ”形式复合命题的真假可以用下表表示:



p	q	P 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

注:真值表可用以下口诀记忆:真非假,假非真,一真或为真,二真且才真.

2. 四种命题及关系

(1) 四种命题

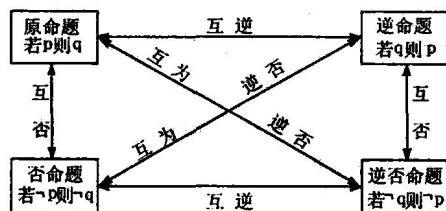
原命题:如果 p , 那么 q (或若 p 则 q);

逆命题:若 q 则 p ;

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$;

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2) 四种命题之间的相互关系



这里,原命题与逆否命题,逆命题与否命题是等价命题.

3. 充分条件与必要条件

(1)充分、必要条件:如果 $p \Rightarrow q$, 则 p 叫 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

(2)充要条件:如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 记作 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 叫做 q 的充分必要条件, 简称充要条件.

4. 全称命题与特称命题

(1)短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体, 逻辑中通常叫做全称量词. 含有全称量词的命题, 叫做全称命题.

(2)短语“有一个”或“有些”或“至少有一个”在陈述中表示所述事物的个体或部分, 逻辑中通常叫做存在量词, 含有存在量词的命题, 叫做存在性命题.

决胜考场

胸有成竹 圆梦梦想

高考命题指向

预测在 2011 年的高考中, 对常用逻辑用语的考查将主要体现在以下两个方面: 一是直接对它进行考查, 主要有对命题真假的判断、复合命题的构成、命题的四种形式、充要条件与必要条件的判断、全称量词与存在量词的应用等, 其中充要条件与必要条件的判断和命

题真假的判断是高考的热点, 这是因为在充要条件与必要条件判断和命题真假判断的问题中都要以其它章节的内容为载体, 故更容易实现知识点的交汇与融合. 这类题目虽然有一定的综合度, 但难度一般不会太大, 题型为选择题或填空题. 另一方面, 就是将逻辑知识作为工具来考查, 事实上, 高考试题都离不开命题, 我们要注意命题的灵活运用, 并使之成为我们理解题意、分析解决问题的得力助手.

典例剖析

题型 1 判断命题的真假

【例 1】(1)(2010 江西卷文)下列命题是真命题的为 ()

A. 若 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 则 $x = y$

B. 若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$

C. 若 $x = y$, 则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$

D. 若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$

(2)已知命题 $p: x \geq 3$ 或 $x \leq -1$, 命题 $q: x \in \mathbb{Z}$; 如果“ p 且 q ”与“非 q ”同时为假命题, 则满足条件的 x 为 ()

A. $\{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1, x \notin \mathbb{Z}\}$

B. $\{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{0, 1, 2\}$

D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

【分析】(1)直接判断各命题的真假或取特殊值排除求解; (2)由真值表可知, 命题 p 且 q 为假时, p 与 q 中至少有一个为假, 非 p 为假, 则 p 为真.

【解】(1)由 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ 得 $x = y$, 而由 $x^2 = 1$ 得 $x = \pm 1$, 由 $x = y, \sqrt{x}, \sqrt{y}$ 不一定有意义, 而 $x < y$ 得不到 $x^2 < y^2$, 故选 A.

(2)因为“非 q ”为假命题, 所以 q 为真命题, 又由“ p 且 q ”为假命题可知, p 为假命题, $\therefore |x - 1| < 2$ 且 $x \in \mathbb{Z}$.

【答案】(1)A (2)C

【点评】判断由两个命题构成的复合命题的真假时, 首先要分别判断两个命题的真假, 再由复合命题的真值表判断.

变式训练

1. (1)我们规定真命题赋值为 1, 假命题赋值为 0, 1 或 0 均称作命题的真值.

命题 p : 在同一个直角坐标系中, 曲线 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图像与直线 $y = x$ 至多有一个交点”. 那么



● 锁定目标 一路夺冠 ●

命题 p 的真值为_____.

(2)(广东省深圳外国语学校 2010 届高三上学期第二次统测)下列四个命题中,真命题的个数为()

- ①若两平面有三个公共点,则这两个平面重合;
- ②两条直线可以确定一个平面;
- ③若 $M \in \alpha, M \in \beta, \alpha \cap \beta = l$, 则 $M \in l$;
- ④空间中,相交于同一点的三条直线在同一平面内.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

题型 2 全称命题与特称命题

【例 2】(1)设 A, B 为两个集合. 下列四个命题:

- ① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$; ② $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
- ③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$;
- ④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \in B$.

其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)

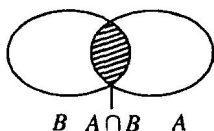
(2)写出下列全称命题或特称命题的否定,并判断真假:

- ①正方形都是菱形.
- ②存在 $x \in \mathbf{R}$, 使 $4x-3 > x$;
- ③对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $x+1=2x$.

