

科学天下
新观念数学
XINGUANNIANSHUXUE



微积分之

屠龙宝刀

HOW TO ACE CALCULUS:
THE STREETWISE GUIDE



严重警告

真要命!

这本书内容过于清晰、直接、搞笑，可能危及微积分“让学生迷惑、补考重修”

这历久不衰的重要功能。

本人建议：学校应该把这本书列为**禁书!**

——William Thurston
(1982年菲尔兹奖得主)

一笑傲极限、连续、导数、积分法

笑傲极限，让微积分简单易学!

[美] C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森 / 著 张 菽 / 译

湖南科学技术出版社

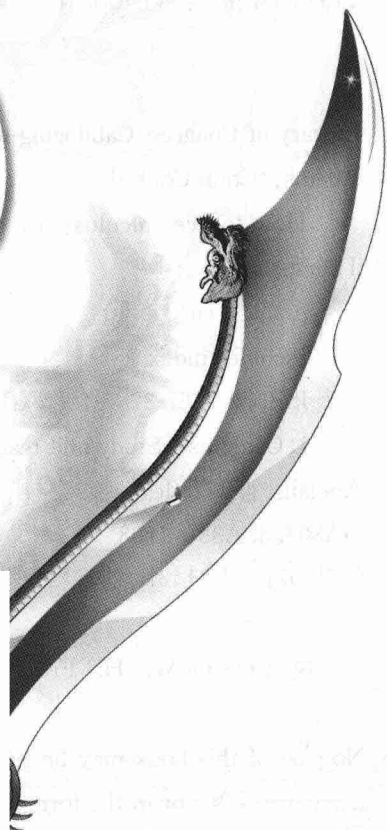
科学天下
新观念数学
XINGUANNIANSHEXUE



微积分之

屠龙宝刀

HOW TO ACE CALCULUS:
THE STREETWISE GUIDE



严重警告

真要命!

这本书内容过于清晰、直接、搞笑，可能危及微积分“让学生迷惑、补考重修”

这历久不衰的重要功能。

本人建议：学校应该把这本书列为禁书！

——William Thurston
(1982年菲尔兹奖得主)

一笑傲极限、连续、导数、积分法

一笑傲极限，让微积分简单易学！

【美】C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森 / 著 张 菽 / 译
湖南科学技术出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

微积分之屠龙宝刀 / (美) 汤普森著 ; 张菽译. --
长沙 : 湖南科学技术出版社, 2010. 4
ISBN 978-7-5357-6192-7

I. ①微… II. ①汤… ②张… III. ①微积分—普及
读物 IV. ①O172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 069485 号

科学天下 新观念数学

微积分之屠龙宝刀

——笑傲极限、连续、导数、积分法

著 者: [美]C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森

译 者: 张 菽

策划编辑: 孙桂均 李 媛

文字编辑: 陈一心

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731 - 84375808

印 刷: 长沙瑞和印务有限公司

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址: 长沙市井湾路 4 号

邮 编: 410004

出版日期: 2004 年 5 月第 1 版

2010 年 5 月第 2 版第 4 次

开 本: 710mm×1020mm 1/16

印 张: 15.25

字 数: 238000

书 号: ISBN 978-7-5357-6192-7

定 价: 28.00 元

(版权所有·翻印必究)

作者简介

亚当斯 (Colin Adams)

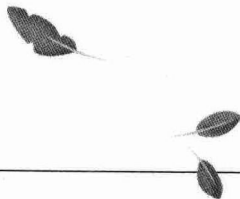
美国威廉斯学院 (Williams College) 数学教授, 曾荣获1998年美国数学协会杰出教学奖 (MAA Distinguished Teaching Award); 另著有《The Knot Book》.

哈斯 (Joel Hass)

美国加州大学 (戴维斯分校) 数学教授, 曾获美国国家科学基金会 (NSF) 及史隆基金会 (Sloan Foundation) 研究奖.

汤普森 (Abigail Thompson)

美国加州大学 (戴维斯分校) 数学教授, 曾获美国国家科学基金会 (NSF) 及史隆基金会 (Sloan Foundation) 研究奖.



