

有限元分析的概念和应用

作者 (美) Robert. D Cook.

大连工学院数力系译

1978. 4.

绪 言

大约从 1956 年以来,有限元法得到了迅速的发展。它开始作为应力分析的一个数值方法,现在仍然广泛地用于这个目的。在许多其它领域,包括热传导、渗流、流体动力学以及电磁场中有限元法也成为有用的。现在数学家们已承认它是一个合适的研究领域。

本书是为应力分析的大学生而写的。假定他们熟悉材料力学、用 Fortran 编制计算机程序和矩阵代数。如果他们熟悉数值分析方法和弹性力学基本理论,则学习将更容易,但本书仍然提供关于这些课题的预备材料。因此,为了弄懂大部分内容,大学生所受到的教育是足够的了。

让我们更详细地谈一下有助于学习本书所需要的基础。假定大学生打算采用有限元法去进行实际的应力分析和想要弄懂该方法为什么有它那些特性,但对于数学证明和推导不很关心。他应该熟悉静力学、动力学和材料力学这些大学生课程。他大体上要弄懂足够的计算机程序编制,使他能够使用于程序、像磁盘外存这种辅助存储器以及 COMMON 语句和 EQUIVALENCE 语句。需要有编制程序的能力,因为计算机这个工具是受人管理的,不可能由完全不熟悉该方法的人来作。大学生必须熟悉基本的矩阵运算:例如,必须掌握矩阵相乘、转置和微商;对求逆的意义必须清楚但没有必要掌握求逆的计算过程。虽然不是绝对必须引用矩阵记号,但不用矩阵记号的话,描述该方法将是非常麻烦的。此外,矩阵表述容易归结到计算机的执行过程,对于已研究过框架结构分析的矩阵方法的人来说,这一事实是熟悉的。

有关弹性理论、板壳理论、能量法和数值分析的知识也是希望具备的。但是,真正需要的只是这些课题中最基本的概念。我们将在第一章和较后章节中必须之处概述这些内容。用到的高深概念极少。读者可以当作它是正确的结果加以接受,或者,自己可以独立地去进一步研究该课题。这类似于在初等材料力学中的很多情况;学生必须忽略某些影响和接受很多模糊的解释,为了得以澄清问题他就必须去研究弹性理论。

我感到本书和有限元分析的关系与材料力学书和应力分析的关系大致相同。换句话说,课本强调的是简单的,有用的并有物理意义的题目;它不是主要关心这个课题的数学基础或者它对更复杂问题的推广。

这个课题是如此之大,以致于一个关于有限元理论和实践注解的书目提要实际上它本身就会是一本书。本书给出了很多参考文献,但没有打算把所有文献都开列出来。下面是本书讨论的和不讨论的某些题目:

- 我们的课题是分析,不是设计。不介绍最优化和结构的修改处理。
- 方向是针对一般方法和连续体,而不是对框架结构的特殊方法。但桁架和梁单元是作为有益的例子来用的。
- 详细讨论的单元是以假定位移场为基础的、在实践中性能较好的单元,它们不限定特殊的形状,不取应变和曲率作为节点自由度。节点自由度是位移或位移和转角。许多单元,包括某些好的单元没有讨论,但这些单元与较简单的单元的不同常常是

由于代数上的细节而不是由于原理的不同。

- 由于实用和教学上两方面的原因把重点放在线性静力分析上。动力和非线性问题处理得较不充分。
- 作为家庭作业给出了某些感兴趣的和重要的项目。因此，对本书不作系统研究的读者可看一下这些问题而不用做它。
- 如果有现成的、有益的、比较独立的且又不长的 Fortran 程序段，那末就给出。

为了防止本书过长，详细讨论的单元限定在假定位移场基础上。其它办法不太流行但有时是有价值的。例如杂交单元（17.1 节）对板的弯曲是特别好的。特别是由于发现在以前认为极好的 Q19 单元（第十二章参考文献 9）如果它的长比宽大 1.5 倍就不很精确，就更显出杂交单元好了。

现在能得到的有限元教科书强调基础理论并给出当一个有效的计算机程序用于实际问题时，该方法做得怎样的许多例子。在基础理论和用计算机来计算之间存在着从理论到实际的转换。这本书补充了“如何实现这一转换”这部分内容到现有的教科书文献中。我鼓励大学生去参考其它教科书，了解不同的方法和其它观点是有好处的。

