This study is supported by
NSFC40574009 and Alexander
von Humboldt (AvH) Research fellowship.

Time-frequency transform: inversion and normalization

时频变换：逆变换与标准化

◎柳林涛 许厚泽 著

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\bar{\hat{\psi}}(1)}\int_R\int_R \mathrm{W}_\psi f(\tau,\varpi)\exp(i\varpi(t-\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\varpi$$

湖北科学技术出版社

This study is supported by
NSFC40574009 and Alexander
von Humboldt (AvH) Research fellowship.

Time-frequency transform:
inversion and normalization
时频变换：逆变换与标准化

◎柳林涛 许厚泽 著

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\overline{\hat{\psi}}(1)}\int_R\int_R \mathrm{W}_{\psi}f(\tau,\varpi)\exp(i\varpi(t-\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\varpi$$

湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

时频变换：逆变换和标准化：英文 / 柳林涛著
— 武汉：湖北科学技术出版社，2009.12
ISBN 978-7-5352-4449-9

Ⅰ. ①时… Ⅱ. ①柳… Ⅲ. ①小波分析—英文 Ⅳ.
①O177

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第 235015 号

责任编辑:梁　琼　　封面设计:喻　杨

出版发行:湖北科学技术出版社　　电话：027-87679468

地　　址:武汉市雄楚大街268号　　邮编：430070

（湖北出版文化城B座12-13层）

网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷:武汉珞南印务有限公司　　邮编：430074

850×1168　1/32　1.5 印张　50千字

2009年 12月 第1版　　2009年12月第1次印刷

定　价：9.80元

To my daughter Xuanxuan Liu

献给我的女儿柳璇璇

出版声明

我的英文论文《Time-frequency transform:inversion and normalization》从 2008 年 4 月起，先后投寄 6 份国际杂志，均被拒稿。一年半以来，我得到的所有拒稿理由中均不包含这样一条:本文有数学错误。论文在《ACHA》得到的最新拒稿理由为“不够水平”，而我不同意这一理由。在此，我将论文以小册子的形式付梓出版，并特加出版声明如下。

论文的目的有两个:

1)将时频分析中经典的两类变换——加窗傅里叶变换(GT)和小波变换(WT)统一到一种变换——时频变换(Time-frequency transform(TFT))，并研究 TFT 的逆变换。TFT 不仅包含 GT 和 WT，还包含其他未命名变换。

2)提出标准 TFT(normal TFT)，该变换可以直接地确定一个和谐信号的即时相位、即时频率和即时振幅。标准 TFT 及其逆变换可以为时频分析人员提供便捷和精确的常规工具。

论文的创新点是:

1)给出 TFT 逆变换;

2)提出了面向时频分析应用的新概念:标准 TFT;

3)理论证明和定量给出 Morlet WT 谱的频率偏移;

4)提出新的小波定义。

论文的发现是:一个确定性的 WT 逆变换(封面公式)。这一发现直接导致第四创新点,间接导致第一、第二创新点,并最终导致论文的诞生。

TFT 逆变换是本论文的第一创新点。即本论文给出了 TFT 逆变换,分别被论文中的定理 1 和定理 2 所描述。定理 1 表述的是 TFT 逆变换的一个特殊的确定性公式,定理 2 表述的是 TFT 逆变换通则,前者是后者的一种具体应用。

1)TFT 逆变换的原始性受到《IEEE》审稿人的质疑,他认为:

a)定理 1 与定理 2 在和谐分析领域是“熟知的 well known”;

b)我的定理 1 与定理 2 的证明方法太繁琐,他可以用更短的行数证明我的定理。

我对其质疑的反驳是:

a)既然定理 1 与定理 2 早就被和谐分析领域所知道了,那么,证据在哪里? 即定理 1 与定理 2 的确切出处在哪里? 一条数学定理或常识的出处是很容易被确认的。该审稿人对我的这条反驳意见不予回复。

b)即便论文中定理 1 与定理 2 的证明方法可以更为简明,这与定理 1 与定理 2 本身的原始性并无关系。该审稿人对我的这条反驳意见同样不予回复。

2)目前人们所能看到的 GT 逆变换和 WT 逆变换,无论是何种形式,均是我们给出的 TFT 逆变换的特殊应用。

3）目前流行的原子分解（atomic decomposition，AD）理论中用到了一个等价于 TFT 的变换，但 AD 理论没有论及 TFT 逆变换。

标准 TFT 概念是论文的第二创新点。尽管人们可以说标准 GT 或标准 WT 早就有了，但更为一般的标准 TFT 却是一个新事物。标准 TFT 面向时频分析应用，可以直接地确定和谐信号的即时相位、即时振幅和即时频率。标准 TFT 概念是针对如下问题而提出的。