- 第 1 章 **引**言 (2)
- 第 2 章 **你**的任课老师到底如何 (4)
- 2.1 选择你的任课老师 (4)
- 2.2 对任课老师该有什么要求 (9)
- 2.3 如何对待任课老师 (11)
- 第 3 章 **轻**松拿高分的十大通则 (12)
- 第 4 章 **好**问题和坏问题 (17)
- 4.1 为什么要问问题 (17)
- 4.2 问题举例 (18)
- 4.3 不该问的问题 (19)
- 第 5 章 **准**准备好了吗? 预备知识 (21)
- 5.1 你学过些什么 (21)
- 5.2 在上微积分的第一天, 你应该知道什么 (22)
- 5.3 电脑与计算机, 咱们的 2-bit 朋友 (28)
- 第 6 章 **如**何应付考试 (31)
- 6.1 会考些什么 (32)
- 6.2 如何备考 (33)
- 6.3 不为考试而钻研 (34)
- 6.4 应考须知 (35)
- 第 7 章 **直**线、圆、圆锥曲线族 (38)
- 7.1 笛卡儿平面 (38)
- 7.2 一般作图妙方: 抛物线的寓言 (39)
- 7.3 直线 (42)
- 7.4 圆 (46)
- 7.5 椭圆、抛物线、双曲线 (47)

- 第 8 章 **极限：你可少不了它们** (51)
- 8.1 基本概念 (51)
 - 8.2 取极限的一般步骤 (55)
 - 8.3 单侧极限 (57)
 - 8.4 怪异函数的极限 (58)
 - 8.5 计算机与极限 (61)
- 第 9 章 **连续性，或你为何不该在不连续的坡道上滑雪** (63)
- 9.1 概念 (63)
 - 9.2 连续性的 3 个条件 (64)
- 第 10 章 **何谓导数？变才是硬道理** (69)
- 第 11 章 **导数的极限定义：求导数的麻烦方法** (74)
- 11.1 定义导数 (74)
 - 11.2 导数极限定义的其他形式 (79)
- 第 12 章 **求导数的简单方法** (81)
- 12.1 微分法的基本法则 (81)
 - 12.2 幂法则 (81)
 - 12.3 积法则 (83)
 - 12.4 商法则 (84)
 - 12.5 三角函数的导数 (85)
 - 12.6 二阶导数、三阶导数、更高阶的导数 (86)
- 第 13 章 **速度：油门踩到底** (88)
- 13.1 速度即导数 (88)
 - 13.2 车子的位置与速度 (89)
 - 13.3 自由落体的速度 (91)
- 第 14 章 **链式法则：S&M 的游戏** (93)

- 第 15 章 **画**函数图像：如何当个专家 (97)
- 15.1 画函数图像 (97)
 - 15.2 能够绊倒你的狡猾图像 (101)
 - 15.3 二阶导数检测 (102)
 - 15.4 凹性 (104)
- 第 16 章 **极**大值与极小值：实用部分 (106)
- 16.1 闭区间上的最大值及最小值 (106)
 - 16.2 应用问题 (107)
- 第 17 章 **隐**微分法：咱们就拐弯抹角吧 (118)
- 第 18 章 **相**关变化率：你变，我跟着变 (120)
- 第 19 章 **求**近似值：评估你的成名之路 (129)
- 第 20 章 **介**值定理与中值定理 (133)
- 20.1 介值定理：面包中间没夹东西就不叫三明治 (133)
 - 20.2 中值定理：陡就是陡 (135)
- 第 21 章 **积**分：倒过来做就成了 (138)
- 21.1 不定积分 (139)
 - 21.2 积分法：简单的方法 (141)
 - 21.3 代换法 (145)
 - 21.4 眼球技术 (147)
 - 21.5 积分表 (148)
 - 21.6 利用电脑和计算机 (149)
- 第 22 章 **定**积分 (150)
- 22.1 如何求定积分 (150)
 - 22.2 面积 (151)

