大学数学辅导丛书

高等数学（第2版）

题型归类 方法点拨 考研辅导

GAODENG SHUXUE TIXING GUILEI
FANGFA DIANBO KAOYAN FUDAO

马菊侠 吴云天 编著

$\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$

$$y=\operatorname{Ln}x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$

国防工业出版社
National Defence Industry Press

大学数学辅导丛书

高等数学

题型归类·方法点拨·考研辅导

（第2版）

马菊侠　吴云天　编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学、题型归类、方法点拨、考研辅导/马菊侠，吴云天编著. —2版. —北京:国防工业出版社，2010.7

(大学数学辅导丛书)

ISBN 978-7-118-06899-3

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①马...②吴... Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 111614 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

腾飞印务有限公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 30½ 字数 581 千字

2010 年 7 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—5000 册 **定价** 45.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

第 2 版前言

本书自 2007 年出版以来，深受广大读者喜爱。现根据本书的使用情况及读者的反馈信息，做进一步修改。主要改动如下：

(1)对某些题型、方法、技巧做了更细致的注解与说明。

(2)修改了部分例题的解法，使得解题更加简洁明快；更新了部分典型例题，并对部分较繁的题目做了删减。

(3)更新了高等数学上、下册试题 10 套，并给出了相应的解答，便于读者参考。

(4)增加了附录：2008 年—2010 年全国硕士研究生入学统一考试高等数学试题及解答。便于大学数学学习提高之用，以及考研的读者复习之参考。

我们衷心感谢对本书关心的读者及同仁，并欢迎提出宝贵意见。

编者

2010 年 6 月

前　　言

“高等数学”是理工科院校一门重要的基础课，鉴于这门课程的逻辑性、技巧性、灵活性，及在后继课程学习与硕士研究生入学考试中的要求，特编写了《高等数学　题型归类·方法点拨·考研辅导》，供理工科院校师生、硕士研究生入学考试、高职高专、成人教育及自学考试等作为“高等数学”课程的教与学参考或考研辅导用书。

《高等数学　题型归类·方法点拨·考研辅导》包含有：知识网络，方法归纳，题型归类·方法点拨·考研辅导，研题解析（2000 年～2007 年），综合训练等内容。本书是以题型·方法为主线，贯穿着知识结构、知识网络、思维训练、水平测试、考研辅导为一体的辅导用书。

本书有以下几方面特点：

1. 知识网络。本书在知识点的处理上，采用重点知识网络结构图、表格式及类比式等特点，使知识更加系统化、网络化、条理化，达到对知识的区分、类比、记忆与理解。

2. 方法归纳。本书中对解题方法进行系统归纳，使相同而又多变的题型有路可想、有法可循。试题是无限的，只有掌握解题的方法与技巧，才能以不变应万变，找到解题的切入点，以达到数学思维与方法的训练，提升应试能力。

3. 题型归类。将《高等数学》教学中的重点题、难点题、是非题、本科考试题、考研题（2000 年～2007 年）等进行系统归类，注重题型的广度与梯度，体现题型多变性与技巧性，力求从一题达到一类，从一类贯通到系列的功效。

4. 技巧分析。本书在每一个题型上专门设有方法与技巧，针对该类题型的多种方法、解题技巧做了系统的类比与总结，对易出错之处附有注解，使得解题的思路更加清晰，提高解题的速度。

5. 题型综合。在掌握基础知识的前提下，力图在深度、广度上拓展读者知识面，在题型选择上注重知识的灵活性、衔接性、多变性、技巧性与综合性等特点，给读者以循序渐进，并赋有新的思路与理念。

6. 多种层次。本书以题型·方法为主线，渗透着对知识点的巩固与加深，强化与拓广。本书内容包含重点知识结构图，使读者对知识及内容有一个清楚的认

识;题型归类·方法点拨·技巧分析使读者对题型、方法更加系统化,以提高其应试能力。其题型包含基本概念题型、综合题型、多变题型、常考题型、考研题型以及配套的综合训练等;还对同济大学《高等数学》(第五版)的部分习题做了解答,并有研题解析(2000年~2007年),从而对本科的同步学习有拓广与强化之功用,对考研的读者也有一定的参考价值,适合不同层次的读者。

