全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编 李延敏

经济数学

——概率论与数理统计

◎ 主 编 于卓熙 李 辉

副主编 蔡 强 王 雷

高等教育出版社

ISBN 978-7-04-028514-7
9 787040 285147 >
定价 23.50元

全国教育科学"十一五"规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　李延敏

经济数学

Jingji Shuxue

——概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　于卓熙　李　辉

副主编　蔡　强　王　雷

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是教育科学“十一五”国家规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目及吉林省教育厅高教重点项目研究成果之一。

内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析，书后附有习题参考答案与部分解答、附录一（概率统计数学实验（使用 Mathematica 软件））、附录二（常用概率统计分布表）。

本书可作为经济、管理类专业本科教材，也可作为报考研究生的数学复习参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 概率论与数理统计/李延敏总主编，于卓熙、李辉主编. —北京：高等教育出版社，2010.1

ISBN 978-7-04-028514-7

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①李…②于…③李… Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224.0②021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 003667 号

策划编辑	马　丽	**责任编辑**	张彦云	**封面设计**	张申申
责任绘图	尹文军	**版式设计**	马敬茹	**责任校对**	俞声佳
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010年2月第1版
印　　张	21.75	**印　　次**	2010年2月第1次印刷
字　　数	400 000	**定　　价**	23.50元

物料号　28514-00

前　言

本书是教育科学"十一五"国家规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"数学类子课题项目研究成果之一。

本套高等学校经济管理学科数学基础系列教材由《经济数学——微积分》、《经济数学——线性代数》、《经济数学——概率论与数理统计》三本教材组成，由李延敏任总主编。

"经济数学——概率论与数理统计"是高等学校经济与管理专业的必修基础课。为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们在多年的概率论与数理统计教学实践的基础上，经过统一策划、集体研究编写了本教材。为了保证本教材的科学性、实用性，在制定编写方针、确定教材体系、安排框架结构、习题合理搭配等方面对国内外近年来出版的同类教材进行了认真研究，对各教材的特点进行了详细的分析和比较，充分吸收了它们的优点。此外，我们还认真参考了最新颁布的《2009年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，力争使本书的内容既能满足经济类、管理类本科经济数学教学的要求，又能兼顾一部分报考硕士研究生的学生的需要。

根据经济类、管理类概率论与数理统计教学的总体要求，本书在编写过程中主要注意了以下几个问题：

1. 在符合教学大纲规定的内容和学分要求的前提下，尽可能多地介绍经济类、管理类专业所必需的概率统计知识。为此，教材对传统内容进行了适当取舍，结构安排稍有改动，采用了先介绍随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布，再集中介绍随机变量的数字特征的概率部分编写体系。按最新大纲的要求对联合分布、分位数、临界值等易混淆的概念使用了规范统一的定义和符号。

2. 既考虑到经济类、管理类专业对数学知识的直接或间接需要，又考虑到概率统计对培养学生空间想象能力、抽象思维能力，逻辑推理能力的重要性，本教材除了详细介绍概率统计的基本原理、基本方法、基本技巧之外，对于一些较少使用的公式及方法也进行了简单介绍，并对多数定理都给出了较严格的证明。

3. 作为经济管理学科各专业经济数学基础教材，注意了专业后继课程的需求及部分学生继续深造的需要，教材编录了比较丰富的习题，并融入了研究生考试的内容。习题分成了A,B两类，A类习题为基本题型，B类习题为难度较大

的考研综合题型。各章中打有“ * ”的内容是对经济数学基础要求较高的专业编写的，可作为选学内容。对前三章的 B 类题给出了解答或提示。

4. 根据经济类、管理类经济数学实验的实际需要，本书在附录一中介绍了概率统计数学实验（使用 Mathematica 软件）。

本教材内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析，书后附习题参考答案与部分解答、附录一（概率统计数学实验（使用 Mathematica 软件））、附录二（常用概率统计分布表）。

本书共有九章及两个附录，第一章、第二章由于卓熙编写；第三章由于卓熙、李延敏编写；第四章、第五章由王雷编写；第六章、第七章由蔡强、李延敏编写；第八章、第九章及附录一由李辉编写；附录二由李延敏完成。全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由李延敏承担。

本教材的出版得到了高等教育出版社的大力支持，尤其是马丽策划编辑和张彦云责任编辑为本教材的出版做了大量的工作，在此表示衷心感谢。本教材也得到了长春税务学院、北华大学等高校的大力支持，在此一并表示衷心感谢。

虽然我们希望编写出一套质量较高、适合当前高等学校经济管理类数学教学实际需要的教材，但限于水平，本书仍可能存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2009 年 8 月

目　录

第一章　随机事件与概率

概率论与数理统计研究的对象是随机现象.

