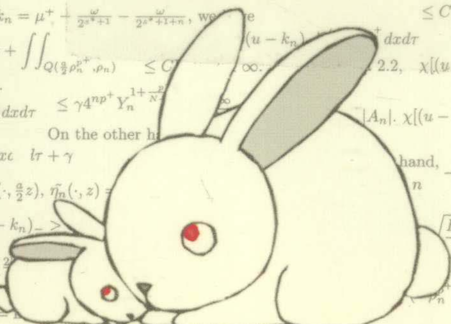
俄罗斯数学精品译丛

斐波那契数列

FIBONACCI SEQUENCE

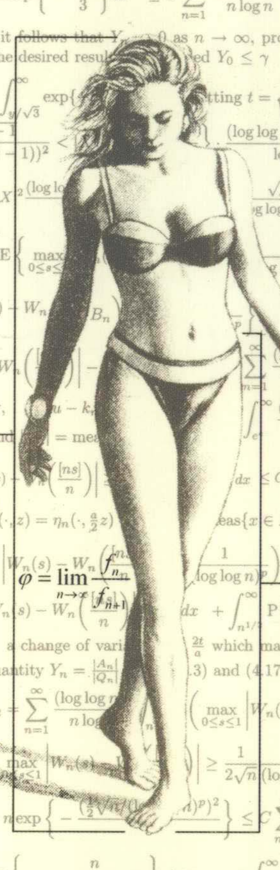
● 瓦罗别耶夫 著

● 周春荔 译



$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f_1=f_2=1$$



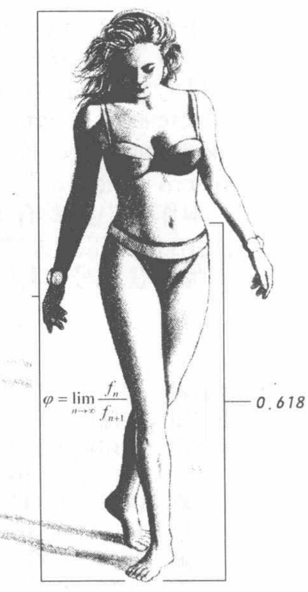
$$\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=0.618$$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

斐波那契数列

FIBONACCI SEQUENCE

瓦罗别耶夫 著
周春荔 译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

斐波那契数列的理论是初等数学中困难而有趣的问题，它与“高深数学”的历史、问题和方法有紧密的联系．从有名的兔子问题开始几乎经历了八百年久远的岁月．迄今为止，斐波那契数列仍然是初等数学中最吸引人的一章．和斐波那契数列有关的问题在许多数学普及读物中都会出现，在学校的数学小组中常作为教材，在数学奥林匹克中也常被提及．

这本书包含的问题是列宁格勒国立大学 1949～1950 学年学生数学小组的某些学习材料．根据小组参加者的愿望，偏重于研究数论方面的内容；在本书中对于这些问题作了比较详尽的阐述．

在书中论及整除理论和连分数理论，阅读这些内容，不需要超出中学课程范围的预备知识．

本书适用于大学、中学师生．

图书在版编目(CIP)数据
斐波那契数列/(苏)瓦罗别耶夫著；周春荔译．
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009．11
ISBN 978-7-5603-2979-6
Ⅰ．①斐…　Ⅱ．①瓦…　②周…　Ⅲ．①斐波那契序列
Ⅳ．①O156
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 232623 号

书名：Числа Фибоначчи
作者：при посредничестве Н.Н.Воробьёв

版权登记号　黑版贸审字　08-2009-083

策划编辑　刘培杰　甄淼淼
责任编辑　杨冰皓　唐　蕾　翟新烨
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8.5　字数 158 千字
版　　次　2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
印　　数　1～3 000 册
定　　价　28.00 元

◎第一版前言

在初等数学中存在许多困难而有趣的问题.这些问题没有被冠以任何名称,就其特点而言,宁可看做是一类“民间数学”.这类问题散见于广为流传的普及读物或者单纯供消遣的数学文献中.人们常常很难确定某一个问题首先出现在哪一本书中.

这些问题时常以不同的形式流传着,有时好几个问题合成为一个比较复杂的问题,有时反过来,一个问题分解为好几个比较简单的问题.总之,常常难以说明,在什么地方一个问题结束而在什么地方另一个问题又开始了.人们总能正确地认为:每个这样的问题都会涉及一些粗浅的数学理论,这些数学理论的历史、问题和方法都与“高深数学”的历史、问题和方法有着紧密的联系.