在实践中，有限元工作要取得成效一定要有个很好的计算机程序，分析者或者必须自己编程序或者必须与其他程序员的人密切配合工作。为了促使学生去学习这一不可缺少的领域，我常常指定一项学期任务，在这项任务中要编写出或修改一个程序，并用考题来验证其工作。这项工作有助于推动学生去清楚地弄懂内容，因为模糊的思想是不容易轻易从一个计算机得到一个准确的巧妙的答案的。

我感谢那些提出促进我对某些题目进行研究的问题的学生，我也感谢那些作了有价值 and 巧妙建议的学生。V.N.Shah 提供了图 6.1.3 和 6.1.4 的格式。H.Takemoto 为 10.5 节编制了程序并作了数值工作。J.A.Stricklin 和 W.E.Haizler 在 TexasA 和 M 大学慷慨地供给了技术报告和其它资料。

Robert.D. 库克

1973 年于威斯康星州，麦地申。

表示符号

$\{ \}$ 列向量, 为了节省地方系数可水平地写出, 例如

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \{u \ v\}$$

$[\]$ 行向量, 或长方矩阵, 或正方矩阵。

$[\]$ 对角矩阵。

$[\]^T, \{ \}^T$ 矩阵或列向量的转置。

$[\]^{-1}$ 方阵的逆阵。

$[\]^{-T}$ 方阵转置的逆阵。

$$[\]^{-T} = ([\]^{-1})^T = ([\]^T)^{-1}$$

$\det[\]$ 方阵的行列式。

$\cdot$ (圆点) 对时间的微商, 例如, ,

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$\cdot$ (点) 用在下标前表示偏微商, 例如

$$W, x = \frac{\partial W}{\partial x} \quad W, xy = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

—— (横线) 在第十二章用做表示运动的幅度, 例如

$$W = \overline{W} \sin \omega t$$

δQ 量值 Q 的虚 (无限小) 改变。

ΔQ 量值 Q 的小但有限的改变。

$d.o.f$ 自由度。

E 各向同性材料的弹性模量和泊松比。

λ 特征值, 或荷载参数, 它的临界 (屈曲) 值是特征值 λ_{cr} 。

ρ 质量密度。

T 绝对零度以上的温度。

t 构件厚度, 或时间 (第十二章)。

ω 自振频率, 弧度/秒。

U, U_0 应变能, 单位体积的应变能。

Π_P 总势能。

$\{f\}$ $\{f\} = \{u \ v \ w\}$, 沿坐标方向一点的位移。注意, 按着通常的习惯, 在第七章 w 与 θ 方向相同, 而在第八章 v 与 θ 方向相同, 其中 θ 是环向位移。

$\{F\}$ $\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}$, 单位体积上的体积力。

$\{\phi\}$ $\{\phi\} = \{\phi_x \ \phi_y \ \phi_z\}$, 单位面积上的表面力。

$\{d\}, \{D\}$	分别为单元和结构的节点自由度。
$\{r\}, \{R\}$	分别相应于 $\{d\}$ 和 $\{D\}$ 的作用到节点上的广义力。
$\{F\}$	由节点作用到单元上的力, $\{F\} = -\{r\}$ 。
$\{P\}$	作用到结构节点上的集中荷载。如果体力、热应变等全为零, 那么 $\{R\} = \{P\}$ 。
$\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$	工程应力和应变, 见 1.2 节和 1.3 节。
$\{\sigma_0\}, \{\varepsilon_0\}$	初始应力和应变, 见 1.2 节和 1.3 节。
$[E]$	弹性应力-应变关系; 对于 $\{\varepsilon_0\}=0$ 有 $\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$ 。
$[N]$	形函数矩阵, $\{f\}=[N]\{d\}$ 。
$[B]$	应变-位移矩阵, $\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$ 。
$[DA]$	在假定位移场中, 将位移 $\{d\}$ 和广义坐标 (幅度) $\{a\}$ 联系起来的矩阵, $\{d\}=[DA]\{a\}$ (见 4.2 节)。
$[k], [K]$	分别为单元和结构刚度矩阵。
$[k_0], [K_0]$	分别为单元和结构初始应力刚度矩阵。
$[J], [J^*]$	雅可比矩阵和它的逆阵, $[J^*]=[J]^{-1}$ 。
$[m], [M]$	分别为单元和结构的质量阵。
$[T]$	坐标变换矩阵, 带下标或不带下标 (见第十一章)。
$U_L, [K_L]$	由应变-位移关系线性部分产生的应变能和结构刚度矩阵。在第十四章利用下标 L 是用来区别由非线性项引起的量 U_{NL} 和 $[K_{NL}]$ 。
$[I]$	单位矩阵 (在对角线上元素全是 1, 其余为零)。
$\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial a}\right\}$	表示向量

$$\left\{ \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_1}, \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_n} \right\}$$

