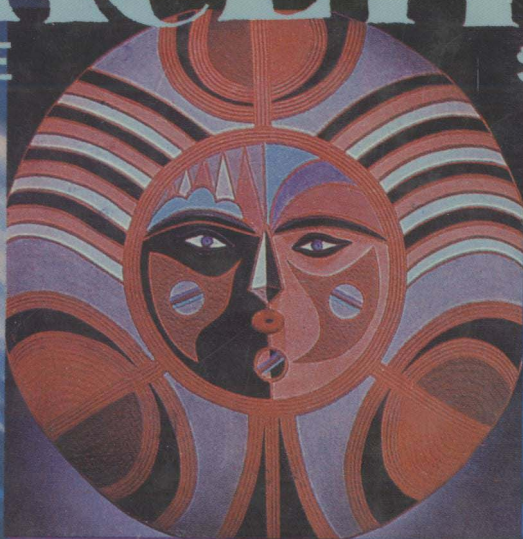


# THE DIMENSIONALITY OF SPACETIME

THE DIME

SPACETIME



## 时空的维数

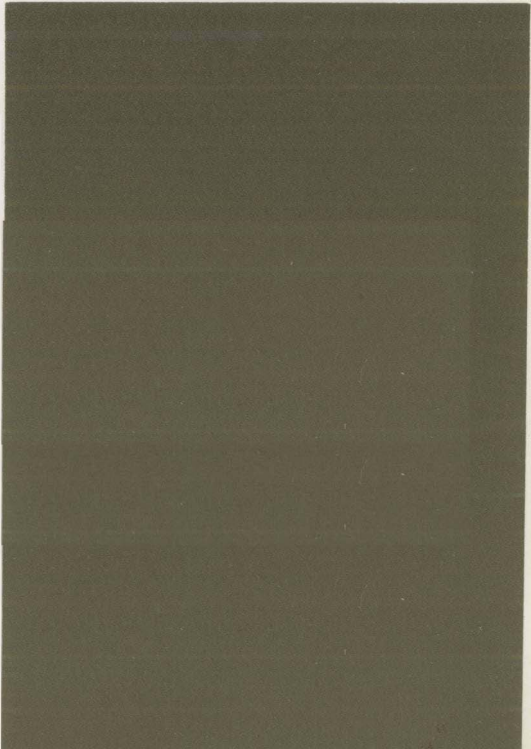
李新洲 史新 周海云 / 著 江西科学技术出版社



# 时空的维数

THE DIMENSIONALITY  
OF SPACETIME

李新洲 史 新 周海云 / 著

- 责任编辑 / 刘烜伟
  - 装帧设计 / 蒋敦明
  - 江西科学技术出版社
- 

(赣)新登字第 003 号

**时空的维数**

李新洲等著

江西科学技术出版社出版发行

(南昌市新魏路)

南昌市印刷十一厂印刷

开本  $850 \times 1168$  1/32 印张 12.625 字数 34 万

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—1,000

ISBN 7-5390-0518-1/O·1 定价:13.50 元

## 内 容 简 介

本书是关于理论物理中高维时空理论研究的一部专著。全书共分十二章,介绍了  $D$  维引力理论、Kaluza-Klein 理论、 $\zeta$  函数正规化、量子 Kaluza-Klein 理论、高维理论中的磁单极、超对称理论及其紧致化、大爆炸宇宙学、暴涨宇宙、高维宇宙学、量子宇宙学、蛀洞和时间机器、时空的维数等方面的内容。本书可供理论物理研究人员及大学高年级学生和研究生阅读。

## 序

高维时空理论是十多年来理论物理的重要发展方向之一，它已经在解释粒子物理现象和宇宙学应用上取得了重大进展。本书将对这一理论作一个较完整的叙述。

本书的内容由三部分组成。第一部分包括高维引力理论的基本概念、形式体系和计算方法，特别是紧致化下的各种物理应用。第二部分阐述了宇宙学的基本原理、热大爆炸宇宙模型和暴涨宇宙模型，在此基础上研究了各种高维宇宙学模型。第三部分包括量子 Kaluza-Klein 理论、量子宇宙学以及宏观与微观蛀洞的讨论，关于特殊时空维数的论证。本书的绝大部分内容取自原始文献，其中许多是作者自己的研究工作。大学高年级学生和研究生在浩瀚的文献海洋面前，往往会显得束手无策，本书也许会给他们提供一座通向当代研究的桥梁。