- 22.3 微积分基本定理 (157)
- 22.4 定积分的一些基本法则 (158)
- 22.5 数值逼近法 (159)
- 22.6 黎曼和——附带一些关键细节 (164)
- 第 23 章 **模**型：从玩具飞机到跑道 (168)
 - 23.1 现实问题 (169)
- 第 24 章 **指**数与对数，“e”把戏总复习 (173)
 - 24.1 指数 (173)
 - 24.2 对数 (175)
- 第 25 章 **把**微积分这玩意儿用到指数与对数上 (179)
 - 25.1 微分 e^x 与 e^x 的朋友们 (179)
 - 25.2 积分 e^x 与 e^x 的朋友们 (180)
 - 25.3 微分自然对数 (181)
 - 25.4 当底数为其他数时 (182)
 - 25.5 积分与自然对数 (183)
- 第 26 章 **对**数微分法：化难为易 (185)
- 第 27 章 **指**数增长与指数衰退：坏家伙的兴亡 (188)
- 第 28 章 **形**形色色的积分技巧 (197)
 - 28.1 分部积分法 (198)
 - 28.2 三角代换法 (200)
 - 28.3 部分分式积分法 (203)
- 第 29 章 **20**个最常犯的错误 (206)
- 第 30 章 **期**末考会考什么 (211)
- 词汇表 数学名词活学指南 (217)




谨以此书

献给

所有对未来生涯规划具有鸿鹄之志，
却又担心会撞上微积分的嵯峨山崖
而折断翅膀的
学生们

第1章

引言



如果你正打算要读这篇序文，那么这本书很可能不适合你。为什么呢？因为我们预期这本书的读者，应该是那些一天到晚忙于应付微积分的学生，他们压根儿不会有空来读这种咬文嚼字、考试又一定不考的序文和导言。当然，也有可能是你还没有买下这本书，正站在书店里这边瞧瞧、那边瞧瞧，考虑到底要不要买回去——如果情形果真如此，那就让我们简单告诉你，这本书究竟在讲什么。

如果你想探知内行人所知道的秘诀与窍门，使你的大一上学期微积分修得轻松愉快，那么这本书必然是你所需要的；如果你想快乐中学到许多妙不可言的数学知识，这本书也正好是你要找的。甚至当你只是想拿本书在手上做个样子，让看见你的人以为你很有数学文化气息，正徜徉、沉醉在知识的波涛里，这本书也能帮你圆满完成任务。

曾几何时，你坐在教室里听讲却完全听不懂，而面露窘态。可能是因为你的注意力，在一个节骨眼地方，被脑中突然闪过的其他念头支开或打断；也可能是因为任课老师在讲解一些基本概念时，一时高兴过头，不经意地扯到一些深奥理论去了，搞得你下了课后一头雾水，只好求助于才思敏捷的同窗好友，还得请他喝一杯咖啡当做贿赂：“刚才那课堂上，教授讲了啥玩意儿呀？”结果，你那位朋友只用了短短5分钟向你解释，居然就让你恍然大悟。“什么！就这么简单吗？”你嘴里这么说着，心里可是直嘀咕：“为什么老师一开始就


如此解释呢？”从此，你巴不得总有这位同窗在一旁，把课堂上讲过的所有内容都向你解说一番。

你有这么一位益友，可真是前生修来的福气，不是每个人都这么好命的。这本书的目的就是要取代你那位朋友。本书提供了微积分里面各种关键论题的“非正式”说明，并尽可能跳过正式教科书中那些没啥用途的技术性细节与一大堆啰唆的文字，而是着重于概念的阐释与澄清。本书并不是要取代微积分教科书，而是希望帮助读者更容易了解教科书中的微言大义。

只要你的观点正确，方法无误，学习微积分不但是拓展心智的难得经历，也是叫人心旷神怡的乐事。这本书将告诉你：微积分该怎么学，如何找最好的老师，该学些什么，以及考试时可能会考哪些部分。这些内容可都是我们当年在当大学生、必须修微积分时所企盼而不可得的呢！

