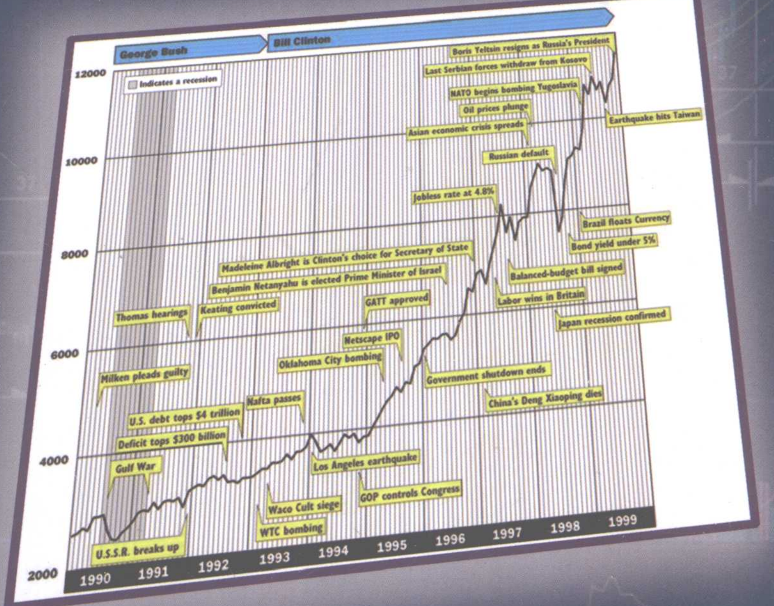
网络继续教育课程学习指导丛书

工程数学

学习与考试指导

陈盛双 周艳娥 主编



WUTP 武汉理工大学出版社

网络继续教育课程学习指导丛书

工程数学学习与考试指导

主　编　陈盛双　周艳娥

武汉理工大学出版社

内 容 提 要

本书是根据编者多年进行远程教育教学研究的经验，针对远程教育的考与学精心设计的学习指导书。

内容包括线性代数、概率论与数理统计，其中线性代数包括行列式、矩阵、向量的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量、二次型；概率论与数理统计包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、数字特征、大数定理与中心极限定理、抽样分布、参数估计与假设检验。本书每一小节都包括要点归纳、典型例题、基础练习、答案与提示，附录包括课程性质与设置目的、课程内容和考核要求、模拟试卷及答案、历年试卷及答案。

本书可供远程教育的工科类、经管类本、专科学生使用，也可供学习线性代数、概率论与数理统计知识的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学学习与考试指导/陈盛双，周艳娥主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2010.2

ISBN 978-7-5629-3138-6

Ⅰ.工…

Ⅱ.①陈… ②周…

Ⅲ.①工程数学-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 029343 号

出　版：武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编：430070)
http://www.techbook.com.cn 理工图书网

发　行：武汉理工大学出版社发行部

印　刷：荆州市鸿盛印务有限公司

开　本：787×960　1/16

印　张：19.5

字　数：382 千字

版　次：2010 年 3 月第 1 版　2010 年 3 月第 1 次印刷

印　数：1～3000 册

定　价：32.00 元

前　　言

本书是与陈盛双、陶前功主编的高等学校应用型本、专科教材《概率论与数理统计》、《线性代数》相配套，针对远程教育的工科类、经管类本专科学生的教与学精心设计的学习指导书。编者根据多年进行远程教育和教学研究的经验，本着由简到繁、通俗易懂、适于远程教育和自主学习的指导思想编写了此书。编写时，紧扣教学基本要求，注意基础知识的系统讲解和典型方法的全面训练，强调对基本概念、定理、结论的理解与应用。

全书内容共分为上、下两篇和四个附录，上篇为线性代数、下篇为概率论与数理统计。上篇由5章构成，下篇由8章构成，标记“*”号部分专科不作要求。

本书的内容按章节编写，基本与教材的章节同步，每节包括要点归纳、典型例题、基础练习、答案与提示四部分。

要点归纳部分是对每节的教学重点内容进行简明扼要的归纳和说明，对难点知识进行直观通俗的解释，以提纲的形式提炼本节的知识点，方便学习和巩固复习。

典型例题部分是本书的重点所在，其特色是：对内容和方法进行归纳总结，力图把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求融于典型方法与范例之中，范例具有典型性、示范性，有助于读者举一反三。范例注重分析解题思路，揭示解题规律，引导读者思考问题，培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力。还对大多数例题加以分析和评注，以开拓思路。

在基础练习与答案部分，按照与例题对应、解法相同的原则挑选基础习题并且给出了答案或提示，可以供学生平时学习和考试复习使用。

附录包含课程性质与设置目的、课程内容和考核要求、模拟试卷及答案、近几年武汉理工大学网络学院考试试卷和答案。

本书内容全面，重点突出，知识结构与教学录像对应，方便学生自学，全书由陈盛双、周艳娥主编，由陈盛双统稿定稿。

本书在编写过程中，参考了很多的国内外教材。武汉理工大学出版社的领导和编辑们对本书的编辑和出版给予了热情支持和帮助，尤其是第一工作室的全体老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量的心血，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2009.12