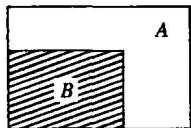
【分析】(1)举反例或用推理的方法进行判断.

(2)全称命题的否定为特称命题,特称命题的否定为全称命题.

【解】(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 有 $x \in B$, 故①错误;②错误;④正确. 亦或如下图所示.



③ $A \subseteq B \Rightarrow A \supseteq B$ 不成立的反例如下图所示. 反之, 同理.



真命题的序号是④

(2)①命题的否定: 有些正方形不是菱形, 假命题.

②命题的否定: 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $4x-3 \leq x$, 假命题.

③命题的否定: 存在 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x+1 \neq 2x$, 真命题.

【点评】(1)判断全称命题与特称命题真假时,若判定一个特称性命题为真,只需找出一个例子即可,否则命题为假;若判定一个全称命题为真,必须对每一个

元素都为真;但判断其为假,也只需举出一个反例即可.

(2)对命题否定时,要注意观察命题特点:对简单命题的否定只要直接否定判断词.如“3是正数”的非命题就是“3不是正数”;对全称命题的否定在否定判断词时还要否定全称量词变成特称命题;对省略全称量词的全称命题要补回全称量词再否定;对特称命题的否定要否定特称量词变成全称命题;对命题“若 p 则 q ”的否定是“若 p 则非 q ”.

变式训练

2. (1)设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 有下列三个命题:

- ①若存在常数 M , 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leq M$, 则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值;
- ②若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x \neq x_0$, 有 $f(x) < f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值;
- ③若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.

这些命题中,真命题的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(2)写出下列命题的“非 p ”命题,并判断 p 的真假.

- ① p : 方程 $x^2-x-6=0$ 的解是 $x=3$;
- ② p : 四边相等的四边形是正方形;
- ③ p : 不论 m 取何实数, 方程 $x^2+x+m=0$ 必有实数根;
- ④ p : 存在一个实数 x , 使得 $x^2+2x+1 \leq 0$.

题型 3 四种命题的转化

【例 3】(1)写出命题:“若 $a > b$, 则 $a+1 > b+1$ ”的否定与否命题.

(2)写出命题“ $a, b, c \in \mathbf{R}$, 若 $ac < 0$, 则 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根”的逆命题、否命题、逆否命题,并判断这三个命题的真假.

【分析】(1)要分清否命题与命题的否定的区别;(2)认清命题的条件 p 和结论 q , 然后按定义写出逆命题、否命题、逆否命题,最后判断真假.





【解】 (1)命题的否定:若 $a > b$, 则 $a+1 \leq b+1$

命题的否命题:若 $a \leq b$, 则 $a+1 \leq b+1$

(2)逆命题: $a, b, c \in \mathbb{R}$, 若 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) 有两个不相等的实数根, 则 $ac < 0$. 为假命题, 如当 $a = 1, b = -3, c = 2$ 时, 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个不等实根 $x_1 = 1, x_2 = 2$, 但 $ac = 2 > 0$.

否命题: $a, b, c \in \mathbb{R}$, 若 $ac \geq 0$, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) 没有两个不相等的实数根. 为假命题. 这是因为它和逆命题互为逆否命题, 而逆命题是假命题.

逆否命题: $a, b, c \in \mathbb{R}$, 若 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) 没有两个不相等的实数根, 则 $ac \geq 0$. 为真命题. 因为原命题是真命题, 它与原命题等价.

【点评】 (1)命题的否定, 是对整个命题进行否定, 侧重于对命题结论的否定. 如具体到“若 则”而言, 命题的否定是只否定结论不否定条件. 而命题的否命题则是既否定条件又否定结论.

(2)在写逆命题、否命题与逆否命题时, 注意找准条件和结论, 这一步作对了, 一般都可以写对命题; 命题的真假的判断可以运用推理证明的方法, 或举反例的方法, 或者根据它的逆否命题的真假来判断.

变式训练

3. (1)(2010 合肥市高三年级调研测试)命题“若 $a > b$, 则 $a-1 > b-1$ ”的否命题是 ()

- A. 若 $a > b$, 则 $a-1 \leq b-1$
- B. 若 $a > b$, 则 $a-1 < b-1$
- C. 若 $a \leq b$, 则 $a-1 \leq b-1$
- D. 若 $a < b$, 则 $a-1 < b-1$

(2)下列四个命题中真命题有哪几个?

①“若 $xy=1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题; ②“面积相等的三角形全等”的否命题; ③“若 $m \leq 1$, 则方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实根”的逆否命题; ④“若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$ ”的逆否命题.