本书写作过程中得到了国家自然科学基金资助，特此致谢。本书的第一部分内容曾在上海师范大学举办的暑期讲习班上讲授过，当时全国十多所高校的同行们曾提出过许多改进意见，作者谨向他们表示谢意。

限于写作的时间和篇幅，时空理论的有些方面未能包括在本书中，其中重要的有量子引力理论、黑洞理论等。

本书共分十二章，其中第八章为史新执笔、第四章和第十一章为周海云执笔，其余九章由本人执笔。全书完成后又作了部分补充、删节和改写。但鉴于著者的学识水平，谬误不当之处一定很多，尚祈读者指正。

李新洲

1991年9月于上海

# 目 录

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 引 言 .....                            | 1  |
| 第一章 $D$ 维引力理论 .....                  | 6  |
| § 1.1 $D$ 维张量 .....                  | 6  |
| § 1.2 仿射联络 .....                     | 10 |
| § 1.3 仿射几何 .....                     | 13 |
| § 1.4 Poincaré 群 .....               | 16 |
| § 1.5 $D$ 维空间中的旋量 .....              | 18 |
| § 1.6 度规张量 .....                     | 20 |
| § 1.7 Riemann 几何 .....               | 23 |
| § 1.8 Lie 导数 .....                   | 27 |
| § 1.9 Killing 方程 .....               | 30 |
| § 1.10 $D$ 维引力 .....                 | 33 |
| 第二章 Kaluza-Klein 理论 .....            | 37 |
| § 2.1 $4+K$ 维时空 .....                | 37 |
| § 2.2 5 维理论 .....                    | 40 |
| § 2.3 非 Abel 的 Kaluza-Klein 理论 ..... | 43 |
| § 2.4 对称群和 Killing 矢量 .....          | 46 |
| § 2.5 陪集空间的几何 .....                  | 52 |
| § 2.6 陪集空间的物理 .....                  | 56 |
| § 2.7 水平提升基 .....                    | 59 |
| § 2.8 EHYM 有效作用量 .....               | 62 |
| § 2.9 陪集空间的调和函数 .....                | 66 |
| § 2.10 标量场的约化 .....                  | 69 |
| § 2.11 嵌入问题 .....                    | 74 |
| § 2.12 高维 $SO(10)$ 大统一模型 .....       | 78 |
| 第三章 $\zeta$ 函数正规化 .....              | 87 |

|       |                                        |     |
|-------|----------------------------------------|-----|
| § 3.1 | Riemann $\zeta$ 函数和 Dirichlet 级数 ..... | 87  |
| § 3.2 | $\zeta$ 函数的解析延拓 .....                  | 91  |
| § 3.3 | Müntz 公式和 Mellin 变换 .....              | 98  |
| § 3.4 | 推广的 $\zeta$ 函数 .....                   | 101 |
| § 3.5 | Epstein $\zeta$ 函数 .....               | 102 |
| § 3.6 | Casimir 效应 .....                       | 106 |
| 第四章   | 量子 Kaluza-Klein 理论 .....               | 110 |
| § 4.1 | 高维引力的单圈贡献 .....                        | 110 |
| § 4.2 | 5 维理论中的 Casimir 效应 .....               | 115 |
| § 4.3 | 高维理论中的 Casimir 效应 .....                | 121 |
| 第五章   | 高维理论中的磁单极 .....                        | 126 |
| § 5.1 | 磁通量子化 .....                            | 126 |
| § 5.2 | 瞬子 .....                               | 128 |
| § 5.3 | $SU(2)$ 磁单极 .....                      | 132 |
| § 5.4 | $SO(10)$ 磁单极 .....                     | 135 |
| § 5.5 | 在 $SO(10)$ 磁单极位势中的费米子 .....            | 140 |
| § 5.6 | $(4+K)$ -维 Abel 理论中的径向方程 .....         | 144 |
| § 5.7 | 高维 Abel 磁单极 .....                      | 147 |
| § 5.8 | 在 6 维 Abel 磁单极背景场中的费米子 .....           | 149 |
| § 5.9 | Kühler 流行和高维磁单极 .....                  | 154 |
| 第六章   | 超对称性理论及其紧致化 .....                      | 158 |
| § 6.1 | 超对称代数 .....                            | 158 |
| § 6.2 | 超场 .....                               | 160 |
| § 6.3 | 超对称规范理论 .....                          | 163 |
| § 6.4 | 局域超对称性 .....                           | 165 |
| § 6.5 | 超引力与物质的耦合 .....                        | 170 |
| § 6.6 | 高维超引力 .....                            | 172 |
| § 6.7 | 11 维空间的运动方程 .....                      | 175 |
| § 6.8 | $D$ 维 Einstein-杨-Mills 真空 .....        | 178 |
| § 6.9 | $D=11$ 超引力的真空 .....                    | 180 |
| 第七章   | 大爆炸宇宙学 .....                           | 183 |
| § 7.1 | 标准大爆炸 .....                            | 183 |