目　录

上篇　线性代数

下篇 概率论与数理统计

上篇　线性代数

1　行列式

1.1　行列式的概念

1.1.1　要点归纳

1.1.1.1　二、三阶行列式的定义及其计算

定义 1.1　将 2×2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 排列成两行两列，并且左右侧各加一条竖线，得到的式子：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式．横排叫做行，竖排叫做列．下标 i 称为元素 a_{ij} 的行标，下标 j 称为元素 a_{ij} 的列标，行标和列标表示元素所在的位置．

二阶行列式是一个便于记忆的记号，展开为式子就是：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，计算结果是一个数值．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称左上角与右下角元素的连线为主对角线．上式中用实线标出的连线即为主对角线，虚线标出的为次对角线．称这样的计算方法为对角线法则．

定义 1.2　将 3×3 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排列成 3 行 3 列，并且左右两侧各加一条竖线，得到的式子：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式.

三阶行列式的展开式是：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

1.1.1.2 *n* 级排列与逆序

定义 1.3 把 n 个不同的数按照一定的顺序排成一排，叫做一个 n 级排列. 按照自然数的顺序排列的称为顺序排列或称为标准排列.

定义 1.4 如果一个 n 级排列中有较大的数排在较小的数前面，称它们构成一个逆序. 一个 n 级排列的逆序总数称为逆序数.

可以总结出求逆序数的两种方法：

(1)从第一个数起依次考察每个数比后面几个数大；

(2)从第二个数起依次考察每个数前面有几个数比它大.

定义 1.5 逆序数是奇数的称为奇排列，逆序数是偶数的称为偶排列.

定义 1.6 将 n 级排列中任意两个数交换，称为一次对换.

定理 1.1 n 级排列共有 $n!$ 个，且奇偶排列各一半.

定理 1.2 任何 n 级排列经过一次对换，排列的奇偶性发生改变.

1.1.1.3 *n* 阶行列式

定义 1.7 将 $n\times n$ 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 n 行 n 列，并且左右两侧各加一条竖线，得到的式子：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 也可以叫做 (i,j) 元.

我们这样展开 n 阶行列式：

(1)共有 $n!$ 项，且正负项各一半；

(2)每一项由取自不同行且不同列的 n 个元素的乘积构成；

(3)当行标为顺序排列时，列标是偶排列的取正号，列标是奇排列的取负号.

记作：$\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$为行列式的展开式的一般项或通项.

当行标不是顺序排列而列标为顺序排列时，那么行标是偶排列的为正项，行标是奇排列的为负项；如果行、列下标都不是顺序排列，那么行标和列标的逆序数总和是偶数的为正项，逆序数总和是奇数的为负项.

特别强调：4 阶及以上阶数的行列式没有对角线法则！

当行列式阶数为 1 时，即只有 1 个元素 a 的，记作$|a|$，其值就是 a，不要与绝对值混淆. 显然有一行或一列元素为零的行列式其值为零.

1.1.1.4 几种特殊的行列式

用 n 阶行列式的定义来计算高阶行列式（4 阶及以上的阶数）的值是非常困难的，除非有非常多的零元素. 下面是几种特殊的含有很多零元素的 n 阶行列式（空位未写出元素的都是 0），其展开结果可作为公式使用.

（1）主对角线以外的元素都是零元素的行列式称为对角形行列式，其展开式中只有一个非零项：$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$，该项元素在行列式中的位置——行和列都是顺序排列，因此

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

（2）次对角线以外的元素都是零的行列式，按照定义展开也只有一个非零项 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$，但这些元素在行列式中的位置行是顺序排列，列是逆序排列，逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$，因此

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

（3）主对角线右上方的元素全为零的行列式称下三角形行列式，其展开式中只有一个非零项：$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$，该项元素在行列式中的位置行和列都是顺序排列，因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4)主对角线左下方的元素全为零的行列式称上三角形行列式，其展开式中只有一个非零项：$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，该项元素在行列式中的位置行和列都是顺序排列，因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.1.2 典型例题

[例 1] 计算行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$$

解 用对角线法则，

$$\begin{aligned} D &= \sin\varphi \cdot \sin - (-\cos\varphi) \cdot \cos\varphi \\ &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \\ &= 1 \end{aligned}$$

[例 2] 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解 按对角线法则展开左边的行列式，并令其为零：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6 = 0$$

解得 $x=2$ 或者 $x=3$.

[例 3] 求$(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$ 的逆序总数并指出奇偶性.

解 求逆序总数有两种做法：

(1)从第一个数起依次考察每个数比后面几个数大；

(2)从第二个数起依次考察每个数前面有几个数比它大.