其中 Π_p 是参数 a_1 到 a_n 的标量函数。

偶而用到的表示符号和上述符号的修改 (也就是用加上下标来修改) 在用到它们的地方再定义。

内 容

1. 背景和预备材料.....	(1)
1.1 有限单元法.....	(1)
1.2 弹性理论.....	(4)
1.3 应力—应变关系.....	(6)
1.4 板和壳的特性.....	(9)
1.5 曲线的插值和表示.....	(11)
问 题.....	(13)
2. 刚度法和平面桁架.....	(15)
2.1 引言.....	(15)
2.2 结构刚度方程.....	(15)
2.3 单元刚度方程.....	(17)
2.4 单元刚度阵的拼装.....	(18)
2.5 平衡方程的拼装.....	(20)
2.6 节点编号以利用稀疏性.....	(22)
2.7 边界条件和应力计算.....	(24)
2.8 方程的直接求解.....	(26)
2.9 关于直接解法的进一步讨论.....	(29)
2.10 方程的非直接解法.....	(30)
问 题.....	(31)
3. 势能和瑞利——李兹法.....	(33)
3.1 引言.....	(33)
3.2 总势能.....	(33)
3.3 几个自由度.....	(34)
3.4 初始应变和应力.....	(35)
3.5 势能的一般表达式.....	(36)
3.6 驻值势能的性质.....	(38)
3.7 瑞利—李兹法.....	(39)
3.8 瑞利—李兹法的进一步讨论.....	(41)
3.9 瑞利—李兹法的有限元形式.....	(42)
3.10 结束语.....	(44)
问 题.....	(44)

4. 利用假定位移场	(46)
4.1 引言	(46)
4.2 以假定位移场为基础的公式推导	(46)
4.3 建立单元公式的一个例子	(49)
4.4 平面常应变三角形	(50)
4.5 关于单元位移场的一般论述	(52)
4.6 收敛和协调的要求	(53)
4.7 应力计算	(56)
4.8 角节点和边节点	(57)
4.9 有限元与有限差分	(57)
问 题	(58)
5. 等参公式	(61)
5.1 引言	(61)
5.2 平面等参单元	(61)
5.3 高斯积分公式简介	(63)
5.4 平面单元计算机子程序	(65)
5.5 某些补充的等参单元	(67)
5.6 等参单元的合法性	(69)
5.7 需要的积分阶数	(71)
5.8 结束语	(72)
问 题	(73)
6. 单元的某些改进	(76)
6.1 引言。内部自由度的凝聚	(76)
6.2 非节点自由度	(78)
6.3 关于内部自由度的例子和评述	(79)
6.4 避免在线性单元中的寄生剪切	(81)
6.5 单元的降级	(84)
问 题	(86)
7. 旋转体	(89)
7.1 引言	(89)
7.2 轴对称荷载下的公式推导	(89)
7.3 非对称荷载: 引言	(91)
7.4 非对称荷载: 杂记	(94)
7.5 非对称荷载: 一般情形	(96)
7.6 纯弯矩荷载	(97)
问 题	(98)
8. 旋转薄壳	(100)

8•1	引言	(100)
8•2	几何和位移的理想化 ²	(100)
8•3	应变—位移关系	(101)
8•4	一个单元的公式推导	(102)
8•5	结束语	(105)
	问 题	(106)
9.	平板弯曲	(107)
9•1	引言。平板单元概述	(107)
9•2	平板单元。位移场	(108)
9•3	弹性性质和沿厚度积分	(111)
9•4	高斯积分点位置	(113)
9•5	内部自由度和数值例子	(115)
	问 题	(117)
10.	一般壳体	(118)
10•1	引言。壳体单元概述	(118)
10•2	一般壳体单元。形状和位移场	(119)
10•3	弹性性质和积分	(122)
10•4	高斯积分点位置	(124)
10•5	内部自由度和数值例子	(124)
10•6	有横向剪切变形的旋转壳	(126)
	问 题	(128)
11.	坐标变换	(130)
11•1	引言	(130)
11•2	材料性质的变换	(130)
11•3	二维单元刚度阵的变换	(132)
11•4	一个应用:斜支撑	(133)
11•5	三维单元刚度阵的变换	(134)
11•6	非相似单元的联接	(135)
11•7	非标准端部条件	(137)
11•8	强迫位移相等	(138)
11•9	子结构	(139)
11•10	重复子结构	(141)
	问 题	(142)
12.	动力学和振动	(145)
12•1	引言	(145)
12•2	动力学方程式。质量阵和阻尼阵	(145)