|        |                                     |     |
|--------|-------------------------------------|-----|
| § 7.2  | Robertson-Walker-Friedmann 模型 ..... | 186 |
| § 7.3  | 空间曲率问题和暗物质 .....                    | 190 |
| § 7.4  | 宇宙的年龄 .....                         | 196 |
| § 7.5  | 早期宇宙的热历史计算方法 .....                  | 199 |
| § 7.6  | 氦合成 .....                           | 202 |
| § 7.7  | 微波背景辐射 .....                        | 205 |
| 第八章    | 暴涨宇宙 .....                          | 208 |
| § 8.1  | 极早期宇宙的疑难 .....                      | 208 |
| § 8.2  | 原始暴涨宇宙模型 .....                      | 216 |
| § 8.3  | 原始暴涨宇宙的成功方面 .....                   | 223 |
| § 8.4  | 原始暴涨宇宙的不足方面 .....                   | 225 |
| § 8.5  | 新的暴涨宇宙模型 .....                      | 230 |
| § 8.6  | 新暴涨宇宙中的密度涨落 .....                   | 235 |
| § 8.7  | 新暴涨宇宙相变的量子理论 .....                  | 243 |
| § 8.8  | $SU(5)$ 大统一模型中的暴涨 .....             | 250 |
| § 8.9  | 其他的暴涨模型 .....                       | 260 |
| 第九章    | 高维宇宙学 .....                         | 262 |
| § 9.1  | 推广的 Robertson-Walker 度规 .....       | 262 |
| § 9.2  | Kasner 解 .....                      | 264 |
| § 9.3  | 标量场的热力学 .....                       | 266 |
| § 9.4  | 各向同性的 $T_{MN}$ .....                | 269 |
| § 9.5  | Casimir 力、宇宙常数和高阶曲率项 .....          | 270 |
| § 9.6  | 无标度 Kaluza-Klein 宇宙学解 .....         | 272 |
| § 9.7  | 磁单极诱导的 6 维宇宙模型 .....                | 278 |
| § 9.8  | 具有 $SU(11)$ 规范统一的宇宙模型 .....         | 281 |
| § 9.9  | Calabi-丘紧致化下的超弦宇宙模型 .....           | 287 |
| § 9.10 | 超弦模型的极限温度 .....                     | 294 |
| 第十章    | 量子宇宙学 .....                         | 297 |
| § 10.1 | 广义相对论的 Hamilton 形式 .....            | 297 |
| § 10.2 | Wheeler-DeWitt 方程 .....             | 302 |
| § 10.3 | WDW 方程解的一些性质 .....                  | 304 |
| § 10.4 | 微超空间 .....                          | 309 |

|         |                    |     |
|---------|--------------------|-----|
| § 10.5  | 量子宇宙学中的经典时空        | 315 |
| § 10.6  | WKB 近似             | 319 |
| § 10.7  | 无边界的假设             | 323 |
| § 10.8  | 高维量子宇宙学            | 328 |
| § 10.9  | 隧道边界条件             | 334 |
| § 10.10 | 无边界的边界条件和隧道边界条件的比较 | 337 |
| 第十一章    | 蛀洞和时间机器            | 341 |
| § 11.1  | 可穿越蛀洞的存在性          | 341 |
| § 11.2  | 蛀洞几何学              | 345 |
| § 11.3  | 时间机器               | 351 |
| § 11.4  | 蛀洞电动力学             | 357 |
| § 11.5  | 因果性和 Cauchy 视界     | 361 |
| 第十二章    | 时空的维数              | 371 |
| § 12.1  | 时空维数的动力学起因         | 371 |
| § 12.2  | 分段均匀弦和 Casimir 能量  | 375 |
| § 12.3  | 膜的空间维数             | 379 |
| § 12.4  | 带有杨-Mills 场的蛀洞解    | 383 |
| § 12.5  | 高维蛀洞解              | 388 |
| § 12.6  | 可观测宇宙的 4 维性        | 390 |
| 主要参考文献  |                    | 395 |