用前一种方法：第一个数 $2k$ 比后面 $2k-1$ 个数大，1 不比后面的数大，$2k-1$

比后面 $2k-3$ 个数大，…，所以逆序总数为：

$$n=(2k-1)+(2k-3)+\cdots+1=\frac{(2k-1)+1}{2}k=k^2$$

用后一种方法：第二个数 1 前面比它大的数有 1 个，第三个数 $2k-1$ 前面有 1 个数比它大，第四个数 2 前面有 2 个数比它大，第五个数 $2k-2$ 前面也有 2 个数比它大，…，倒数第三和倒数第二个数的前面都有 $k-1$ 个数比它大，而最后一个数 k 前面有 k 个数比它大，逆序总数为：

$$\begin{aligned} n &= 1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k \\ &= 2\left[\frac{1+(k-1)}{2}(k-1)\right]+k=k^2 \end{aligned}$$

故当 k 为奇数时，逆序总数为奇数，当 k 为偶数时，逆序总数为偶数。

［例 4］ 如果 $a_{14}a_{2i}a_{32}a_{4j}a_{55}$ 是 5 阶行列式展开式中的项，那么 i,j 各是多少？该项符号是正还是负？

解 由于行列式展开式的每一项必须取自不同行且不同列，因此

$$\begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases} \quad 或者 \quad \begin{cases} i=3 \\ j=1 \end{cases}$$

当 $\begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases}$ 时，$n(41235)=3$，该项 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$ 符号为负；

当 $\begin{cases} i=3 \\ j=1 \end{cases}$ 时，$n(43215)=6$，该项 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$ 符号为正.

［例 5］ 用定义求 n 阶行列式的值.

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 该行列式的展开式中只有一个非 0 项：$1\cdot 2\cdots n=n!$，该项元素在行列式中的位置行是顺序排列，而列标是 $23\cdots n1$，$N(23\cdots n1)=n-1$，因此

$$D_n=(-1)^{n-1}n!$$

［例 6］ 如果多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，那么 x^3 的系数是多少？

解 x^3 的项必须从 4 个 x 的一次方元素中取出 3 个，这样的项有两个，就是

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3 \quad 和(-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x^3$$

因此，x^3 的项为 $x^3-2x^3=-x^3$，其系数为 -1.

[例 7] 证明含有 n^2-n 个以上零元素的 n 阶行列式其值为零.

证明 行列式展开式中的每一项都是取自不同行且不同列的 n 个元素的乘积；如果零元素超过 n^2-n 个，即非零元素少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，那么行列式展开式中不会有非零项，也就是行列式的值为零.

[＊例 8] 证明：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

所给行列式不容易按行(列)展开或化为三角形行列式，因此考虑用定义展开. 左边的行列式按定义展开，每一项都是取自不同行(第 $1,2,\cdots,n$ 行)且不同列(第 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 列)的 n 个元素的乘积，通项是：

$$\begin{aligned}&(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}(a_{1p_1}b^{1-p_1})(a_{2p_2}b^{2-p_2})\cdots(a_{np_n}b^{n-p_n})\\=&(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}(a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n})(b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+\cdots+p_n)}).\end{aligned}$$

注意到 $(1-p_1)+(2-p_2)+\cdots+(n-p_n)=(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)=0$，即 $b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+\cdots+p_n)}=b^0=1$，那么上面的通项等于右边行列式的通项 $(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}(a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n})$，所以等式成立.

练　习

1. 排列 $214365\cdots(2n)(2n-1)$ 的逆序数＝________，排列 $(2n-1)(2n)(2n-3)(2n-2)\cdots563412$ 的逆序数＝________.

2. 6 阶行列式中项 $a_{12}a_{25}a_{34}a_{46}a_{51}a_{63}$ 的符号为________.

3. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，则 $a=$________.

4. $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 2 \\ 2x & 0 & -x & 1 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2x \end{vmatrix}$ 是 x 的______次多项式，x^3 的系数是______.

5. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 1 & 2 & 2x \\ -1 & x & 3 \end{vmatrix}=0$，求 x.

6. 用定义计算行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

答案与提示

1. n, $2n(n-1)$.
2. $+$.
3. 3.
4. 4, -4.
5. -2.
6. 0.

1.2 行列式的性质

1.2.1 要点归纳

定义 1.8 将行列式 D 的各行变成相应的列，或各列变成相应的行，这样得到的新行列式 D^T 称为 D 的转置行列式.

即：行列式 $D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的转置行列式.

性质 1 行列式和它的转置行列式的值相等.

这条性质表明行列式的行和列具有相同的性质，那么以下对行成立的结论对列也成立.

性质 2 交换行列式的任意两行(列)，行列式的值变号.

推论 如果行列式有两行(列)元素对应相同，那么行列式的值为 0.

性质 3 用数 k 去乘行列式的某行(列)相当于用数 k 乘该行列式.