九年义务教育三年制初级中学

代数解题
思想策略方法（第三册）

张国旺 王岳庭 主编

北京师范大学出版社

九年义务教育三年制初级中学

代数解题思想策略方法

第三册

主编　张国旺　王岳庭
编著　杨世明

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

九年义务教育三年制初级中学　代数解题思想策略方法
第 3 册/张国旺,王岳庭主编;杨世明编著. —北京:北京师范大学出版社,1997.8

ISBN 7-303-04419-1

Ⅰ. 代…　Ⅱ. ①张… ②王… ③杨…　Ⅲ. 代数课-初中-解题　Ⅳ. G634.625

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 05207 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875　北京新街口外大街 19 号)
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:787×1092　1/32　印张:8　字数:166 千
1997 年 8 月北京第 1 版　1997 年 8 月北京第 1 次印刷
印数:1—5 000 册
定价:7.80 元

前　言

《代数解题思想策略方法》与《几何证题思想策略方法》是一套专门讲述九年义务教育三年制初级中学教科书的《代数》、《几何》各册中的解题思想和方略的辅助读物. 相应地按照教科书的册数和章节顺序撰写,每章中所涉及到的思想和方略仅限于用本章的基本知识和基本技能以及之前学过的"双基"内容范围之内可解的题型. 也就是说,对于每一思想和方法的出现,不作全面系统地阐述该方法的理论,而是只讲本章知识范围内可能用到的一些侧面,随着日后"双基"学习的不断增长,在以后的各章中将这一方法逐步加以补充和完善. 不过,每章从不同角度所介绍的方法,总的说来,不仅可以满足于课本中的复习题、与课本相配套的课外习题集中的综合题以及与课本相适应的基础训练中有一定难度的题目的需要,而且,对于在此"双基"之上的竞赛题型,也提供了相应的解题思路与途径. 特别是学生理应掌握,而在配套练习中又未曾出现过的题型,也有范例以资弥补. 总之,期望用这套书所阐述的思想和方略之矢,足以能射题海中之的.

每章分为五大部分.

一、数学思想及其唯物辩证观

将突出用本章出现的数学思想来解的题目以及较为显著体现唯物辩证法的题目归入这一部分. 重在分析用其思想之巧妙以及唯物辩证法在解题中的作用.

二、数学思维方法

集中表现用数学思维方法来解的题目归入这一部分．重在阐述此类题型的解题策略上．

三、一般数学方法与技巧

常用数学方法可解的题目归入这一部分．全面阐述方法步骤，并指明应用中的技巧．

四、特殊数学方法与技巧

必须用特殊的数学方法来解的题目归入这一部分．重在介绍特殊方法以及解题过程中的一些特殊技巧．

五、一题一议

这种题目只能用一种特殊的途径来处理．可是，在阐发这种思路之后，确有举一反三，深化题目之效．

这里需要说明的是数学方法、数学思维方法和数学思想这三者没有严格的界定，仅在其层次和应用的意义上有所不同．数学方法就是直接应用于解数学题的做法，它有一定确切的内涵，有具体的、可操作的步骤和作法，应用起来更直接有效．如代入法、比较法、配方法、待定系数法和换元法等等．数学思维方法是抽象程度较高，更具有一般性的提供解题策略和思路的方法．如抽象与概括、归纳与演绎、递推与类比等等．数学思想是解数学题的指导思想，它更抽象更概括，只是提示一种思考的方向，并不具备实施操作的步骤，但其应用却更为广泛．如数形结合的思想、函数和方程的思想、分类讨论的思想以及等价转化的思想等等．不过，每种思想一旦在某一侧面构成具体的模式，也就形成一种具体的方法．

在这套书中，对于思想和方法不给予理论上的探讨．仅在每节的标题中出现，对提到的思想和方法仅在内文中略加说明．主要是通过有限的可能出现的各种题型的实例，以提供足

量的感性材料,用以充实学生对所述方法的感性认识和悟性.使学生在不知不觉的逐步学习之中,潜移默化地培养他们的唯物辩证观和科学的思维.通过他们自己的学习,以逐步形成他们的创造思维的广阔天地.

这套书可读性强,可以丰富假日益趣,开阔知识视野,拓宽思维途径和增进能力基础.因此,这套书是教师理想的教学参考;是学生期望的自学良师;是家长渴求的辅导帮手.

这套书的设想与撰写还是首次,难免有不尽如人意之处.在此诚恳地希望读者提出宝贵意见.我们满怀信心,相信通过不断修订是会得到充实和完善的.