## 引 言

宇宙学为什么能给人以崇高、壮丽的美感呢?那是因为人是在他所追求的对象上面意识到他自己的本质的。研究宇宙学的精神价值,在于使我们挣脱“小我”的牢笼,忘其鄙近,与自然融为一体。时空的维数问题就是一个具有永久魅力的宇宙学问题。人们经常会问,为什么我们观察到的时空是4维的?或者问,为什么我们感觉到的空间维数仅仅是3维的?如果撇开繁复的数学计算细节,答案十分简单。由于科学家普遍承认极值原理,时空的4维性仅仅是在于平坦的4维时空恰巧是作用量的极值而已。

西方世界自文艺复兴以后,就进入了以工业文明为主要标志的历史阶段。但是出现了这样的二律背反:人类必然要借助于科学技术的手段来提高、扩展自己的生存能力,社会历史必然要向更有保障、更安适、更有生存主动性的阶段发展;但科学技术被人们建立起来,历史地摆在人们面前,却成为一种对人异在的客观力量,反过来窒息着人的生存的价值和意义。如今,人类历史已经进入了技术时代,这一二律背反不但没有解决,反而更加突出了。当今世界一方面是神经计算机、卫星通讯、超高速列车,一方面是战争、吸毒、自杀。庄子的“沉于物,溺于德”的见解得到了历史的证实。

一个宇宙学家是无法回答上述的二律背反,他也无法回答诸如“在无限之中,人是怎么一回事?”这样一类问题。但是,正如诺贝尔物理奖获得者 Weinberg 说的:“了解宇宙的努力是将人类生活提到略高于闹剧水平,并且赋予它一些悲剧气氛的少数事情中的一件。”也许,宇宙学研究的真正含义就在于此。

现在称为“标准大爆炸模型”的创世观,主张整个宇宙是起源于一场异常巨大的爆炸。所有的物质都集中在一个非常小的区域内,

然而很快地膨胀——爆炸了。在膨胀过程中它渐渐冷下来，于是先是原子核，然后是原子，最后才是星系，恒星和行星从中凝聚出来了。这种爆炸今天仍在进行，不过现在宇宙由于膨胀已经冷却得多了。有两件支持大爆炸宇宙学的实验证据。第一件是 Hubble 发现的宇宙膨胀。第二个重大实验发现是 1964 年 Pezias 和 Wilson 发现的微波背景辐射。

1989 年，Geller 和 Huchra 宣称，已发现宇宙中的最大结构：“长城”，一条至少横跨 5 亿光年的星系带。Broadhurst 宣称探测到两条狭窄的空间“笔状星系束”。Geller 坚决主张，无论是冷暗物质，还是其他任何模型都不能解释这些新的观测结果：从微波背景所允许的小密度起伏中，引力简直不曾有足够的时间来创生出大到“长城”一样的结构。但是，1990 年在瑞典举行的学术会议上，这些结果受到了攻击。Frenk 称这些资料是堆“垃圾”，不是“统计分析”。Peebles 说：“要谨防长城，观察力才是模式的最好鉴别者。”Turner 指出不管最近有关大尺度结构的所有报告表现出的印象如何，绝大部分的可观测宇宙仍然未经探查和绘制成图。所有模型的最关键的检验将来自宇宙微波背景。如果在 COBE 卫星或在南极天文台上没有很快发现背景存在起伏，那么就会动摇整个标准大爆炸模型的基础。

大爆炸模型的捍卫者 Schramm 认为该理论将经受住任何攻击，即使在宇宙微波背景中没有发现任何起伏时也是如此。他认为仅仅需要稍微修正一下模型即可：在微波背景释放之后很晚才发生的相变期间，宇宙获得了大尺度结构。