12.3	自振频率。特征值问题	(147)
12.4	凝聚(“特征值节约子”)	(150)
12.5	特征值提取方法	(152)
12.6	动力反应的计算	(155)
12.7	結束語	(156)
	問 題	(157)
13.	初应力刚度阵和线性稳定性	(159)
13.1	引言	(159)
13.2	初始应力刚度阵	(159)
13.3	特征值問題	(162)
13.4	結束語	(163)
	問 題	(164)
14.	几何非线性	(166)
14.1	引言	(166)
14.2	带有坐动标的叠代法	(166)
14.3	关于叠代解的进一步论述	(169)
14.4	一般提法	(170)
14.5	进一步的求解技术	(174)
14.6	各式各样的問題和技术	(177)
	問 題	(178)
15.	材料非线性	(180)
15.1	引言。塑性关系	(180)
15.2	直接叠代法	(182)
15.3	利用切线刚度的增量法	(183)
15.4	增量法的修改	(185)
15.5	弯曲作用的处理	(187)
15.6	具有材料非线性的一些其它問題	(188)
	問 題	(189)
16.	检查和避免误差	(191)
16.1	引言	(191)
16.2	錯誤	(191)
16.3	单元特征值试验	(192)
16.4	离散誤差和收斂速度	(193)
16.5	病态。計算誤差	(195)
16.6	条件数	(196)
16.7	方程次序。对角线系数的衰减	(197)

16·8	残差和叠代改进.....	(199)
16·9	結束語.....	(199)
	問 題.....	(201)
17.	结构力学的各种单元.....	(202)
17·1	平衡、混合和杂交单元.....	(202)
17·2	不可压缩弹性介质.....	(203)
17·3	梁、加强件和有关构件.....	(203)
17·4	特殊形状的单元.....	(205)
17·5	弹性基础.....	(205)
17·6	三角单元和面积坐标.....	(206)
17·7	用计算机生成单元矩阵.....	(209)
18.	各种问题和技術.....	(211)
18·1	其它表述和其它应用.....	(211)
18·2	应力集中。在活載作用下的峰值应力.....	(211)
18·3	逐步施工的结构.....	(212)
18·4	网格形成和计算机显示图.....	(213)
18·5	大型程序和方案.....	(214)
18·6	查閱补充資料.....	(215)

参 考 文 献

第一章 背景和预备材料

1.1 有限单元法

设为了求得应力和位移需要分析图 1.1.a 的结构, 虽然这一结构是矩形断面悬臂梁, 但是由于梁太短不能用梁的理论。弹性理论的方法是把问题表示为偏微分方程。这些方程的解给出了应力分析问题的精确解。但是荷载和支承条件使得求解这个问题实际上很困难。

每当出现一个新问题时, 工程师不会有很多时间化在求解偏微分方程上。他们满足于用合理的努力得到良好的近似解。近似解常常涉及到利用具有有限自由度的替代结构来代替连续体, 一个这样的方法是使用弹性杆系组成的格子 (1)● (参见图 1.1.b)。如果这些杆件的弹性性质规定得合适, 骨架的位移将十分接近于原结构。当位移已知后, 可用 1.2 节中描述的关系来计算应变和应力。所涉及的 d, o, f (自由度) 是杆件彼此连接之处的节点位移。这种“格子相似”是打算利用分析刚架结构的成熟的方法。

有限元法利用一种替代结构, 这种替代结构的一部分在某种意义上是原结构的一块。如此, 在图 1.1.c 中每一矩形区是一块平的板。网格线只是分开这些区的外部轮廓而不是刚架杆件。直观上我们可以期望, 当划分变细时替代结构更加真实地模拟原来的结构。如果我们遵循第四章中讨论的公式形成规则, 那么确是如此。我们的替代结构是有限元结构, 每一个分开的区域是一个有限单元, 各单元间彼此联接之处的点称为节点, 在图 1.1.c 中用黑点标明。