好啦，你已经磨蹭得够久了，何不拿着这本书到收银台，掏腰包付点小钱把它买下来，然后咱们继续再聊？

第2章



你的任课老师 到底如何

2.1 选择你的任课老师

在这儿我们要简单介绍一下数学家，包括他们的尊卑层级，以及各个阶层的独特特征。

在选择你的任课老师之前，务必仔细研读此节。

了解数学家，其实就像赏鸟。赏鸟专家为了要能够在大庭广众之中，很有信心的大声宣称：“看！那种黄肚皮的鸟是美洲啄木鸟！”他得事先对这种鸟的特征有足够的认识才行。

能否选到一位最佳任课老师，关系实在重大，若是选得理想的话，你的微积分修课经历将成为一连串的喜悦记忆；若选得不理想，到后来你很可能故意挑微积分的上课时间去看牙医，此乃两“痛”相权取其轻也。

通常只要看看老师的办公室门，你就能得到相当多的有关信息。一般而言，老师的办公室门上都会挂着或贴着名牌，主要作用是告知其正式头衔。这头衔还挺复杂，有以下诸多可能：

A. 终身职的固定教师（门牌上写的是某某教授或副教授）。有“终身职”的教师，是指无论他如何鬼混、如何不称职，学校都不能主动炒他们鱿鱼。副教授者，资格上比教授矮了一级；副教授之所以为副教授，有时候是因为他们年纪较轻，教书的资历较浅，有时候则是因为其他难以想象的原因，让他无法晋升（诸如他在院长公寓烟囱里面躲猫猫的时候，不巧叫院长逮个正着）。

B. 非终身职的固定教师（门牌上写的是某某助理教授）。这号人物可以随时被校方请走路，不过当他们被学校辞退的时候，原因多半不会跟他们教导微积分的能力扯上关系！在欧洲，助理教授实际上就是助理，他们的工作包括按时修剪教授家里的草皮，替教授提公文包，以及代替教授讲课。而在美国，他们的地位就稍微高些，头衔里的“助教”两字也只是显示他们的教书生涯刚开始，处于尚未取得终身职位的阶段。

C. 客座教师（门牌上写的是某某客座教授或客座助理教授）。“客座”两字是指学校对他们的礼遇有时间上的限制，一年或两年约满之后，他们就得乖乖自动离开，至于离开之后有没有其他路子，学校就不过问啦！

D. 临时教师（门牌上写的头衔是讲师、指导老师或是兼任教授）。有些学院聘了一些临时教师，目的无它，就是专门请他们来教课。这或许意味着这些临时教师可能对教学比较尽心尽力。

E. 研究生（门牌上只写姓名，没有头衔，不过有时候也可能胡乱弄个一看就知道是假的头衔，诸如兼职指导教师之类的）。

F. 门上看不见任何门牌。这是非常不妙的现象，可能有几种原因：其一是表示这位老师太缺乏组织能力，居然连门牌这么重要的东西都给漏掉了；其二更是严重，表示这位老师以前的学生，为了报复泄恨，不断前来把他的办公室门牌扯下来丢掉。当然也可能是他有某种顾虑，不愿意让他以前的学生知道他的办公室在哪儿；这种现象值得花点时间深究一番。

G. 连门都没有。此乃极端危险的信号！很可能表示学校当局认为他根本没有资格拥有一间办公室（果真如此，你下了课之后要怎么去找他问问题呀？），当然也有可能是你找错了大楼！

上述类别中，属于 A、B、C、D 四类的几乎都有博士学位。

在学校的选课课程目录内，所有具固定职位的教师的名字与头衔都会列出

来，以备学生查阅。在规模庞大的大学里，有固定职位的通常是一些做高深研究的教师，或者是那些长期待在数学系内，操控着系里行政机构的老家伙。有时候，系里最好的老师就在这群人里面，不过最差劲的老师也混杂在当中。这些老师包办了系里所有高年级的课程，偶尔也教教微积分这种入门课；他们对于教微积分这项工作看法不一，有的人认为这是个摆脱不掉、必须忍受的义务及负担，另外一些人则沉浸在传授微积分的乐趣中。