一个完整的大爆炸理论必须包括暴涨阶段。暴涨是 Guth 在研究大统一理论时偶然发现的。大统一理论认为强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用，在非常高能时统一成一种单一的力。在宇宙大爆炸后将近  $10^{-35}$  秒的瞬间，能量就处于大统一标度，所以将这个时期称作大统一时期。在大统一的末期，Guth 认为某些宇宙区域变成超冷状态。他提出超冷区域能进入一种称作伪真空的特殊状态，在这种状态下的引力是排斥力而不是吸引力。因而，这些区域进行着短暂的然

而却是猛烈的膨胀,即暴涨. 暴涨中的一个区域,从尺度比一个质子的尺度还小得多开始,一瞬间后以一个柚子大小的尺度而结束,最后膨胀成为我们的宇宙. 暴涨还解决了视界和平直性问题,它对宇宙中的物质质量和宇宙的晚期作了明确预言. 暴涨理论预言宇宙中的物质密度应当等于临界值.

对可视发光物质的巡天,得出的质量密度仅仅等于临界值的1%. 对星系和星系团的分析表明,它们必定含有比看起来的多9倍的质量,否则它们就会解体. 但是,星系和星系团质量修改后的估计,仍然也只能将宇宙的总质量提高到大约为临界值的10%. 此外,大爆炸核合成计算也要求普通物质不能超过临界值的10%. 目前,作为这些暗物质的最强的候选者是轴子和最轻的超对称伙伴粒子(LSP), Ellis 说:“发现这样一种粒子将是哥白尼革命的令人满意的延续. 我们不仅不是位于宇宙的中心,我们甚至还是与宇宙大部分物质不同的物质所组成的.”

当我们叙述了宇宙学发展的现状以后,转而讨论一个更为深入的问题,即时空的维数和它的拓扑结构问题. 现代的 Kaluza-Klein 理论和超弦理论都要求空间有额外的维度. 如果要在 Kaluza-Klein 框架下包含目前已观测到的规范玻色子(胶子、 $W^\pm$ 、 $Z^0$  和光子),那么存在3种不同的方案:(I)由额外维量的等度规群和度规张量得到作为基本场的自旋为1的规范场;(II)由额外维量的切空间群和自旋联络得到作为复合场的规范场;(III)把作为基本的非 Abel 规范场直接嵌入到高维理论中去.

第一种方案继承了 Kaluza-Klein 的本来的想法,而更为吸引人的是 Witten 已经证明了11维不仅是超对称所容许的最大维数,而且也是纳入等度规群  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  的最小维数. 第二种方案在传统的 Kaluza-Klein 理论中很少讨论. 然而 Cremmer, Ellis, Julia 等人曾采用过这类观点. 第三种方案看来与 Kaluza-Klein 的传统思想有较大的差异,然而近来许多物理学家却想用它来解决手征问题和处理许多物理问题(例如引入另一种暴涨的机制). 超弦理论在本质

上是属于第三种方案的理论.

时空应当是  $4+K$  维的,为什么看起来是 4 维的呢? 一个有希望的答案是,在某种意义上,这样的情况反映了时空的最低能态. 在物理学中,系统总是要寻求最小的能态. 因此有可能使人相信,在宇宙创生时,所有的  $3+K$  维空间处于相等的地位,后来其中的  $K$  维空间却自发地紧致化了,卷成为一个收缩了的球体. 同时,这个看不见的  $K$  维空间将为大爆炸以及暴涨理论本身提供解释. 初始时,  $4+K$  维自发地爆出于虚空,这一事件只能在量子物理中可得到解释,它容许物理结构的无前因地产生. 初始的空间形态不需要特殊序列,它可能是浑沌的、起伏的. 在某些区域,不可避免地诸力竞争会产生巨大的斥力. 结果有 3 个空间的维数开始以某种加速率不断膨胀,而余下的  $K$  维,自发地把自己卷成一个紧致流形. 若外向的驱动力能保持足够长的时期,也就获得了大爆炸的特征.

但是,要回答为什么是  $1+3$ ,而不是  $1+4$  的时候,上述的回答仍然要求助于人择原理:“宇宙是这样子,因为假如不是这样的话,我们就不会在这儿观测它.”我们和大多数科学家一样地感到人择原理是同义反复的和科学的. 我们联想到了宇宙常数问题. 宇宙常数这个术语是 Einstein 在本世纪初创造的,它指隐藏在真空中的能量.