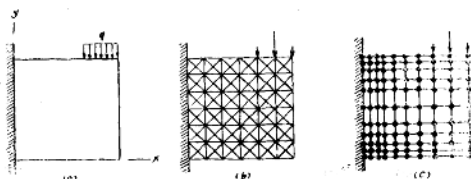


图 1.1-1 (a) 受面内荷载的平板 (b) 刚架模型 (c) 有限元模型

一个有限单元不能简单地看成是实际结构的一片。也许是受到图 1.1.c 的启发, 我们假定很多小的矩形板在它们的角点用铰连在一起。当加上荷载后, 可以期望靠近角点的畸变比别处都大, 单元的边界变成曲的, 在某些单元之间出现裂缝。很清楚, 这种性状不代表实际结构。因此, 为了使得单元形态的描写和我们想模拟的结构形态相一致, 必须排除某些单元畸变, 而另一些单元畸变则必须允许。这一想法迫使我们在正确表示单元性质时采取稍微理论一些的观点。物理的直观虽然有用, 也许是最根本的, 但只有它还不是充分的。

对每一单元, 可以写出如下形式的方程:

$$k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + \dots + k_{1n}d_n = \bar{r}_1$$

● 括号内的数字表示在本书的后面列出的参考文献。

由几种不同材料组成,受到温度梯度及内部压力的组合荷载作用。图 1-1-3b 给出了划分成有限单元的情况。每一个单元是三角形横断面的环。图 1-1-4 给出在两个圆柱交接处的四分之一上所用的有限单元网格。(第十八章的 4.12)。注意在连接缝附近网格加密,因为这儿的应力高而且在短距离内变化很大。单元是平的三角形,采用的计算公式是使它能模拟薄壳性状。

上列例子启示了有限单元法的某些优点。

- 它能够用不同形状、不同大小和不同类型的单元模拟任意几何形状的结构物。
- 它能够适应任意支承条件和任意荷载,包括温度荷载。
- 它能够模拟涉及不同结构元件,例如壳体上的加强肋元件,板、杆、块体等组合的复合结构。
- 有限元结构与实际结构非常相似,而不是一种很难形象化的与实际结构十分不同的抽象物。

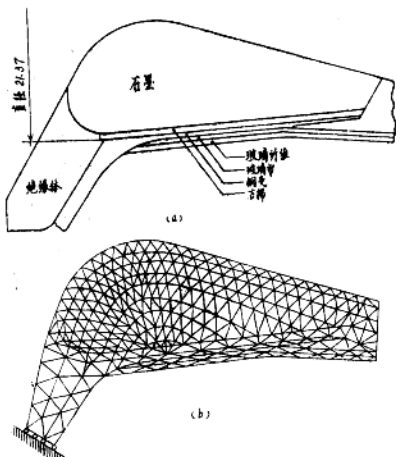


图 1-1-3 (a) 轴对称火箭喷嘴 (b) 有限元网格 (摘自 AIAA 杂志论文)

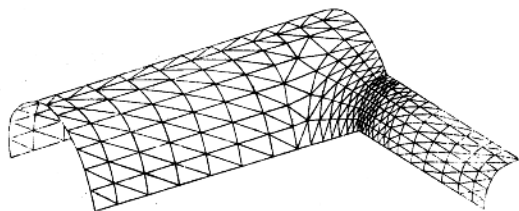


图 1-1-4 两圆柱相交的有限元网格

其它近似方法——例如,有限差分法——缺乏这些特点,或不易适应它们。当然,有限元法也有缺点,这些缺点包括:

- 对一特殊问题得到一个具体的数值结果,而不能求得一般的闭合形式解,这种一般的闭合形式解允许我们研究不同参数变化时系统的反应。
- 为了构造一个好的有限元模型需要经验和判断。
- 大型计算机和可靠的计算机程序十分重要。
- 输入输出数据可能很多,准备和解释它们都很麻烦。

虽然如此，并不只是有限单元法才有这些缺点。

1.2 弹性理论

为了深刻地理解有限单元，要求读者熟悉平衡、协调和位移—应变关系的基本概念。我们将专门对笛卡尔坐标中的平面问题来讨论这些概念，关于三维情形及圆柱坐标的大部分内容请读者参考弹性理论的教科书（3）。