编写本书时参阅了有关书籍,选用了一些例子及相关内容,在此向有关作者及出版社致谢。

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中不足之处在所难免,敬请读者及同仁批评指正。

目　录

第一章　函数与极限

一、知识网络

- **函数**
  - 常见类型　初等函数、分段函数、复合函数
  - 几何特性　有界性、单调性、奇偶性、周期性
- **极限**
  - 数列极限　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$　$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\quad |x_n-a|<\varepsilon \underset{\text{成立条件}}{\overset{\text{找}N}{\rightleftarrows}} n>N$
  - 函数极限　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad |f(x)-A|<\varepsilon \underset{\text{成立条件}}{\overset{\text{找}\delta}{\rightleftarrows}} 0<|x-x_0|<\delta$
    $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\quad |f(x)-A|<\varepsilon \underset{\text{成立条件}}{\overset{\text{找}X}{\rightleftarrows}} |x|>X$
  - 极限存在的充要条件　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x_0^+)=A$ 且 $f(x_0^-)=A$
  - 无穷大与无穷小　$\lim f(x)=\infty$, $\lim f(x)=0$
  - 重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
  - 极限的计算　详见本章方法归纳
- **连续**
  - 连续的定义　"ε-δ"　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(x_0)$
  - 连续的运算　四则运算，复合函数与反函数的连续性定理
  - 初等函数的连续性　基本初等函数在定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续
  - 闭区间上连续函数的性质　有界性、介值、最大（小）值、一致连续
  - 间断点

第一类间断点 （$f(x_0^-)$，$f(x_0^+)$ 都存在）	可去间断点 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$
	跳跃间断点 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
第二类间断点	无穷型、振荡型

二、方法归纳

(一) 极限的计算方法归纳

求极限是高等数学中最基本的运算,也是每次考试必考的内容。现将其计算方法归纳如下:

1. 用极限的定义

以数列极限的“$\varepsilon - N$”定义为例,其它可仿此进行。

首先明确数列极限“$\varepsilon - N$”的定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,$|x_n - A| < \varepsilon$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。

(1) 给定任意小的正数 ε;

(2) 由不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 出发来找 N,即要得到不等式 $n > \varphi(\varepsilon, A)$(与 ε, A 有关的表达式);

(3) 令 $N = [\varphi(\varepsilon, A)]$ 或 $N = [\varphi(\varepsilon, A)] + K$($K$ 为自然数);

(4) 由 $n > N$ 能推演出 $|x_n - A| < \varepsilon$。

找 N 的方法有两种。

① 直接法:即从不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 中直接解出 $n > \varphi(\varepsilon, A)$,令 $N = [\varphi(\varepsilon, A)]$。

② 间接法(放大法):当不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 不易解得 $n > \varphi(\varepsilon, A)$ 或不能解时,将 $|x_n - A|$ 稍作放大到 b_n,即 $|x_n - A| \leqslant b_n < \varepsilon$,再解不等式 $b_n < \varepsilon$ 得到 $n > \varphi(\varepsilon, A)$,从而得到 $N = [\varphi(\varepsilon, A)]$。

2. 极限的运算法则

设 $\lim f(x)$、$\lim g(x)$ 均存在,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$;

(3) $\lim[\lambda f(x)] = \lambda \lim f(x)$;

(4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$;

(5) $\lim f(x)^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)} \qquad (\lim f(x) > 0)$;

(6) 当 $a_0, b_0 \neq 0$ 时

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{当 } m = n \\ 0 & \text{当 } m < n \\ \infty & \text{当 } m > n \end{cases}$$

(7) 复合函数的极限运算法则。

设$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$,又设函数 $u = u(x)$,当 $x \to x_0$ 时,函数的极限存在且等于 u_0,

即$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$，但在$x_0$的某去心邻域内$u(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[u(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A$$

3. 极限存在准则

(1) 夹逼定理。

① 数列的情形：

给定数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，满足

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} z_n = a$$

则$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在且$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$。

② 函数的情形：

设在x_0的某去心邻域内有$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$。

(2) 单调有界数列必有极限。

单调递增有上界的数列必有极限；

单调递减有下界的数列必有极限。

4. 重要极限

基本形式	一般形式	说明
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$	“$\frac{0}{0}$”
$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$	$\lim\limits_{\square \to 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}$ $\lim\limits_{\square \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = \mathrm{e}$	“1^{∞}” $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ （数列也适合）

5. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的性质。

① 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小；

②$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中$\lim \alpha = 0$；

③ 无穷小与有界量之积为无穷小。

(2) 无穷小与无穷大的关系。

若$\lim\limits_{x} f(x) = 0 (f(x) \neq 0) \Rightarrow \lim\limits_{x} \frac{1}{f(x)} = \infty$；反之，若$\lim\limits_{x} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x} \frac{1}{f(x)} = 0$。