1）经典 GT 在相位上未被标准化。GT 应该被修正，这样其在时频分析时才能够直接确定一个和谐信号的即时相位而非初始相位。这种修正的理由可表述为：当一个时频分析人员面对和谐信号或准和谐信号的时候，他最想知道的是该信号的即时相位而非初始相位。特别地，对于一个频率微变的准和谐信号而言，其初始相位已经失去了意义，而其即时相位才有意义。对于时间函数 $f(t)$，经典 GT 的定义为

$$\mathrm{G}\,f(\tau,\varpi)=\int_R f(t)\,\overline{w(t-\tau)\exp(i\,\varpi t)}\,\mathrm{d}t,\tau,\varpi\in\mathbf{R}\qquad(1)$$

其中，$w(t)$是一个窗函数，上划线表示共轭，τ，ϖ分别代表时间与频率。论文给出的修正 GT 的定义（即 PGT）为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,f(\tau,\varpi)&=\int_R f(t)\,\overline{w(t-\tau)\exp(i\,\varpi(t-\tau))}\,\mathrm{d}t\\&=\exp(i\,\varpi\tau)\mathrm{G}f(\tau,\varpi),\tau,\varpi\in\mathbf{R}\end{aligned}\qquad(2)$$

可以看出，PGT 是 GT 的相位修正版本（或变种），或者说 PGT 是 GT 的相位标准化。具体地，经典 GT 中只有窗口在滑动，而 Fourier 核不滑动，而相位修正后的 PGT 中，窗口和 Fourier 核一起滑动，这一改变使得 PGT 可以直接确定和谐信号的即时相位。而经典 GT 由于 Fourier 核不滑动而只能直接确定和谐信号的初始相位。

2）经典的和原始的 Morlet WT 被定义在 L^2-norm 下，它在频

率上未被标准化,对于时频分析来说是错误的和不可取的。理由在于:当应用非 L^1-norm 下 Morlet WT 到一个简单的和谐信号,人们会发现其小波谱在频率上是偏移的,即谱最大值并不出现在和谐信号的频率上而是有所偏离,这就是非 L^1-norm 下的 Morlet WT 谱的频率偏移现象。只有应用 L^1-norm 下 Morlet WT(即标准 Morlet WT,我 2007 年在 JGR 正式提出的一种特殊的标准 TFT)到一个简单的和谐信号,其小波谱在频率上才会无偏。上述论点已经在本论文中被严格证明。然而,现有几乎全部小波教科书及网络小波论述中,依然以定义在 L^2-norm 下的 Morlet WT 为正统,这对于时频分析而言无论如何都是一种误导,必须对其错误予以明确揭示并提出明确修正。无情的现实是:定义在 L^2-norm 下或 $L\infty$-norm 下的 Morlet WT 已经且正在广泛应用于时频分析之中。这是个小波应用悲剧,正在世界各地上演着。与这一悲剧并行的事实有:

a) L^2-norm 在和谐分析中占据着统治地位,原因在于 L^2-norm 理论中含有一个美丽的 Parseval 能量积分等式,因此,L^2-norm 和谐分析理论就是一个能量分析理论,而将 Morlet WT 定义在 L^2-norm 下也就理所当然了,原始 Morlet WT 就是这么做的。

b)将 Morlet WT 定义在不占统治地位的 L^1-norm 下,时频分析人员才有可能直接通过小波谱确定和谐信号或准和谐信号的即时频率,但这时人们已经无法应用美丽的 Parseval 能量积分等式了。

c)对于一个时频分析人员而言,他最为关心的并非信号的"能量"信息而是该信号可能含有的相位、频率和振幅信息。例如,一个和谐信号或准和谐信号的能量具体是多少并不重要,人们更为关注其即时相位、即时频率和即时振幅具体是多少。