斐波那契数的理论就是这样的理论.从有名的兔子问题开始几乎经历了七百五十年* 久远的岁月.迄今为止,斐波那契数仍然是初等数学中最吸引人的一章.和斐波那契数有关的问题在许多数学普及读物中都会出现,在学校的数学小组中常作为教材,在数学奥林匹克中也常被提及.

这本小册子包含的问题是列宁格勒国立大学 1949 ~ 1950 学年学生数学小组的某些学习材料.根据小组参加者的愿望,偏重于研究数论方面的内容;在本小册子中对于这些问题作了比较详尽的阐述.

---

* 从 1202 年算起到现在已经八百多年了.——译者注

在本小册子中论及整除理论和连分数理论,阅读这些内容,不需要超出中学课程范围的预备知识.

对循环序列有兴趣的读者,可以参看A·H·马库雪维奇所写的篇幅不多但内容丰富的小册子——《循环序列》.同样,对数论方面的知识感兴趣的读者,可以参考这一学科的比较高深的著作.

H·H·瓦罗别耶夫

◎第四版前言

这本小册子第一版写作于20世纪50年代初，自那时以来情况有了许多变化.

首先，这是主要的，数学普及读物的主要读者范围——对数学感兴趣的高年级学生以及他们的老师们——大家的数学水平发生了变化.由于专门化的数学学校或物理-数学学校及班级网络的建立，学生实际上已经扩大了相应的学习领域的数学视野，现在能够很快引起他们兴趣的不只是好玩的初等问题，而已经是足够深刻和复杂的结果.

其次，是当代数学历史的基本事实.数学研究的目的与重心有了实质性的改变.特别是数论失去了自己控制的阵地.所有极值问题的比重明显上升，对策论已成为独立的数学分科，计算数学实际上已经兴起，所有这些不能不说是数学科学普及书籍的内容.

再次，斐波那契数仍在某些数学问题中显示自己的魅力.其中首推希尔伯特第十问题的Ю·В·马蒂亚雪维奇解，以及还不那么深刻的但是很有名的，大概是由Дж·吉菲洛母首先作出的单峰函数极值的搜索理论.

最后，确立了数量众多的斐波那契数的性质，这些性质显然是过去不知道的.从而产生了复兴研究斐波那契数的兴趣.这种推广高尚的"斐波那契主义"的癖好与不同国度的一些数学家有着不少联系.1963年在美国出版的杂志《斐波那契季刊》(The Fibonacci Quarterly)，可能是对此最令人确信的一种证据.

上面指出的一切事实,确定了本书内容由初版到再版这种形式的变化,现在把这些变化告诉给读者.第二版时添加了"关于求单峰函数极值的斐波那契方案"一节,与此同时提出一般化的数学和计算的问题.在第三版中扩展了数论的内容,其中§2的材料介绍了对解决希尔伯特第十问题有益的信息.最后,在现在的版本中将§3和§4的内容"提高"到一般化水平.在§3引进了用收敛分数逼近实数精确度的剩余类理论,以及斐波那契数在这些问题上的作用,在§4连同"拣石子"游戏的分析在内,对策论的研究,它们都是借助于自然数的斐波那契表示完成了周详的讨论.

要阅读本书,不需要读者具有超出中学课本以外的知识.对内容中较为困难之处我们用小号字排印,在阅读时省略不读这些内容不会影响对其余材料的理解.

H·H·瓦罗别耶夫

第六版前言

当前,正准备出版本书的德译本时,柏林德意志科学出版社(Deutscher Verlag der Wissenchaften)向我建议,在书中补充联系斐波那契数与信息论问题的材料.根据我在§1中的叙述,给出了在电子计算机中利用斐波那契记数系统,还有与它类似的"黄金"记数系统表示数原则和可能性,与此联系.O·H·瓦洛别耶娃为本书写了附录*,内容是讲述BASIC语言,并对根据书中内容描述的算法程序作了非常详细的注释.这些补充都是根据需要自然进行的,并趁本书俄语第六版的机会奉献给自己的读者.

此外,对H·H·费尔德曼教授表示诚挚的感谢,他指出以前各版本中在§3最后行文(关于用连分数逼近实数时,相邻斐波那契数之比极限的个别命题)逻辑上欠完善之处,我按他的建议进行了修正.我照例还要向那瑙玛·依里奇致谢,还是在1940~1941学年,他当时领导列宁格勒国立大学的学生数学小组,养成了我和同学们研究数论的习惯.

为了普及推广的时尚需要,我多少扩展了关于黄金分割的讨论.

最后,在本次版本中,对个别的修辞进行了改善.

H·H·瓦罗别耶夫

1989年

* 由于附录讲的是用BASIC语言进行计算的过程,所以略去了.