主编　张国旺　王岳庭

1997 年 4 月 6 日

目　录

第十二章　一元二次方程

§1　数学思想和唯物辩证观

一、转化思想的应用

本章的主要内容是一元二次方程的认识、求解和应用等有关的问题. 首先,当我们面对一个整式方程时,我们应能够通过"化成一般形式",来识别它是不是一元二次方程,哪个字母是未知数("关于 x 的方程",x 就是未知数)?各项系数是什么?如果有字母系数不能确定时,就要分类判断.

例 1　如下关于 x 的整式方程,是什么方程:

(1) $ax^2+bx+c=0$;

(2) $(x+a)(x-a)=(kx-1)^2$;

(3) $m^2x^2+kx=(1-x)(1+x)$.

解:对(1),可以分类如下:

$$ax^2+bx+c=0\begin{cases}\begin{matrix}a\neq 0\\ \text{二次方程}\end{matrix}\begin{cases}bc\neq 0,\text{完全的二次方程;}\\ b\neq 0, c=0,\text{缺常数项的二次方程;}\\ b=0, c\neq 0,\text{缺一次项的二次方程;}\\ b=0, c=0,\text{平凡的二次方程.}\end{cases}\\ a=0\begin{cases}b\neq 0,\text{一元一次方程.}\\ b=0,\text{不再是方程.}\end{cases}\end{cases}$$

因此,一元二次方程的一般形式常写为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$;但是反过来,如果说:"二次方程 $ax^2+bx+c=0$",也就意味着 $a\neq 0$.

对(2)，应用乘法公式，得 $x^2-a^2=k^2x^2-2kx+1$，移项，整理，即得一般形式：

$$(1-k^2)x^2+2kx-(a^2+1)=0.$$

当 $k=\pm1$ 时，它是一次方程；

当 $k\neq\pm1$ 时，它是二次方程.

方程(3)可化为

$$(m^2+1)x^2+kx+1=0.$$

∵ 对任何实数 m，$m^2\geqslant0$，所以 $m^2+1>0$，

∴ (3)是一元二次方程.

〔反思〕在例1所给的三个方程中，对字母系数没有作任何限制，所以在解答时，就要通过分类讨论和论证，来加以判定. 如果在方程后面的括号中，对字母间的关系给出了限制条件，在解题中应加以考虑. 比如上述的(2)，如写成

(2) $(x+a)(x-a)=(kx-1)^2\quad(k\neq\pm1)$.

那么，在化成一般形式以后，就可以回答："它是二次方程"，而无须讨论了.

对于一般形式的二次方程：

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0).$$

我们考虑的是如何求解的问题. 怎样求解呢？我们的办法仍然是转化：把它转化为我们熟悉的、会解的方程. 到现在为止，我们会解什么样的方程呢？无非是：一元一次方程，二、三元一次方程组，可化为一元一次方程的分式方程、无理方程等，归根结底是一元一次方程；那么一条道：就是把二次方程转化为一次方程来解；还有别的道吗？这时，我们又联想到：求一个非负数 A 的平方根 x，就是由 $x^2=A(A\geqslant0)$，推出 $x=\pm\sqrt{A}$. 在这里，

$$x^2=A \quad (A\geqslant 0)$$

不就是首项系数为1、缺一次项的二次方程吗？那么，这第二条道就是把一般形式的二次方程转化为 $x^2=A$ 形式的二次方程来求解. 由此就引出配方法.

例2 (1)试说明，在方程 $x^2=C$ 中，C 必须是非负数，方程才能有解，为什么？

(2) $a^2+2ab+b^2$ 是一个完全平方式，即 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. 应用上式说明：对不完全平方式 x^2+8x 来说，必须加上 4^2，才能得到一个完全平方式.

解：(1)因为任何实数的平方，都是非负数，所以只有 $C\geqslant 0$，才能有平方根 $x=\pm\sqrt{C}$（为实数），因此，只有当 $C\geqslant 0$ 时，方程 $x^2=C$ 才有实数根.（当然，由 $x^2=C$ 有实数根，也能推出 $C\geqslant 0$）.

(20 如果把 x 看作 $a^2+2ab+b^2$ 中的 a，那么 x^2+8x 中的8，就相当于其中的 $2b$，即

$$2b=8, \quad b=4, \quad b^2=4^2$$

这就说明，在 x^2+8x 中，必须配（即"加"）上 4^2，才成为完全平方式，从而写成 $(x+4)^2$，换成任何别的数，都是不行的.