在许多规模较小的学校里，校方并不要求教师做许多研究，因此他们的重点放在教书上面。所以你会发现，在这些学校里，有许多教师在改进教学方面花很多时间和精力，这有时也意味着，他们可能会是比较好的微积分老师。不过凡事有利也有弊，由于这类学校的教师不做研究，他们的教书担子通常就比那些在研究型大学里任职的教师沉重了一到两倍，所以，虽然他们不必因为搞研究而分心（诸如千辛万苦地证明“双曲三维流形的凸锥是紧的”这类问题），但是往往必须在一学期里同时教四个班的微积分课，面对数百学生的需求，即使有心专注教学，又谈何容易？

在区别 C 类（即客座教师）跟 D 类（临时教师）时，所牵涉到的细节还相当细微，不能一概而论。有些客座教师在别处有固定职位，来这儿只是适逢他每七年一次的休假年或者是其他长假，来此与老朋友叙叙旧，或是在很棒的冲浪景点（恰好在你的学校附近）尽情享受一番。他的假期一完就走人，至于学生在学期末对任课老师的评分是优是劣，他压根儿没放在心上。不过，如果这些老师原来任职的学校就标榜教学为第一要务，那么你也可能会碰上顶尖的好老师。

至于其他的客座教师，可能是刚拿到博士学位的新科教师，你成了他的开门弟子。他们通常挂着诸如“客座助理教授”或其他带着“博士后”字眼的头衔。他们的当务之急并非教学成绩，而是试图搞出一点可以发表的研究成果，以寻找明年的出路。但他们也不可能完全放弃教学，因为一旦学生认定他们是坏老师的话，肯定以后不会有学校聘他们，但是由于缺乏经验，他们的教学能力因人而异，好坏差距极大。

讲师跟临时讲师通常是逐年一聘，他们的主要任务就是教课。他们的教学方法可能决定明年是否能续聘，而学生在学期末给老师打的分数，很可能影响

到他们明年的饭碗。所以对他们来说，巴结学生、让学生开心是极端重要的。如果一位讲师在学校里待了超过一年，却仍然还没有混到一个带“教授”字眼的头衔，这表示他仍然是留校察看的临时教师。这种教师一般只能教教微积分和一些微积分预备课程，若是他们在此之前教过同样的课程好一阵子，那么一般说来他们都会教得比较好，如果仍然教得相当糟糕，他准是系主任的小舅子。

硕士班或博士班的研究生有可能是非常好的讲师，他们的共同弱点一般是经验不足。他们教学能力的优劣，完全难以捉摸，有的相当顶尖，有的极端蹩脚。不过也有个问题，那就是他们大多刚念完大学。对初等微积分还记忆犹新，不太容易玩花样蒙混过关。他们之中亦不乏年纪较长的，你不难从他们花白纠结的一头乱发、含糊的口气，以及邋遢的穿着，一眼认出这类人物。

对于绝大多数的研究生讲师，你不大可能从旁探听到他们以往的表现，遇到他们的话，最好的策略就是去听他讲一两堂课，如果发现讲得很糟，就应该要当机立断，迅速撤离。

通常，你可从办公室的空间大小看出一位教师的学术地位。如果其他征象都没法给你足够多可靠的信息，不妨一探他的办公室。办法是：进去估量一下办公室内的地板面积，然后把估计的数值除以门上具名的人数，再加上办公室所在楼层数目，如果没有窗子就得乘以-1。最后得到的值愈大，表示你的任课老师在系里地位愈高。

当然，以上的归纳分析并不很准确可靠，例外可说是屡见不鲜。我们自己就曾遇过既认真又杰出的客座教授，也碰到过为学生鞠躬尽瘁的尽职教师。那么我们该怎样办才好呢？幸好有个更为可靠而且相当简单的方法，可以告诉我们在可供选择的范围内，谁是最高水平的教师。

内行机密：想知道谁是最好的任课老师啊？开口问呀！

其实系里上上下下，每个人心里都明白究竟谁是个好老师。你可以去拜访系里的两三位老师，向他们打听一番。不过得注意一点，你最好问那些年纪轻一些的老师，因为他们涉世未深，故意诓你的几率不大。另外，系办公室的秘