d)非 L^1-norm 下的 Morlet WT 谱存在的频率偏移现象，已经被很多小波应用者发现，而我是理论证明和定量给出这一频率偏移的第一人。**由此而形成论文的第三创新点。**

e)本论文所收到的所有评论中，所有编辑与审稿人均未承认 Morlet WT 谱的频率偏移问题，这相当于他们一致默认上述小波应用悲剧的继续上演。

3)标准 TFT 概念统一地防范了 GT，WT 或其他变换应用于时频分析时可能存在的不足或失误。例如，标准 TFT 规定：ⅰ) GT 应按(2)予以修正或变种；ⅱ) Morlet WT 必须严格定义于 L^1-norm 下。

4)标准 TFT 概念修正或规范了 GT 理论体系和 WT 理论体系的经典提法，因而，我的标准 TFT 概念并不为当前某些和谐分析权威所认可，这并不奇怪。然而，标准 TFT 概念可以迅速被时频分析人员理解、接受与应用。

当我们把论文的目的 1 和目的 2 联合起来看，我们得到了如下新的认识：

1)标准 TFT 拥有一个与 TFT 核函数无关的逆变换公式。即任何标准 TFT $\boldsymbol{\Psi}f(\tau,\varpi)$均如下可逆：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R\int_R \boldsymbol{\Psi}f(\tau,\varpi)\exp(i\,\varpi(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\,\varpi \qquad (3)$$

也就是说，只要你告诉我 $\boldsymbol{\Psi}f(\tau,\varpi)$是一个标准 TFT，那么，即便你不告诉我 $\boldsymbol{\Psi}f(\tau,\varpi)$的核函数是什么，我也能够按(3)将原函数 $f(t)$ 恢复出来。或者说，你不告诉我 $\boldsymbol{\Psi}f(\tau,\varpi)$的具体来历过程，我也能确定出原函数 $f(t)$。

2)标准 TFT 的逆变换(3)是简单的，它从理论上确立了标准 TFT 在所有 TFT 中的特殊地位，也说明了标准 TFT 概念提出的

合理性。

3)特别地，标准 TFT 逆变换(3)既适用于标准 GT(严格地应为 PGT)，也适用于标准 WT 变换，因为后两者只不过是前者的特例而已。最为要紧的是：标准 PGT 和标准 WT 这两个完全不同的变换，居然在逆变换上拥有统一的形式(3)。这是一个新认识，因为它在现有的和谐分析教科书或文献中找不到，尽管某些权威会认为它是已知的(因为这一认识太简单了)。

论文最为重要之处是我的偶然发现：一个确定性的 WT 逆变换公式。对于一个 L^1-norm 下的 WT，$W_\psi f(\tau,\varpi)$作为一种特殊 TFT，其拥有十分简单朴素的逆变换：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\,\bar{\hat{\psi}}(1)}\int_R\int_R W_\psi f(\tau,\varpi)\exp(i\,\varpi(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\,\varpi \qquad (4)$$

这里 ψ 是小波，帽子^表示 Fourier transform (FT)算子。令$\tau=b$，$\varpi=1/a$ 就可以回到人们更为熟悉的(a, b)表述体系。应当强调的是：公式(4)适用于所有 WT 而不仅仅是 Morlet WT。

1)公式(4)是一种人们从未见过的确定性的 WT 逆变换公式！谁如若说见过这个 WT 逆变换公式，请告诉我这个公式的具体出处。

a)到目前为止，唯有前述的那位《IEEE》审稿人对公式(4)做了具体评论。他说："Morlet WT 逆变换(4)是 FT 逆变换的一个简单应用，从 L^1-norm 和谐分析建立就知道了。"我的意见是：他说的前半段是对的，而后半段在乱说或说谎。ⅰ) L^1-norm 和谐分析建立要比 WT 提出早几十年，人们不可能在 WT 提出前就知道 WT 逆变换；ⅱ)WT 提出迄今已有近 30 年历史，在这段历史期间，小波教科书及文献中查不到小波逆变换(4)，任何作者如果知道简单朴素的公式(4)的存在，都不会置之不理，因为简单是数学的本质；ⅲ)审稿人误认为(4)只是 Morlet WT 的逆变换，而事实