题型 4 有关充要性的问题

【例 4】指出下列各组命题中, p 是 q 的什么条件 (在“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”中选一种作答)

- (1)在 $\triangle ABC$ 中, $p: A > B, q: \sin A > \sin B$;
- (2)对于实数 $x, y, p: x+y \neq 8, q: x \neq 2$ 或 $y \neq 6$;
- (3)在 $\triangle ABC$ 中, $p: \sin A > \sin B, q: \tan A > \tan B$;
- (4)已知 $x, y \in \mathbb{R}, p: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0, q: (x-1)(y-2) = 0$;
- (5) $\neg p: c = 0, \neg q$: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点.

【分析】 (1)(2)(3)用定义法求解. (4)用集合法, (5)用等价转化法求解.

【解】 (1)在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可知: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$\therefore \sin A > \sin B \Leftrightarrow a > b$ 又由 $a > b \Leftrightarrow A > B$,

$\therefore \sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B$ 即 p 是 q 的充要条件.

(2) $\because$ 命题“若 $x=2$ 且 $y=6$, 则 $x+y=8$ ”是真命题, 故 $p \Rightarrow q$,

命题“若 $x+y=8$, 则 $x=2$ 且 $y=6$ ”是假命题, 故 q 不能推出 p ,

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

(3)取 $A = 120^\circ, B = 30^\circ, p$ 不能推导出 q ; 取 $A = 30^\circ, B = 120^\circ, q$ 不能推导出 p

$\therefore p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

(4) $P = \{(1, 2)\}, Q = \{(x, y) | x=1 \text{ 或 } y=2\}, P \subsetneq Q$,

$\therefore p$ 是 q 的充分非必要条件.

(5) 易知 $\neg p \Leftrightarrow \neg q$, 等价于 $p \Leftrightarrow q$; 所以, p 是 q 的充要条件.

【点评】充要条件的判定常用以下四种方法: 定义法、等价转化法、传递法、集合法, 要能针对各种题型采用合适的判断方法.

其中定义法和集合法为最常用的方法(见下表)

定义(命题若 p , 则 q)	从集合的观点看
①若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件	若集合 $p \subseteq q$, 则 p 是 q 的充分条件
②若 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要条件	若集合 $q \subseteq p$, 则 p 是 q 的必要条件
③若 $q \Rightarrow p$, 且 $p \nRightarrow q$, 则 p 是 q 的必要不充分条件	若集合 $p \supsetneq q$, 则 p 是 q 的必要不充分条件



④若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件	若集合 $p \subseteq q$, 则 p 是 q 的充分不必要条件
⑤若 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 是 q 的充要条件	若集合 $p = q$, p 是 q 的充要条件
⑥若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的非充分也非必要条件	$p \subsetneq q$ 且 $q \not\subsetneq p$, 则 p 是 q 的非充分也非必要条件

等价转化法的原理是原命题与逆否命题同真同假.

变式训练

4. (1)(2009年湖北卷)若非空集合 A, B, C 满足 $A \cup B = C$, 且 B 不是 A 的子集,

则

()

A. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件但不是必要条件

B. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件

C. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充要条件

D. “ $x \in C$ ”既不是“ $x \in A$ ”的充分条件也不是“ $x \in A$ ”必要条件

(2)使不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个充分而不必要条件是

()

A. $x < 0$

B. $x \geq 0$

C. $x \in \{-1, 3, 5\}$

D. $x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $x \geq 3$

题例 5 命题与其他知识综合的问题

【例 5】已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

【分析】利用等价性将“ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件”, 转化为“ p 是 q 的充分不必要条件”求解.

【解】令集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 10\}$,

由 $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m (m > 0)$.

令集合 $B = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m (m > 0)\}$

$\because \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, $\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件, $\therefore A \subseteq B$.

结合数轴可得 $1 - m \leq -2$, 且 $1 + m \geq 10$. 又 $m > 0$, $\therefore m \geq 9$.

即 m 的取值范围为 $\{m | m \geq 9\}$.

【点评】对于一些直接利用定义较难作出判断的充分条件与必要条件的问题, 可利用逆否命题的等价性作出判断, 在进行充分条件与必要条件的推理判断中, 要注意转化.

变式训练

5. 已知 $P = \{x | x \in \mathbb{R}\}, Q = \{x | \frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1\}$, 若 $x \in P$ 的充要条件是 $x \in Q$, 求实数 k 的取值范围.

方法归纳

1. 否命题与命题的否定是两个容易混淆的问题, 要注意它们的区别, 另外要掌握一些常用词语的否定.

2. 由原命题组成其他三种命题的方法是: 先把原命题写成“若 p 则 q ”的形式, 然后交换命题的条件与结论便得到了逆命题; 同时否定命题的条件与结论便得到了否命题; 同时否定命题的条件与结论, 并且交换条件与结论便得到了逆否命题.