(3) 无穷小的比较。

前提条件	定　　义	记　号
若$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$(有限)	(1)$A\neq 0,A\neq 1$,称$f(x)$与$g(x)$为同阶无穷小	$f(x)\sim Ag(x)$
其中$\lim\limits_{x}f(x)=\lim\limits_{x}g(x)=0$	(2)$A=1$,称$f(x)$与$g(x)$为等价无穷小	$f(x)\sim g(x)$
且$g(x)\neq 0$	(3)$A=0$,称$f(x)$为$g(x)$的高阶无穷小	$f(x)=o(g(x))$
若$\lim\limits_{x}f(x)=\lim\limits_{x}g(x)=0$ $g^k(x)\neq 0,k>0$,为常数	$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=B$(有限,$\neq 0$)称$f(x)$是$g(x)$的$k$阶无穷小	$f(x)\sim Bg^k(x)$

(4)无穷小量的等价性。

熟记$x\to 0$时:$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0),a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$。

特别地,当$\alpha=\dfrac{1}{n}$时(n为自然数),有

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$$

另外,利用无穷小的变量代换法则,上述重要等价无穷小均可扩展应用范围:当$x\to x_0(x\to\infty)$时,$u(x)\to 0(u(x)\neq 0)$,;当$x\to x_0(x\to\infty)$时,有下列等价无穷小:

$u(x)\sim\sin u(x)\sim\tan u(x)\sim\arcsin u(x)\sim\arctan u(x)\sim\ln(1+u(x))\sim e^{u(x)}-1$;

$1-\cos u(x)\sim\dfrac{1}{2}u^2(x)$;$(1+u(x))^\alpha-1\sim\alpha u(x)\quad(\alpha\neq 0)$;

$a^{u(x)}-1\sim u(x)\ln a\quad(a>0,a\neq 1)$。

例如:$x\to 0$时,$e^{\sin x^2}-1\sim\sin x^2\sim x^2$;

$x\to+\infty$时,$\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$。

(5)无穷小的等价代换性质。

设在自变量的同一变化过程中,$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,则

① 如果$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$也存在,且$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$。即为:在代换时,必须将分子和分母的整体分别换成它们各自的等价无穷小(保持分子或分母不变也可以),这称之为整体代换。

② 在分子(分母)为若干因子的乘积时,可以进行局部代换,即

如果$\lim\dfrac{\alpha'\cdot u'(x)}{\beta'}$存在,则$\lim\dfrac{\alpha\cdot u(x)}{\beta}$也存在,且$\lim\dfrac{\alpha\cdot u(x)}{\beta}=\lim$

$\dfrac{\alpha' \cdot u'(x)}{\beta'}$（其中 $u(x) \sim u'(x)$）。

③ 在代数和的形式时，不能代换，即

$$\lim(\alpha \pm \beta) \neq \lim(\alpha' \pm \beta')$$

6. 极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$（左、右极限存在且相等）。主要用于分段函数分段点的极限及连续性讨论。

7. 用函数的连续性极限

（1）如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$；

（2）如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，函数 $f(u)$ 在 $u = a$ 连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)] = f(a)$。

（说明：极限符号与运算符号可交换次序）

8. 利用洛必达法则求极限

9. 利用泰勒公式求极限

10. 利用导数定义及定积分的定义求极限

11. 利用无穷级数的性质求极限

（其中 8 ~ 11 在以后知识中会讲到）

（二）函数连续性的讨论

因基本初等函数在定义域内连续，初等函数在定义区间内连续，因此对于初等函数的连续性没有什么可讨论的。这里，关于函数连续性讨论主要是就非初等函数而言，如分段函数、带有绝对值符号的函数、由极限定义的函数。而带有绝对值符号的函数及由极限定义的函数一般都可表示成分段函数，所以这里主要讨论分段函数的连续性。

而分段函数在每一分段区间上为初等函数，由初等函数的连续性知：其为连续的。故重点讨论分段点的连续性了。

函数 $f(x)$ 的分段点为 x_0 时，讨论如下：

（1）$f(x)$ 在 x_0 的两侧表达式不相同时，先计算左、右极限：

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ （只能用 x_0 左边的函数（$x < x_0$））

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ （只能用 x_0 右边的函数（$x > x_0$））

再计算 $f(x_0)$，若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 点为连续（否则为间断点）。

（2）$f(x)$ 在 x_0 的两侧表达式相同时，直接用 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 来判定在 x_0 点是