◉ 目录

引论

1. 在古代的历史上有许多杰出的数学家. 古代数学的许多成就,它们的发现者的高度智慧,迄今仍引起人们的赞颂. 欧几里得、阿基米得、海伦的名字为每一个受过教育的人所知晓.

中世纪的数学处在例外的境况. 除了韦达——然而他已经生活在16世纪,比较接近我们时代的任何一本中学数学教科书中,都没有提到中世纪数学家的名字,当然这绝非偶然. 在这个时代数学的发展极为缓慢,卓越的数学家出现得很少.

一本叫做《算盘书》(Liber abacci)的著作引起我们很大的兴趣. 这本书是著名的意大利数学家莱翁那多(Leonardo,生于比萨)所著. 他的别名斐波那契(Fibonacci 是 filius Bonacci 的缩写,也就是波那契之子)有很大的知名度. 这本书写于公元1202年,流传到今的是公元1228年的一个手抄本.

《算盘书》是一部篇幅很大的著作. 囊括了那个时期的几乎全部的算术和代数的知识. 并且对后几个世纪西欧数学的发展有着显著的影响. 特别地,正是由于这本书,使欧洲人知晓了印度(阿拉伯)数字.

介绍《算盘书》的资料,阐明若干个问题构成本书的主要部分.

我们考察在1228年那个手抄本的第123~124页的一个这样的问题:

"由一对家兔开始在一年中可以繁殖出多少对家兔?"

某人把一对家兔放在某处.四面用墙围起来,以便观察,由这一对兔子开始经过一年的繁殖,总计可以得到多少兔子.假设兔子的生殖力是这样的:每一对兔子每一个月可以生一对兔子,并且兔子在出生两个月以后就具有生殖后代的能力.在第一个月里第一对兔子生了一对后代.因此在第一个月兔子的总数是两对;在这两对中,只有一对能够在下一个月里生一对兔子,所以在第二个月里一共得到3对兔子;其中两对可以在下个月里进行生殖,所以在第三个月里有两对兔子出生,在这个月里兔子数目增加到5对;其中3对在下个月可以产生后代,所以在第四个月里有8对兔子;其中5对可以在第五个月里生殖5对后代,再加上上月的8对一共是13对兔子;其中5对尚不能在下月生殖,但剩下的8对可以生殖,所以在第六个月一共得到21对兔子;再加上第七个月里出生的13对,第七个月一共得到34对兔子;再加上第八个月里出生的21对,第八个月总计得到55对兔子;加上第九个月出生的34对兔子,第九个月总计得到89对兔子;加上第十个月出生的55对兔子,第十个月总计得到144对兔子;再加上第十一个月出生的89对兔子,第十一个月总计得到233对兔子;再加上第十二个月出生的144对兔子,第十二个月总计得到377对兔子.这就是从一对兔子开始,经过一年的繁殖所得到的兔子的总对数.其实,在这里你能看出,我们是怎样做的:也就是用第一个数同第二个数相加,即1和2相加;第二个加上第三个;第三个加上第四个;第四个加上第五个;然后一个加上后面一个,几乎不复杂地第十个同第十一个相加,也就是144同233相加;我们得到前面提到的兔子的总对数,即377;按这个程序可以无限地继续下去.

兔子的对数
1
第一个月
2
第二个月
3
第三个月
5
第四个月
8
第五个月
13
第六个月
21
第七个月
34
第八个月
55
第九个月
89
第十个月
144
第十一个月
233
第十二个月
377

2.现在我们由兔子转到数量上,并且考察下列的数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \tag{1}$$

其中每一项都等于前面两项之和,也就是,对所有的 $n > 2$,有

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{2}$$

在数学中经常遇到这样的数列,它每一项定义为前面若干项的某个函数.这样的数列称为递归数列,或者按俄罗斯的习惯叫循环数列.确定这个数列元素的数列的过程本身,叫做递归过程,等式(2)叫做循环(递归)方程.循环数列的一般理论基础,读者可以在已经提到过的A·И·马库雪维奇的书中找到(见第一版前言).

首先注意,仅只由一个条件(2)不能计算出数列(1)的各项.我们可以随便

地举出许多数列的不同的项.都满足条件(2),例如

$$2,5,7,12,19,31,50,\cdots$$

$$1,3,4,7,11,18,29,\cdots$$

$$-1,-5,-6,-11,-17,\cdots$$

等等.

这就是说,为了唯一地求出数列(1),条件(2)显然是不够的.我们必须指出某些补充条件.例如,可以给出数列(1)的前面几项.究竟应当给出数列(1)的前面多少项,才能只利用条件(2),就能够将数列(1)所有后面的项计算出来呢?