图 1.2.1 给出作用在一个微元（不是有限元）上的应力，令 t 是单元厚度， F_x 和 F_y 是每单位体积的体力，即加在每个体积 dV 上的力为 $F_x dV$ 、 $F_y dV$ ，这些力也许是由重力、加速度和磁场所引起的。应力一般是坐标的函数，这样一来，例如， $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ 是相对于 x 的 σ_x 的变化速度，在距离 dx 上 σ_x 的变化为 $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) dx$ 。在 x 方向力的平衡要求：

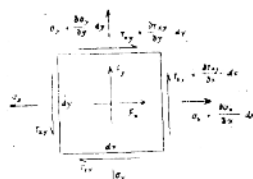


图 1.2.1 平面微元上的应力

$$- \sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) t dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) t dx + F_x t dx dy = 0 \quad (1.2.1)$$

在 y 方向可以写出相似的力的和式，这二个方程归结为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 & \text{或} & & \sigma_{x,y} + \tau_{xy,y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0 & & & \tau_{xy,x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

这本书的大部分地方将使用后一种记号，用逗号记偏微商。方程 1.2.2 称为平衡微分方程。

当连续体的变形低于其破坏点时，在物体内既不出現裂隙或裂缝，也不会发生一部分叠合在另一部分上。这种事说得更加优雅点，位移场是连续和单值的。这就是我们通常所熟知的协调条件，它在有限单元法中特别重要，因为在连续体的有限单元模型中，在单元之间的裂隙及叠合是有可能出现的。

正如我们下面将看到的那样，应变 ϵ_x 、 ϵ_y 和 γ_{xy} 可以从仅有的两个位移场的量推导出来，这意味着如果应变 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 是属于协调变形的，则它们之间存在确定的关系，这一关系称为“协调方程”。我们将无需利用它们，因为我们以后假定的是位移场而不是应变场。

边界条件有两种类型。位移边界条件要求在某些点位移是给定的。例如在图 1.1.1a 上沿着垂直的墙是不允许有位移的。类似的，也存在应力的边界条件，在图 1.1.1a 中，沿着底和顶的一部分指定 $y = \tau_{xy} = 0$ ，沿着右边 $x = \tau_{xy} = 0$ ，沿着顶上的另一部分 $\tau_{xy} = 0$ ， $y = -q$ 。位移给定的地方，应力就是未知量，可自由地取由解所决定的值。类似地，给定应力的地方位移是未知量。

设表面力 Φ_x 和 Φ_y 作用在物体边界上（图 1.2.2）， Φ_x 和 Φ_y 的量纲是每单位面积上力的量纲。为了保持平衡，所加的表面力和内部应力在边界上必须满足下列方程：

$$\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} &= \Phi_x \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y &= \Phi_y \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

其中 l 和 m 是边界法线 $n-n$ 的方向余弦。

当在每一点都满足平衡微分方程和协调方程，并且在每一边界点都已满足边界条件的应力场或位移场已经求得时，就求得了解。如果不存在非线性，那么不可能有其它解，即，解是唯一的。这些结论和有限元分析如何联系呢？有限元解谋求用近似的方式满足这些必要条件。如果单元建立在假定位移场的基础上，如果每一个假定的位移场是连续的，那么在单元内部协调条件满足。适当选取的位移场也将满足单元之间的协调条件及容许所有可能遇到的位移边界条件。平衡方程和应力边界条件（方程 1.2.2 和 1.2.3）只能近似地满足。使用的单元多一点近似也就改善点，倘若没有计算上的问题，则在网格无限细的极限情况下应力条件也会精确地满足。

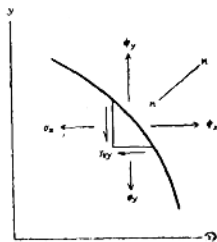


图 1.2.2 边界的表面力

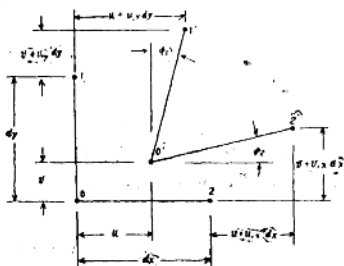


图 1.2.3 微元的位移和畸变，逗号用来记微微商

以假定应力场为基础的有限单元法只采用事先满足平衡条件的场。网格分得越细协调条件就会近似得越好。

下面我们必须描写位移和应变的关系，一般的二维位移场使图 1.2.3 中的线 0—1—2 运动到图形 0'—1'—2'。该运动是刚体运动和畸变的组合。令 u 和 v 表示任意点 O 的沿 x 方向和 y 方向的位移和应力。和应力一样 u 和 v 是坐标的函数。因此点 1 和 2 的位移不是 u 和 v ，而是 u 和 v 加上增量。我们认为这些增量是无限小的。现在让我们考虑在 x 方向的法向应变 ϵ_x 。利用应变的定义，它是长度的改变量除以原长，我们求得：