上公式(4)是适用于所有 WT 的逆变换。他的误解是可以理解的，因为第一次面对公式(4)的人首先就会想到那是 Morlet WT 逆变换。审稿人的误解恰恰印证了他对于公式(4)的陌生，因为如果他早就知道公式(4)是适用于所有 WT 的逆变换，肯定就不会产生上述误解。该审稿人对于我的上述反驳意见拒绝回复。

b)除了那位审稿人，所有的编辑和审稿人对新的 WT 逆变换公式(4)的发现不发表任何具体意见，他们一律无视或回避新发现公式(4)。

2)或许有人说，公式(4)只是已经知道的 WT 逆变换通则(我的 TFT 逆变换通则的特例)的一个应用，因此不应说是一个发现。而我想说的是：目前人们已知的确定性的 WT 逆变换只有如下形式：

$$f(t)=c_{\psi}^{-1}\int_{R}\int_{R}W_{\psi}f(\tau,\varpi)\psi(i\,\varpi(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\,\varpi, \tag{5}$$

其中

$$0\neq c_{\psi}=\int_{R}\mid\hat{\psi}(\omega)\mid^{2}\mid\omega\mid^{-1}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{6}$$

在当前所有小波文献中，只提供公式(5)这一种确定性的 WT 逆变换公式，而从未提供其他的确定性的 WT 逆变换公式。因此公式(4)作为一个确定性的 WT 逆变换是一个发现。WT 逆变换通则只告知人们太阳系有很多满足万有引力定律的行星却不具体告知行星是什么、在哪里。公式(5)告知人们的是一颗拥有确定轨道的具体行星(如地球)，那是一颗经典行星，而公式(4)告知人们的是另外一颗拥有确定轨道的具体行星，那是一颗我们发现的未命名的新行星。

3)如若有人还是继续说，公式(4)并没有跳出 WT 逆变换通

则,因此不是发现! 那么我只能说:ⅰ)我不可能发现一颗不满足万有引力定律的新行星,知道了万有引力定律并不等于发现了新行星,而发现了新行星那它一定满足万有引力定律;ⅱ)我在太阳系里发现的新行星不可能飞出太阳系。

4)新行星公式(4)对于人们来说是陌生的,尽管它看上去离人们是那么近。即便从事 16 年小波研究的我在发现公式(4)的那一刻及随后很长时间里都怀疑那是自己的幻觉,原因在于公式(4)太简单太朴素。

5)公式(4)只是将论文中 TFT 逆变换定理 1 应用到 WT 中所得到的一种特殊例子。从逻辑上讲,我应是基于更为一般的 TFT 逆变换定理 1 才发现新的 WT 逆变换公式(4)的。而事实却是:我发现 WT 逆变换公式(4)和给出 TFT 逆变换定理 1 几乎是同时发生的,我已经弄不清孰先孰后了。

6)至于我为什么发现了 WT 逆变换公式(4),我也不知道,或许天知道。

正如天王星的发现使得人们更进一步知道行星原来可以躺着自转一样,新的确定性 WT 逆变换公式(4)的发现具有如下启迪意义。

1)公式(4)告诉人们:WT 逆变换核可以是一个全局时间函数而不必是一个局部时间函数(即不必是某种 Lebesgue 空间的函数)。传统地,人们在 Lebesgue 空间中寻找逆变换核,如经典 WT 逆变换(5)就是这么做的。基于这种传统,人们就永远不可能发现新的 WT 逆变换(4),因为公式(4)恰恰打破了这一传统。传统,传统,依然是传统,才使得新行星公式(4)一直处于人们的视野之外。

2)公式(4)提示人们:WT 中的小波 ψ 的频率 1 是重要的。其重要性与经典 WT 逆变换(5)中的小波可容许性 admissibility (6)

是相当的。具体地，新 WT 逆变换公式(4)只是要求

$$0 \neq |\hat{\psi}(1)| < \infty \tag{7}$$

这一要求与经典 WT 逆变换(5)的要求式(6)相比，首先更为简单，其次更为宽松。

3)进一步讲，公式(4)根本就不需要经典 WT 逆变换中的小波可容许性式(6)。也就是说，对于一个非容许(inadmissible)小波所形成的 WT，只要该小波在频率 1 处不为零或无穷大，那么，该 WT 依然可按公式(4)求逆。这一认识是新的，没有任何小波文献或者作者曾明确地指出这一点。