因为至少(1)中并非每一项都有前面两项,所以,并非数列(1)的所有项都能借助公式(2)得到,例如,数列第一项前面总不存在任何一个项,而它的第二项前面只有一个项.这就是说,为了确定数列(1),与条件(2)一起尚须知道数列开始的两项是必要的.

显然,为了使计算数列(1)的任意项成为可能,上述这些条件已经足够了.事实上,u_3 可以作为我们给了的 u_1 与 u_2 之和算出来,u_4 作为 u_2 与前面已经计算出的 u_3 之和;u_5 作为已经计算出的 u_3 与 u_4 之和;照此类推,依次至无穷的项数.这样一来,由数列相邻两项对它紧随其后一项的推演,就可以到达任何预先给定角标的项,并且算出它来.

3.现在我们转到序列(1)的一个重要的特殊情况,此时 $u_1=1,u_2=1$.正如上面指出的,由条件(2)就可以算出这个数列中所有各项,不难检验,在这个情况下数列的前 14 项是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377$$

这些数正是在前述的兔子问题中遇到过的,为了对问题创作者表示敬意,当 $u_1=u_2=1$ 时的数列(1),称为斐波那契数列,它的每一项叫做斐波那契数.

斐波那契数有一系列有趣且重要的性质.考察这些性质是本书的全部任务.

$f_1=f_2=1 \quad f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$

§ 1 斐波那契数的简单性质

1. 首先我们计算前 n 个斐波那契数的和，也就是证明

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1 \tag{1.1}$$

实际上，我们有

$$u_1 = u_3 - u_2$$
$$u_2 = u_4 - u_3$$
$$u_3 = u_5 - u_4$$
$$\vdots$$
$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$
$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

将所有这些等式逐项相加，我们得到

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

我们再想到 $u_2 = 1$，即得所证.

2. 带有奇数角标的斐波那契数之和是

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} \tag{1.2}$$

为了证明这个等式，我们写出

$$u_1 = u_2$$
$$u_3 = u_4 - u_2$$
$$u_5 = u_6 - u_4$$
$$\vdots$$
$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$$

我们将这些等式逐项相加，就得到所要证明的结果.

$f_1 = f_2 = 1 \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

3. 带有偶角标的斐波那契数之和是

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \tag{1.3}$$

根据第 1 款，我们有

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

由这个等式逐项减去等式(1.2)，得到

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

这就是所要证明的.

进一步，由(1.2) 逐项减去(1.3)，得到

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = - u_{2n-1} + 1 \tag{1.4}$$

现在我们对(1.4) 的两边加上 u_{2n+1} 得

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \tag{1.5}$$

合并(1.4) 和(1.5)，得到正负相间的斐波那契数的和

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1 \tag{1.6}$$

4. 公式(1.1) 和(1.2) 是对一系列明显的等式相加所得. 还有一个例子是，应用这个方法可以导出前 n 个斐波那契数平方和的公式

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1} \tag{1.7}$$

为此，我们注意

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$$

将等式

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1 u_2 \\ u_2^2 &= u_2 u_3 - u_1 u_2 \\ u_3^2 &= u_3 u_4 - u_2 u_3 \\ &\vdots \\ u_n^2 &= u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n \end{aligned}$$

逐项相加，就得到公式(1.7).

5. 斐波那契数之间的许多关系式借助完全归纳法证明是很方便的.

完全归纳法(通常叫这个方法为数学归纳法) 的实质在于，为了证明某个论断对所有自然数的正确性，只需证明：

(1) 对数 1 论断成立.

(2) 由所证论断对某个任意选取的自然数 n 的正确性，推出论断对于数 $n + 1$ 的正确性.

对任意自然数正确的论断全部的归纳证明，就是由这两部分构成的.

在第一部分(通常比较简单) 建立所证论断对于 1 的正确性. 所证论断对于 1 的正确性有时叫做归纳基础. 在证明的第二部分(通常，更加复杂) 做的是，对

某个任意(但固定)的数 n 所证论断正确性的假设,由这个假设 —— 它经常被叫做归纳假设,推出所证论断对数 $n+1$ 成立. 证明的第二部分称为归纳"推演".

完全归纳法的详细叙述以及应用这个方法的各种变式的诸多例子,可以在 И·С·索明斯基写的《数学归纳法》这本小册子中找到. 特别地,不止一次地应用完全归纳法的进一步的变式,对 $n=1$ 和 $n=2$ 的论断证明构成归纳基础,并且归纳推演是"由 n 和 $n+1$ 到 $n+2$".