推而广之，在不完全平方式 x^2+px 中，只有配上（加上）$(\frac{p}{2})^2$，才能成为完全平方式：$x^2+px+(\frac{p}{2})^2=(x+\frac{p}{2})^2$. 因为 $(\frac{p}{2})^2$ 也就是一次项系数 p 的一半的平方，所以也叫做半系数配方法.

〔反思〕例2提出的两个问题似乎简单，但却十分重要，它实际上说明了配方法求解二次方程的两条基本原理：一是由 $x^2=C$ 求出 $x=\pm\sqrt{C}$ 的条件，二是把一般形式的二次方程

转化为 $x^2=C$ 形式的方法的根据. 另外,越是简单基本的问题,往往越不容易回答,有时说了很多,可能没说到"点子"上,对例 2 中的两个问题,我们运用学过的"平方根"和"完全平方式"(乘法公式的逆用)的有关知识,一语点破,简单明确. 第三是,一个问题解答完了,应当作必要的联想和反思. 这里,我们通过"推而广之",把对具体例子的解答引向一般,使它成为配方法的依据,从而使对此题的解答更有意义,收获更大.

例 3 配方法的一般步骤是怎样找到的?

解:我们知道,形如 $(x+h)^2=k(k\geqslant 0)$ 的方程,可以用"直接开平方"的方法来解. 怎样把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 化为如上形式呢?也就是说,怎样用 a,b,c 把 h 和 k 表示出来呢?我们把 $(x+h)^2=k$ 展开来看一看:

$$(x+h)^2=k. \quad ①$$

$$x^2+2hx+h^2=k. \quad ②$$

$$x^2+2hx+(h^2-k)=0. \quad ③$$

把 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 同③进行对比,易见,应先把 x^2 的系数变成 1,即方程两边同除以 a(因 $a\neq 0$,这是可以的),得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \quad ④$$

即

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{c}{a}=0. \quad ④'$$

现在我们已看出 $\frac{b}{2a}$ 就是我们要的 h 了,为了把上式化成②的形式,一方面,要把 $\frac{c}{a}$ 移项,另一方面,要配上 $(\frac{b}{2a})^2$,即

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2. \quad ⑤$$

这就相当于②，且我们看出，$k=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，那么(应用完全平方公式)就得到

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ⑥$$

这就完成了配方过程(⑥就相当于①的形式). 其中④、⑤、⑥表示三个主要步骤：

1)把 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 各项均除以 a，化成④；

2)把$\frac{c}{a}$变号移到右边，同时，两边加上同一数$(\frac{b}{2a})^2$(一次项系数一半的平方)，化成⑤；

3)左边用公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，右边通分整理，化成⑥.

〔反思〕(1)这里，我们是把课本第 9 页的例子一般化，而找到配方的三个步骤的. 其中运用了"相反相成"的思想，就是为了把④化成①的形式，我们反而把①展开整理，通过②化成③；然后在③→②→①的引导下，完成④→⑤→⑥.

(2)这种"相反相成"即通过分析"正运算"过程，而找到逆运算的法则和步骤的事，我们已见过了多次，如通过研究加法而找到减的方法，通过研究乘而找到除的方法，通过研究乘方 $(10a+b)^2=100a^2+(20a+b)b$ 而找到开平方的方法，把乘法公式逆用而形成"因式分解"的方法等等，这里不过是又一次的应用.

(3)在上述转化的过程中，由方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 到④、到⑤再到⑥，只是形状发生了变化，它们的解没有变，这样，从④求出来的解，才能保证必是原方程的解. 其实，我们可以检验一下，现在，设 $b^2-4ac\geqslant0$，那么由⑥解出来的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

把 x_1 的值代入原方程左边，有

$$\begin{aligned}ax_1{}^2+bx_1+c&=a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\\&\quad+b\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c,\\&=\frac{b^2+b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a}\\&\quad+\frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c\\&=\frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&\quad+\frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c\\&=\frac{-2ac}{2a}+c\\&=0=\text{右}.\end{aligned}$$

所以 x_1 确实是根，可同样检验 x_2 也是根.

二、公式化与分类讨论的思想

在数学中，对那些“成型的”数学问题，我们总是希望找到一个公式，在解题的时候，只要把已知数代进去，就可以算出要求的数，如圆面积公式，梯形面积公式，由时间和速度求距离的公式 $s=vt$ 等等. 在这个思想指导下，我们通过配方，求出了一元二次方程的求根公式，

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

可是，在我们的公式中，有一个二次根式，它的被开方数为 Δ

$=b^2-4ac$. 当 $\Delta\geqslant 0$ 时,根式有意义,公式才成立,才能应用;那么,当 $\Delta<0$ 时,公式不能用了,这时,说明什么问题呢?方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$没有根吗?不能这样说,因为,"没有公式"不等于没有根,公式法求不出,也许可以用别的方法求出来. 这就提出了一个问题:能否在不解方程的情况下,判断方程是否有根?通过仔细分析配方过程,终于弄清了,Δ 的判别作用:对方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0) \qquad (※)$$

来说,记 $\Delta=b^2-4ac$,那末:

1)若 $\Delta>0$,则(※)有不相等的实数根.