4)既然公式(4)提示人们 WT 中的小波 ψ 的频率 1 是重要的，那么，就应基于这一提示给出小波的新型定义，这正如根据经典 WT 逆变换(5)的提示人们可以定义出满足式(6)的容许小波(即连续统小波)一样。**给出新型小波定义是论文第四创新点**。我的新型小波 ψ 定义为：

$$\hat{\psi}(1) = \max\{|\hat{\psi}(\omega)|\} < \infty, \hat{\psi}(\omega) \in L^1(R) \tag{8}$$

该新型小波定义可通俗解释为：小波是一个拥有至少一个主频率 1 的时间局部函数。新型小波定义(8)对于时频分析而言已经很一般了(但它还可以更为一般)，目前大家所熟知的任何小波均可以视为一个满足式(8)的母小波 ψ 的派生物。上述新型小波定义该被允许，正如容许小波定义被允许一样。最要紧的是：在我们的新型小波定义中，小波并不必是起伏均匀的(即不必积分为零)，而这恰是经典容许小波定义所不容的。例如，如下最为经典的 Gaussian 振荡函数

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)\exp(it) \tag{9}$$

永远不可能成为一个容许小波(尽管人们期望它能)，因为它积分

不为零，即起伏非均匀。然而，它却不折不扣地是一个新型小波，它所形成的 WT 按公式(4)严格可逆！熟悉原始 Morlet WT 的人都知道，为了使式(9)成为一个起伏均匀的容许小波，原始 Morlet WT 的作者们给式(9)加上了一段尾巴。而在我们的新型小波定义中，这个尾巴是不必要的，是狗尾续貂。在经典的容许小波定义中，这个尾巴是必要的，是锦上添花。总之，我的新型小波定义(8)宽松，经典的容许小波定义(6)严苛，两者互为补充，相映成趣。

5)公式(4)启发我产生如下个人建议：WT 最好采用时间与频率(τ,ϖ)表述体系取代流行的尺度与时间(a,b)表述体系。这一建议丝毫不改变 WT 的数学本质却有如下好处：

a)简单朴素地表述 WT 及逆变换，正如公式(4)那样。例如，如果 WT 一开始就简单采用(τ,ϖ)表述体系，我估计公式(4)有可能更早被人们所发现。

b)直观清晰地看到 WT 与 GT 的联系与区别。换言之，通常用(a,b)表述的 WT 和通常用(τ,ϖ)表述的 GT，他们的联系与区别并不是显而易见的，而那原本是可以变得显而易见的。

c)避免某些小波教科书中对于 WT 尺度 a 的误解。例如，一本有影响的小波教科书居然开宗明义地宣称：WT 中的尺度 $a>0$，因为 $a<0$ 无实际意义。这是一个半盲式的宣称，它相当于只看到复平面上的逆时针圆周运动(频率为正)而无视复平面上的顺时针圆周运动(频率为负)。如果 WT 表述于(τ,ϖ)体系，上述的半盲式宣称就不会发生，因为“负频率”很容易被人们认同，而“负尺度”就不太容易被人们认同，尽管两者实质上是一回事。

6)提出一个有趣的问题：对于一个小波 $\psi(t)$ 满足 $\hat{\psi}(0)\neq 0$ 且 $\hat{\psi}(1)=0$(即不满足式(6)也不满足式(7))，那么它形成的 WT 是

可逆的还是不可逆的？这个问题到目前为止找不到答案。

总而言之，上述启迪意义中的任何一条都不可能被人们所认识，在本论文所发现的新的确定性 WT 逆变换(4)被正视之前。至此，还有谁会质疑 WT 逆变换(4)是新发现吗？如若 WT 逆变换(4)早就被人发现，上述认识也应早就建立了。