Einstein 曾推测,在一个静态的即非膨胀的宇宙中,也许需要真空具有能量,才能抵消向内的吸力吸引. 在发现宇宙在膨胀之后, Einstein 抛弃了这一想法. 大多数的理论物理学家都抱怨宇宙常数是个自由参数,使得模型失去优美的预言. 然而,宇宙常数为零却有助于解决时空为什么是  $1+3$  维的难题.

进一步的说明需要更详尽的叙述量子宇宙学. 物理学的这一奇特分支是讲述宇宙创生的开始  $10^{-43}$  时期,那时宇宙是如此小而致密和炽热,以致引力效应和量子效应紧紧地联系在一起. 在量子引力理论中经常提到的想象是拓扑起伏的概念. 它的基本点是由 Wheeler 提出的,引力场的真空起伏如同其他各种场的真空起伏一样,其幅度在波长较短时增加. Hawking 引入了一种被称作蛀洞的时空的微观

结构,他说:“构成蛀洞会导致有关超空间的一个量子场的  $\alpha$  参数出现。”事实上,正如亚原子粒子通过称为隧道的量子效应能够瞬时地从一点跃迁到另一点,空间和时间也能这样做.按照 Coleman 的观点,时空隧道效应和连结我们的宇宙和其他宇宙的蛀洞结构密切相关.

由于微观蛀洞的尺度是如此之小,我们无法直接看到它们.它们将以在我们的宇宙区域中产生或湮灭粒子数的点相互作用形式出现.在这些相互作用中,能量、动量和规范荷是守恒的,所以至少在微扰论中,将在 Lagrange 量上附加规范不变有效相互作用项来描述.显然,这一有效附加项是双局域的.通过适当的数学变换,这一双局域作用项转变成含  $\alpha$  参数的局域相互作用项.另一方面,我们知道即使理论中不含有蛀洞,纯引力作用量的路径积分也是发散的.为了克服这一困难,通常的做法是考虑 Euclid 作用量的鞍点解.于是,我们导出几率函数是如下的形式:一个分母上含有宇宙常数和时空维数的函数与单重或双重指数函数的复合函数.当时空维数等于 4,宇宙常数趋于零的时候,几率趋于 1,决定了路径积分的主要贡献.这就是说,我们的宇宙必定是 4 维的和平坦的.人择原理在极值原理面前又一次退却了,这大该是宇宙学家在对无限的认识过程中的一个小小的进步吧.

# 第一章 $D$ 维引力理论

Einstein 曾经说过：“创造的原则在于数学，因此在一定的意义上我认为下面这点对的：纯粹的思维可以把握实在，正如古人所梦想的。”本章我们将从讨论时空理论的数学基础开始，并讨论推广了的 Einstein 广义相对论。在广义相对论里，Einstein 找到了联系两个相互作用非匀速运动的观察者做的时空测量的定律。为了找到这些定律 Einstein 得到了他的数学家朋友 Grossmann 的帮助。然而，在 Einstein 进行 Riemann 几何研究以推广相对论性原理之前，凭直觉他已经知道了结果。广义相对论的发现提供了一个范例，一个物理学家如何求助于现有的数学原理以找到正确的语言来表达他的直觉。这也是本章描述方法的一个准则——尽管本章讲的是数学，但物理仍然处于重要的位置。

## § 1.1 $D$ 维张量

在电动力学中，我们已经熟悉了这样一个事实：只有当空间参数和时间参数作为一个整体而共同变换时，电磁学定律在两个作相互运动的坐标系中的形式才会是相同的。因此，时间参数和空间参数的测量是不可能分割的，本书中将经常使用“时空”这一词汇。Einstein 认为不仅仅是电动力学，而且自然界中所有的规律都必须在时空统一变换下具有协变性。在两个不同的惯性参考系下的时空变换应当保持四维时空间隔不变：

$$dS_{\mu\nu} = (c^2 dt^2 - dr^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

自然定律在上述时空变换下具有协变性是狭义相对论的要求。此后，

Einstein 发现在不同的非惯性坐标系之间,自然定律也是协变的.也就是说,在保持四维 Riemann 时空间隔

$$dS_g = \left[ \sum_{\mu, \nu=0}^3 (g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

不变的时空变换下的协变性.现在,我们将协变性推广到  $D$  维时空,时空指标  $M, N=0, 1, 2, \dots, D-1$ , 并采用相同指标自动求和的约定,则  $D$  维度规记为

$$dS^2 = g_{MN} dx^M dx^N. \quad (1.3)$$

度规场  $g_{MN}(x)$  由物质场在时空中的分布所决定.