$$\epsilon_x = \frac{[dx + (u + u_x dx) - u] - dx}{dx} = u_x \quad (1.2.4)$$

类似地分析求得 y 方向的法向应变为：

$$\epsilon_y = v_y \quad (1.2.5)$$

剪切应变 γ_{xy} 定义为：

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{(u + u_x dy) - v}{dy} + \frac{(v + v_x dx) - u}{dx} \\ &= u_{,y} + v_{,x} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

其中计算是以小位移假定为基础的。例如， $\varphi_2 \approx \tan \varphi_2$ ， $dx \approx [dx + (u + u_x dx) - u]$ 。方程 1.2.4，1.2.5 和 1.2.6 是应变—位移关系。在三维情形可得到类似的表达式，可以写成矩阵形式为：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.2.7)$$

其中 u 、 v 、 w 分别为 x 、 y 、 z 方向位移分量。

最后，为了今后参考用，给出另一种形式的平衡微分方程，我们再一次考虑二维情形，对各向同性材料虎克定律为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E}$$

其中 E 为弹性模量， G 为剪切模量， ν 为泊松比。方程 1.2.8 可对应力求解，代入方程 1.2.2，然后把应变—位移关系代入结果中，这样对 $F_x = F_y = 0$ 的情形，有：

$$u_{,xx} + u_{,yy} = \frac{1+\nu}{2} (u_{,yy} - v_{,xy}) \quad (1.2.9)$$

$$v_{,xx} + v_{,yy} = -\frac{1+\nu}{2} (v_{,xx} - u_{,xy})$$

其中 $u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 等，方程 1.2.9 是用位移表示的平衡方程。

1.3 应力—应变关系

在弹性材料的一般三维情形中，应变 $\{\varepsilon\}$ 与应力和初应变由下列方程联系：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{z0} \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{yz0} \\ \gamma_{zx0} \end{Bmatrix} \quad (1.3.1)$$

其中 $[C]$ 是一个弹性系数矩阵, 方程 1·3·1 是“虎克定律”。对实际材料它是近似适用于小应变的。对各向同性材料受热这一熟知情形, 初应变向量包含下列各项,

$$\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{y0} = \varepsilon_{z0} = \alpha T \quad (1\cdot3\cdot2)$$

$$\gamma_{xy0} = \gamma_{yz0} = \gamma_{zx0} = 0$$

其中 α 为热胀系数, T 是温度改变。这样, 在没有应力时, 应变 $\{\varepsilon\}$ 只是自由的热膨胀部分。还有, 对各向同性材料, 我们得到熟悉的项: $C_{11} = \frac{1}{E}$, $C_{12} = C_{13} = -\frac{\nu}{E}$, $C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0$ 等, 其中 E 为弹性模量, ν 为泊松比。

我们把方程 1·3·1 简记为:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_0\} \quad (1\cdot3\cdot3)$$

方程 1·3·3 的逆为:

$$\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (1\cdot3\cdot4)$$

这样一来, 当物体受热时如果不允许发生一切机械的应变就有应力 $\{\sigma_0\}$ 。有 $\{\varepsilon_0\}$ 或 $\{\sigma_0\}$ 的方程 (1·3·4) 是我们今后在全书中将要采用的虎克定律的一种形式。

矩阵 $[E]$ 是对称的, 如果读者预先承认 3·5·6 的适用性, 这是容易证明的, 利用微商,

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x} = E_{12} = E_{21} \quad (1\cdot3\cdot5)$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_x} = E_{13} = E_{31} \text{ 等}$$

这样一来, 在最一般的弹性性质情况下, $[E]$ 包含 21 个独立的系数。

如果材料是正交各向异性的, x, y, z 轴和材料的主方向一致, 则矩阵 $[C]$ 的形式 (2) 为:

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{-\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{pmatrix} \quad (1\cdot3\cdot6)$$

每一个泊松比 ν_{ij} 表示在 i 方向的应力所产生的 j 的方向的应变 ($i, j = x, y, z$)。例如单轴