书也知道哪几位老师教得最好，等着选课的学生队伍排得最长，而哪几位老师会让许多学生半途而废。

内行机密：想知道谁是最好的任课老师吗？多听几个老师讲课，然后选择你认为最好的那一位！

在规模较大的大学里，同一门课你大概可以在 5~10 位教师里精挑细选。规模较小的学校也许没有这么多选择，教学水平可能比较整齐。不管学校大小，如果你多问问，应该可以找出两三位优秀的教师，然后你再去一一试听，选出你的理想老师来。

如果没得选择也就罢了，既然可以选，当然就应该选出最好的，其实这个选择一点也不难，通常只要听了第一堂课，你就会知道谁能引起你的注意，而谁会让你听得哈欠连天。你的筛选标准要订得很高，千万不要跟某些学子犯同样的错误：误以为听不懂是自己的错。

内行机密：若上课之前你做过预习，但讲课的内容你却完全无法听懂，过错极可能在任课老师，而不在你！

如果第一天上课就有超过 $\frac{1}{10}$ 的学生睡着了，那是一个很糟糕的信号；如果上课第一天就分发下来一份印得很清楚的课程大纲，或者任课老师帮同学排定了许多课外的办公时间，那可是好的信号。如果你在课堂里听了老半天，还搞不清这节课上的是法文还是数学，那是个糟糕的信号；如果任课老师指定《奇说趣论微积分》这本书为必备参考书，那是个好的信号——而且是极其好的信号！

许多学校不喜欢让学生试听，因为这样会大幅增加学校行政人员的工作量，而且到头来会使得班级大小难以控制。有些学校的行政人员甚至希望你缴完学费后便自动消失，最好不要再去找他们的麻烦。切记！千万别在乎他们高兴与不高兴，你缴了学费，就有权利要求他们为你做点事！

如果你现在是个高中生，而且正在修微积分，那么以上所述的选良师的高招，绝大部分没有用武之地，原因是你根本毫无选择。在这种情况下，你就是踢桌子、摔板凳，都没啥用，所以你只能祈求老天爷保佑自己不要遇到太离谱

的糟糕老师.

2.2 对任课老师该有什么要求

好啦,你现在好歹已经有了任课老师,对他(她)的职位也有些初步的了解,那么咱们就再更仔细瞧瞧他(她)算不算是理想的微积分老师.以下举几个你可能料想不到的实际例子.

名数学家故事之一

出生在匈牙利的冯·诺伊曼(John Von Neumann, 1903~1957), 20世纪30年代移居美国. 他利用工作闲暇之余, 提出了计算机内存储程序的概念, 可算是计算机理论的开山祖师爷. 此外, 他的为人处世也有点不太平凡.

有一次, 他讲完一堂微积分课, 有位学生跑来问他问题: “冯·诺伊曼教授, 黑板上最后那个问题, 我不了解你是怎么得到答案的.” 冯·诺伊曼转过头盯着黑板上那个问题, 看了大约一分钟, 然后说: “ e^x ”. 这位困惑的学生以为他没有听明白, 于是说: “我知道那是正确答案, 冯·诺伊曼教授, 我只是不懂它是怎么求出来的.” 结果冯·诺伊曼盯住学生看了一分钟, 然后移开视线, 又重复一遍说: “ e^x ”. 这名学生开始失去耐性了: “但你并没有告诉我你究竟是怎么得到答案的!” 冯·诺伊曼把头转向他, 一脸寒霜地说: “小伙子, 你到底要我怎么办呀? 我不是已经用两种不同的方式告诉你了吗?”

启示: 有的时候, 教授们其实已经不大记得他们自己以前在当学生, 还在学习微积分时的困苦情形, 由于他们年复一年、一遍又一遍讲授同样的教材, 他们根本不能理解, 为什么学生仍然不懂.

名数学家故事之二

维纳(Norbert Wiener, 1894~1964) 大约是20世纪前半叶世界上最伟大的一位美国数学家. 他过人的才智为同行所钦佩, 而他也同样因为心不在焉而出名.

在麻省理工学院(MIT)执掌教鞭数年之后, 维纳一家人搬到一栋比较大