我想补充说明的是：出于论文的目的 2，我的标准 TFT 可以给出一个标准频率分辨率分布(FRD)函数，根据 FRD 函数，时频分析人员可以设计出最有效的标准 TFT。这里的最有效性是指：标准 TFT 可以按时频分析人员的定量频率分辨率需求以 ⅰ)最细的时间分辨率；ⅱ)最短的边界效应区间；ⅲ)最小的计算代价被设计。例如，如果人们提前知道信号 $f(t)$ 中含有幅度大致相当而且频率大致为 1 年和 1.2 年的子信号，如果人们想使得标准 TFT 对于 $f(t)$ 的时频分析以 1% 的相对精度分离出这两类子信号，那么，FRD 将明确地定量地告诉人们具体该怎么去做就可以得到效率最高的标准 TFT。这显然可以方便时频分析应用，而这一方便并不容易从当前时频分析教科书中找到，通常，人们依靠经验调试 TFT 的参数设置。FRD 函数明确告诉人们：依靠经验的 TFT 参数设置的调试过程是可以避免的。这一点显然会受到时频分析人员的欢迎，尤其会得到刚入门的时频分析人员的欢迎。

另外，我目前正在构思如何利用 FRD 实现高效滤波，初步的想法已有一些，但还不成熟，故未在论文中出现。

行文至此，我们可以总结出标准 TFT 这一新型概念的优点：

1)可以直接地确定和谐信号的即时相位、即时频率和即时振幅；

2)拥有一个简单的核无关的逆变换(3)；

3)克服了经典 GT 和经典 L^2-norm WT 在时频分析时的缺陷;

4)可以按时频分析人员的定量频率分辨率需求被设计,以

a)最细的时间分辨率;

b)最短的边界效应区间;

c)最小的计算代价。

拥有如上四点优点,标准 TFT 无论在理论上还是应用上都是吸引人的。

特别地,论文最后部分具体给出了一个有趣的和有用的标准 TFT,我命名为 Gabor-Morlet Transform (GMT)。GMT 的有趣性在于:它是标准 GT(严格应为 PGT)和标准 WT 的无缝组合,即:其一半(高频段)是 GT,而另一半(低频段)为 WT,而且两者在中频率处的连接是连续的(即不存在跳跃)。然而,从整体上看,GMT 既非 GT 也非 WT 而是一种新的标准 TFT。换言之,GMT 尽管是那么似曾相识,实却是新燕来兮。GMT 的有用性在于:它继承了 GT 在高频分析时的优势和 WT 在低频分析时的优势,而克服了 GT 在低频分析时的不足和 WT 在高频分析时的不足。因此,在时频分析意义上,GMT 比起单纯的 GT 或 WT 要更为有效。故此,GMT 作为一种新的高效的时频分析工具,其在实际应用中的受欢迎程度是可以预见的。

GMT 对于我个人的意义在于:它作为标准 TFT 的一个典型实例,对于那些轻视和漠视标准 TFT 这一新概念的所谓权威们,是一个具体的科学反击。

如果大家再耐心些,我还想声明本论文中的一个**猜想**。该猜想可以被熟悉和谐分析理论的人很容易地看懂,该猜想具体表

述为：

在所有TFT中，只有PGT(GT的变种)和WT可以拥有一个时间局部的逆变换核。

这里“时间局部的”等于“属于某Lebesgue空间”。因此上述猜想可等价表述为：

在所有TFT中，只有PGT和WT可以在某个Lebesgue空间中找到逆变换核。

我感觉上述猜想是对的，但我无法证明它，因此它到目前为止只能是猜想。我真心希望论文的读者们能够证明它是正确的或者是错误的。

a)如果该猜想是正确的，那么，PGT和WT就在所有TFT中拥有了某种意义上的特殊地位。

b)如果该猜想是错误的，那么，就应存在不同于PGT或WT的其他TFT应该与PGT和WT拥有同样特殊的地位。

无论读者们证明该猜想是正确的还是错误的，都将是和谐分析理论上的进步，虽然这种进步目前正被某些和谐分析权威所漠视。

我认为：

1)今后，小波教科书应包含我们新发现的WT逆变换(4)，否则就是不完整的，这一不完整性就像介绍太阳系的教科书不提天王星一样；

2)今后，小波教科书也应包含提我们的新型小波定义(8)，否则也是不完整的，这一不完整性就像介绍太阳系的教科书不讲天王星躺着自转一样。

3)在我们的标准TFT概念诞生之后，权威的流行的L^2-norm下的Morlet WT将退出时频分析应用舞台，然而，作为WT的最