3. 判断四种命题真假的常用途径有: 一是先分别写出四种命题, 再分别判断每个命题的真假; 二是利用互为逆否命题是等价命题这一关系来判断它的逆否命题的真假, 这种方法有时能简化解题过程.

4. 若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件, 同时 q 也是 p 的必要条件; 若 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 与 q 互为充要条件. 对论证充要条件题要分清“充分性”与“必要性”, 然后分别作出相应的证明.

5. 逻辑联结词主要考查由联结词联结起来的命题的真假; 而全称、特称命题是课标新增部分, 对它的复习应引起足够的重视, 这必将是高考的重点. 要求: ①理解全称量词与存在量词、全称命题与特称命题的含义, 掌握其表示符号; ②能够对一个全称命题和特称命题作出判断, 判断其真假; ③熟练地掌握含有一个量词的命题的否定方法, 能够正确地写出一个含有量词的命题的否定形式.

6. 写出命题的非(否定), 需要对其正面叙述的词语进行否定, 常用正面叙述词语及它的否定列举如下:





正面词语	且	小于($<$)	都是	都不是	至少 n 个	至多 n 个
否定词语	或	不小于($\geq$)	不都是	至少有一个是	至多 $n-1$ 个	至少 $n+1$ 个

正面词语	任意的	所有的	有无穷多个	存在唯一的	对任意 p , 使...恒成立
否定词语	某个	某些	只有有限多个	不存在或至少存在两个	至少有一个 p , 使...不成立

夺冠训练

平时磨剑 考时夺魁

一、选择题(每小题 6 分,共 30 分)

1. 命题“所有被 5 整除的整数都是奇数”的否定是

()

- A. 所有被 5 整除的整数都不是奇数
B. 所有奇数都不能被 5 整除
C. 存在被 5 整除的整数不是奇数
D. 至少存在一个奇数,不能被 5 整除

2. (2010 成都十中模拟卷) 已知命题 p : 函数 $y = \log_a(ax+2a)$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 的图像必过定点 $(-1, 1)$; 命题 q : 如果函数 $y = f(x-3)$ 的图像关于原点对称, 那么函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(3, 0)$ 对称. 则

()

- A. “ p 且 q ”为真 B. “ p 或 q ”为假
C. p 真 q 假 D. p 假 q 真

3. 使组合等式 $C_{x-1}^2 = C_{x-1}^{x-1}$ 成立的一个既不充分又不必要的条件是

()

- A. $x-2=2x-1$
B. $3x-3=x^2-1$
C. $x=2$
D. $x=-1$, 或 $x=1$ 或 $x=2$

4. 下列四个命题中真命题是

()

- ①“若 $xy=1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题 ②“面积相等的三角形全等”的否命题
③“若 $m \leq 1$, 则方程 $x^2-2x+m=0$ 有实根”的逆否命题 ④“若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$ ”的逆否命题

- A. ①② B. ②③ C. ①②③ D. ③④

5. 设集合 $U = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) | 2x - y + m > 0\}$, $B = \{(x, y) | x + y - n \leq 0\}$, 那么点 $P(2, 3) \in A \cap (\complement_U B)$ 的充要条件是

()

- A. $m > -1, n < 5$ B. $m < -1, n < 5$
C. $m > -1, n > 5$ D. $m < -1, n > 5$

二、填空题(每小题 6 分,共 24 分)

6. 分别用“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”填空.

- (1) 命题“15 能被 3 和 5 整除”是_____形式;
(2) 命题“16 的平方根是 4 或 -4”是_____形

式;

(3) 命题“李强是高一学生,也是共青团员”是_____形式.

7. 已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件, 则 s 是 q 的_____条件, r 是 q 的_____条件, p 是 s 的_____条件.

8. 命题 p 的否定是“对所有正数 $x, \sqrt{x} > x+1$ ”, 则命题 p 是_____.

9. 给出四组命题

p	q
① 直线 $l \parallel$ 平面 α	l 上两点到 α 的距离相等
② 直线 $l \perp$ 平面 α	l 垂直于 α 内的无数条直线
③ 平面 $\alpha \parallel$ 平面 β	直线 $l \parallel \alpha$, 且 $l \parallel \beta$
④ 平面 α 内任一直线平行于 β	$\alpha \parallel \beta$

满足 p 是 q 的充分且必要条件的序数是_____.

三、解答题(共 46 分)

10. (15 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, $a, b \in \mathbb{R}$, 对命题“若 $a+b \geq 0$, 则 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$ ”, 写出逆命题、逆否命题, 判断其真假, 并证明你的结论.

11. (15 分) 已知命题 $p: x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根; 命题 $q: 4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若命题 p 与命题 q 有且只有一个为真, 求实数 m 的取值范围.