从数学的角度来讲, Riemann 空间是引入度规场和不变距离的仿射空间.在本节中,我们先讨论  $D$  维仿射空间.  $D$  维空间的点的坐标为

$$x^M = (x^0, x^1, \dots, x^{D-1}). \quad (1.4)$$

同一空间的坐标的选取方式是多样的.两组坐标  $x^M$  和  $x'^M$  的联系称为坐标变换

$$x'^M = x'^M(x^0, x^1, \dots, x^{D-1}). \quad (1.5)$$

从(1.5)式可导出任一点的坐标微分的变换公式

$$dx'^M = \frac{\partial x'^M}{\partial x^A} dx^A. \quad (1.6)$$

当变换矩阵满足

$$\det \left| \frac{\partial x'^M}{\partial x^A} \right| \neq 0 \text{ 或 } \infty, \quad (1.7)$$

则有坐标微分的逆变换存在.记作

$$dx^A = \frac{\partial x^A}{\partial x'^M} dx'^M. \quad (1.8)$$

变换矩阵与逆变换矩阵自然满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^M}{\partial x^A} \cdot \frac{\partial x^A}{\partial x'^M} &= \delta_A^M, \\ \frac{\partial x^A}{\partial x'^M} \cdot \frac{\partial x'^M}{\partial x^B} &= \delta_B^A. \end{aligned} \quad (1.9)$$

如果  $D$  个分量  $x^M$ , 按照  $x^M \rightarrow x'^M = \frac{\partial x'^M}{\partial x^A} \cdot x^A$  变换, 则  $x^M$  称为  $D$  维逆变

矢量. 如果有  $D$  个连续变量的集合  $f^0(x), f^1(x), f^2(x), \dots, f^{D-1}(x)$ , 按照下述规则变换

$$x^M \rightarrow x'^M \Rightarrow f^M(x) \rightarrow f'^M(x') = \frac{\partial x'^M}{\partial x^A} f^A(x), \quad (1.10)$$

则  $f^M(x)$  就称为逆变矢量场.

一个逆变矢量的异数的变换为

$$x^M \rightarrow x'^M \Rightarrow \partial / \partial x^M \equiv \partial_M \rightarrow \partial'_M = \left( \frac{\partial x^A}{\partial x'^M} \right) \partial_A, \quad (1.11)$$

我们称具有上述变换性质的矢量为协变矢量. 类似地, 可以定义协变矢量场  $f_M(x)$ :

$$x^M \rightarrow x'^M \Rightarrow f_M(x) \rightarrow f'_M(x') = \frac{\partial x^A}{\partial x'^M} f_A(x). \quad (1.12)$$

矢量是一阶张量, 零阶张量也叫作标量, 在坐标变换下, 标量保持不变, 它没有逆变的和协变的差别. 二阶协变张量的定义为

$$T'_{MN} = \frac{\partial x^A}{\partial x'^M} \frac{\partial x^B}{\partial x'^N} T_{AB}, \quad (1.13)$$

二阶逆变张量的定义为

$$T'^{MN} = \frac{\partial x^M}{\partial x^A} \cdot \frac{\partial x^N}{\partial x^B} T^{AB}. \quad (1.14)$$

此外还可以定义既有逆变指标又有协变指标的混合张量. 最低阶的混合张量是二阶的. 它的变换规则是

$$T'^M_N = \frac{\partial x^M}{\partial x^A} \cdot \frac{\partial x^B}{\partial x'^N} T^A_B. \quad (1.15)$$

一般地讲, 一个张量可以有  $p$  个逆变指标,  $q$  个协变指标, 即有形式

$$T^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q}. \quad (1.16)$$

我们称它为  $(p, q)$  阶张量, 它的变换规则很容易写出来.

两个张量可以作加法, 减法和乘法运算. 由于决定张量变换行为的矩阵是随不同点而不同的, 所以必须在同一点上的两个张量间进行运算, 才能使运算后的量保持张量的性质.

张量的加减法定义为相应分量的相加或相减, 因此这两个张量必须同阶. 运算后仍得同一点上的同阶张量. 例如  $T^M = Q^M + S^M$ .

张量的乘法称为外乘. 例如  $(1, 1)$  阶张量  $Q^M$  和  $(1, 0)$  阶张量  $S^L$