有时应用归纳法证明,可以叫做"由小于 n 的所有数到 n"的推演. 这时失去了专门证明归纳基础的必要性. 因为形式地说,证明 $n=1$ 的情况是由"所有"小于 1 的正整数(它简单到没有这样的数)到 1 的推演. 下面对任意自然数分解质因数可能性的证明就是这样的例子.

我们假设,每个小于某个 n 的数能分解为质因数的乘积,如果数 n 是质数,则它本身就是自己的分解式. 如果数 n 是合数,那么根据归纳假设它分别为至少两个因数的乘积. $n=n_1n_2$,其中 $n_1\neq 1$ 且 $n_2\neq 1$,但当 $n_1<n$ 且 $n_2<n$ 时,根据归纳假设,无论 n_1 还是 n_2 都可分解为质因数的乘积. 这也就是说,n 可分解质因数.

在 §2 第 36 款定理证明和 §4 第 16 款作图中,有归纳法证明更加复杂的变式.

6. 运用归纳思想对斐波那契数的最简单现实的应用,是斐波那契数的定义本身. 正如在引论中指出的,它在于指出斐波那契数前两个数 $u_1=1$ 和 $u_2=1$,给出递归关系式

$$u_n+u_{n+1}=u_{n+2}$$

由 u_n 和 u_{n+1} 向 u_{n+2} 的归纳推演.

特别地,由此自动得出,如果某个数列从两个 1 开始,而后面每一个数由它前面两个数相加得出来,那么这个数列就是斐波那契数列.

作为例子我们考察一道被称为"猴子跳跃的问题",它是这样叙述的:

小猴子可以在一个方向上被分成方格的区域中跳跃. 每次跳跃要么跳到相邻的格子中,要么就跳过这相邻的格子,落在隔过一个方格的格子中,问小猴子移动 $n-1$ 个方格,而由第一个方格跳到第 n 个方格共有多少种方法?(在它们跳的过程中无论选哪一个格子作第一格,跳到它后面的第 n 个格子方法数都是一样的)

用 x_n 表示所求的数. 显然 $x_1=1$(因为由第一个格跳到第一格只有一种方法 —— 没有跳),且 $x_2=1$(由第一格转移到第二格也是一种方法:小猴一次直接跳到相邻的格子中),设小猴子的目的是跳到第 $n+2$ 个方格,实现这个目的的方法总数我们通过 x_{n+2} 表示. 但从一开始这些方法就分做两类:从第二个格开始跳的方法数以及从第三格开始跳的方法数. 由第二格转移到第 $n+2$ 格有 x_{n+1} 种方法,而由第三格转移到第 $n+2$ 格有 x_n 种方法. 因此,数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 满足递归关系

$$x_n+x_{n+1}=x_{n+2}$$

因此同斐波那契数列相一致：$x_n = u_n$.

7.我们用归纳法证明下面的重要公式

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \tag{1.8}$$

证明这个公式我们将对 m 进行归纳.当 $m = 1$ 时，这个公式成为 $u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$ 的形式，显然成立.当 $m = 2$ 时，公式(1.8)也是对的，因为

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n =$$

$$u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n$$

这样一来，我们完成了归纳基础的证明，下面我们进行归纳推演：假设公式(1.8)当 $m = k$ 时和当 $m = k + 1$ 时都是正确的，证明当 $m = k + 2$ 时它也是正确的.

于是设

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$$

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

这两个等式逐项相加后，得到

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

这就是要证明的.

公式(1.8)用猴子跳跃问题中的术语很容易解释(甚至是证明).

也就是小猴子由第一格转移到第 $n + m$ 格的方法总数等于 u_{n+m}.这些方法中不只有小猴子跳过第 n 个格子的转移，还有小猴子跳到第 n 格子访问的转移.

在第一种方法，小猴子必定达到第 $n - 1$ 个方格(它能够有 u_{n-1} 种方法做到这一点)然后跳到第 $n + 1$ 个方格，最后移动剩下的 $(n + m) - (n + 1) = m - 1$ 个格(存在 u_m 种方法).因此，第一类总计有 $u_m u_{n-1}$ 种方法.类似地，在第二类方法中小猴子达到第 n 格(这可以有 u_n 种方法)，此后移动到第 $n + m$ 格(由 u_{m+1} 种方法之一).因此第二类总计有 $u_n u_{m+1}$ 种方法.公式(1.8)获证.

8.公式(1.8)中令 $m = n$，得到

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$$

或者

$$u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \tag{1.9}$$

由所写的等式看出，u_{2n} 能被 u_n 整除.在下节中我们将证明大量的更为一般的论断.

因为

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$$

公式(1.9)能够改写为