2)若 $\Delta=0$,则(※)有相等的实数根.

3)若 $\Delta<0$,则(※)没有实数根.

反之亦然.

由于 $\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$,是对 Δ 值的完全的分类,它同(※)有不等实根、有相等实根和没有实根(也是对(※)的根的情况的完全分类)三种情况一一对应,这就为分类讨论打下了基础.

例 4 解下列方程:

(1)$abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0\ (ab\neq 0)$;

(2)$10a^2x^2+13abx-3b^2=0\ (a\neq 0)$.

解:(1)$ab\neq 0$ 意味着 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$. 有

$$\Delta=(a^4+b^4)^2-4a^4b^4=(a^4-b^4)^2\geqslant 0.$$

方程有实根,实根是

$$x=\frac{a^4+b^4\pm\sqrt{(a^4-b^4)^2}}{2ab}=\frac{a^4+b^4\pm(a^4-b^4)}{2ab}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{a^3}{b},\quad x_2=\frac{b^3}{a}.$$

(2)$a\neq 0$，说明它确是二次方程．有

$$\Delta=(13ab)^2+4\times 10a^2\times 3b^2=(169+120)a^2b^2$$
$$=289a^2b^2>0.$$

方程有不相等的实根．实根是

$$x=\frac{-13ab\pm\sqrt{\Delta}}{2\times 10a^2}=\frac{-13ab\pm 17ab}{20a^2}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{b}{5a},\quad x_2=-\frac{3b}{2a}.$$

〔反思〕在(1)的解题过程中，我们应用了一个公式，那就是：对任何实数 k，有

$$\pm\sqrt{k^2}=\pm k.$$

（只要分 $k\geqslant 0$ 和 $k<0$ 两种情况验证就可以了，这在课本 13 页公式推导过程中，曾经用到，在解题过程中也常用到，比如，在 15～16 页的例 5 的解题过程中用到了，18 页的第 8(1)题如用公式法解，则在解题过程中，也要用到．）

例 5　已知二次方程 $2x^2-(4k+1)x+2k^2-1=0$，问：当 k 取何值时，方程没有实根？而当方程有实根时，k 的取值范围如何？

解：$\Delta=(4k+1)^2-4\times 2(2k^2-1)=8k+9$．所以

当 $k<-9/8$ 时，$\Delta<0$，方程无实根；而当方程有实根时，$\Delta\geqslant 0$，从而 $k\geqslant -9/8$．

例 6　如下方程能否有相等实根，如果有，就求出来：

(1)$4x^2-(k+2)x+k-1=0$；

(2)$x^2-(k+1)x+\dfrac{k}{4}=0$．

解：应用判别式，对(1)来说，有

$$\Delta=(k+2)^2-16(k-1)=k^2-12k+20$$

$=(k-2)(k-10).$

关于 k 的方程 $\Delta=0$ 有解：$k_1=2, k_2=10$. 这时方程(1)有等根.

当 $k=2$ 时，(1)成为 $4x^2-4x+1=0$，根为 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

当 $k=10$ 时，(1)成为 $4x^2-12x+9=0$，根为 $x_1=x_2=\frac{3}{2}$.

对(2)来说，有

$$\Delta=(k+1)^2-4\times\frac{k}{4}=k^2+k+1.$$

关于 k 的方程 $\Delta=0$，即

$$k^2+k+1=0$$

的判断式 $\Delta'=1^2-4\times1=-3<0$，因此无实根；即对任何实数 k，$\Delta\neq0$，可见，方程(2)无等根.

〔反思〕例 6 的两个小题是很有意思的，(1)是二次方程"套"二次方程，(2)则是判别式"套"判别式. 而 k 呢，它在原方程中，是(待定的)已知数，在方程 $\Delta=0$ 中，却成了未知数. 这说明了已知与未知，在一定的条件下互相转化.

例 7 (1)a,b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根？

(2)求证：当 a,b,c 为实数时，方程 $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$ 必有实根，并求其有等根的条件.

解：(1)方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\\&=-8a^2+8a-4-16ab-16b^2\\&=-4(a^2-2a+1+a^2+4ab+4b^2)\end{aligned}$$