否连续(特别地含有 $a^{\frac{1}{x}}$,$\arctan\dfrac{1}{x}$ 时,注意区分 $x=0$ 的两侧极限)。

(三)函数间断点的讨论

1. 连续的三个要素

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义;

(2) 在 $x\to x_0$ 时,函数极限存在;

(3) 在 $x\to x_0$ 时,函数极限值等于函数在 x_0 处的函数值。

以上三个要素同时成立,则函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续,至少有一个不成立,则称 $f(x)$ 在 x_0 点间断(不连续)。

2. 间断点分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类:左右极限都存在}\begin{cases}\text{可去型} & \text{左极限}=\text{右极限,即极限存在}\\ \text{跳跃型} & \text{左极限}\neq\text{右极限}\end{cases}\\ \text{第二类:左右极限中至少有一个不存在}\end{cases}$$

注　只有第一类可去型间断点才能补充或改变函数在该点的定义而成为连续点,其它类型不能做到。

3. 间断点及类型的确定

(1) 求出 $f(x)$ 无定义的点 x_0,(但在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 应有定义),则 $x=x_0$ 为间断点;求出分段函数分段点 x_0(注意区分分段点与区间端点),这些点是可能的间断点;

(2) 当 $f(x)$ 在 x_0 的两侧的表达式不同时,求出 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,看是否存在,是否相等;当 $f(x)$ 在 x_0 的两侧表达式相同时,直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,看是否存在,是否等于 $f(x_0)$。若相等即为连续点,若不相等,即为间断点,再进一步确定类型。

(四)闭区间上连续函数的性质应用

详见本章的题型归类。

三、　题型归类·方法点拨·技巧分析

【题型 1　求函数定义域】

【方法与技巧】

(1) 如果函数表达式中含有分式,则分母不能为零;

(2) 如果函数表达式中含有偶次方根,则根号下表达式大于等于零;

(3) 如果函数表达式中含有对数,则真数大于零;

(4) 如果函数表达式中含有反正弦或反余弦,则其绝对值小于等于 1;

(5) 有以上几种情形,则取交集;

(6) 分段函数定义域,取各分段区间的并集;

(7) 对实际问题,则从实际出发考虑自变量取值范围。

【例1】 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$,求定义域。

解 $\begin{cases}2-x^2>0\\-1\leqslant\dfrac{1}{2}x-1\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<\sqrt{2}\\0\leqslant x\leqslant4\end{cases}$ 则定义域为 $[0,\sqrt{2})$。

【例2】 设 $y=f(x)$ 定义域为 $(0,4]$,求下列函数定义域:
(1) $f(x^2)$;(2) $f(\ln x)$。

解 (1) 由 $0<x^2\leqslant4$ 得 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$;
(2) 由 $0<\ln x\leqslant4$ 得 $\ln1<\ln x\leqslant\ln e^4$,故 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1,e^4]$。

【例3】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant1\\2 & 1<x\leqslant2\end{cases}$ 则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域为________。

(A) 无意义 (B) 在 $[0,2]$ 上有意义
(C) 在 $[0,4]$ 上有意义 (D) 在 $[2,4]$ 上有意义

解 由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$,故 $f(2x)$ 的定义域为 $0\leqslant2x\leqslant2$,即 $x\in[0,1]$,$f(x-2)$ 的定义域为 $0\leqslant x-2\leqslant2$,即 $x\in[2,4]$,而 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 为一个表达式,故 $g(x)$ 无意义,选(A)。

【例4】 求函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$ 的定义域。

解 $[x+1]$ 为取整函数,当 $0\leqslant x+1<1$ 时,$[x+1]=0$,即 $-1\leqslant x<0$ 时,函数的分母为0,故去掉 $-1\leqslant x<0$ 的部分,即为函数的定义域,即为 $(-\infty,-1)$,$[0,+\infty)$。

【例5】 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,求 $f[1-\ln x]$ 的定义域。

解 本题是已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,求复合函数的定义域,一般采用代入法,即

$$1\leqslant1-\ln x\leqslant2$$

解之得
$$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant1,\text{即}\left[\frac{1}{e},1\right]$$

【例6】 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:
(1) $f(x^2)$;(2) $f(\sin x)$;(3) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$。

[1-1.17(1),(2),(4)]①

解 (1) 由已知 $0\leqslant x^2\leqslant1$ 得 $x\in[-1,1]$。

① [1-1.17(1)] 表示《高等数学》(第五版)(同济大学) 习题1-1 中第17题第(1)题,下同。