在实践中经常遇到一类现象：在一定条件下一定发生或一定不发生. 例如，在标准大气压下水加热到 100 ℃必然沸腾；水温高于 0 ℃必然不会结冰；一个口袋中有十只完全相同的白球，从中任取一只必然为白球等. 这类现象称为**确定性现象**（或称必然现象）. 我们还经常遇到另一类现象：在一定条件下可能发生也可能不发生. 例如，明天某地要下雨；抛一枚硬币国徽面朝上；从含有 2 件次品的 10 件产品中任取 3 件，其中含有次品等. 这类现象称为**随机现象**（或偶然现象）. 在客观世界中随机现象是极为普遍的. 有很多随机现象在相同条件下是可以重复的，例如掷一颗骰子出现的点数；检查流水生产线上的一件产品是合格品还是不合格品等. 也有很多随机现象是不能重复的，例如某场足球赛的输赢，某些经济现象（如失业、经济增长速度等）. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象. 随机现象所呈现出的不确定性，只表现在一次或少数几次试验中. 如果在相同条件下进行大量重复的试验，随机现象就会呈现出某种规律性，称这种规律性为**随机现象的统计规律性**. 以掷一颗均匀的骰子为例，尽管掷一次时，我们不能预言是否会出现 4 点，但是重复掷多次时，将会发现 4 点出现的次数与所掷总次数的比值接近 1/6.

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的数学学科，由于随机现象的普遍性，使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用. 近年来，一方面它已广泛应用于工业、农业、医学、经济等各个领域；另一方面，广泛的应用也促进概率论与数理统计有了极大的发展.

§1.1　随机事件和样本空间

一、随机试验

为了研究随机现象，就要进行观察，观察的过程就是试验. 在概率论里，我们把对随机现象进行的实验或观察统称为**随机试验**，简称**试验**，通常用字母 E 表示，它具有以下三个特点：

1. 试验可以在相同的情形下重复进行；

2. 试验的所有可能出现的基本结果是明确可知的，并且不止一个；

3. 每次试验总是恰好出现这些可能的基本结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个基本结果.

例 1.1 设有下列试验：

E_1：抛一枚硬币，观察出现正(H)、反(T)面的情况；

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：从含有 3 件一等品的 10 件某产品中任取 3 件，观察出现的一等品数；

E_4：袋中装有红、黄、白各一球，从中任取 1 球，观察球的颜色；

E_5：从一批灯泡中任取一只试用，观察其使用寿命；

E_6：将一枚硬币连抛三次，观察出现正反面的情况.

以上六个试验，都具有上述三个特点，因而都是随机试验.

二、随机事件

随机试验的每一种可能的基本结果，叫做**基本事件**. 因为随机试验的所有可能的基本结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的. 而由多个基本事件所组成的试验的可能结果，相对于基本事件，称它们是**复杂事件**. 无论是基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性，所以都叫**随机事件**，简称**事件**. 随机事件通常用字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，必要时加上下标. 比如 $A=$“正面向上”，$B=$“抽到合格品”，$C=$“掷出偶数点”等都是**随机事件**. 如果组成一个事件的某一个基本事件发生了，我们就称这个事件发生.

例 1.2 设试验 E 为掷一颗骰子，观察出现的点数，在这个试验中，记事件 $A_n=$“出现 n 点”，$n=1,2,3,4,5,6$. 显然，$A_1,A_2,\cdots,A_6$ 都是基本事件. 除此之外，若记 $A=$“出现奇数点”，$B=$“出现能被 3 整除的点”，则 A,B 都是随机事件. 其中事件 A 是由 A_1,A_3,A_5 这三个基本事件组成的. 我们称事件 A 发生，当且仅当 A_1,A_3,A_5 这三个基本事件中有一个发生，类似地，所谓事件 B 发生，当且仅当 A_3,A_6 这两个基本事件中有一个发生.

每次试验中必然发生的事件称为必然事件，记作 Ω. 每次试验中必然不发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$. 例 1.2 的试验 E 中“点数大于 0”是必然事件，它是由所有基本事件 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 组成. 由于每次试验中，必然出现基本事件之一，因此必然事件在试验 E 中一定发生，而“点数大于 7”在试验 E 中一定不会发生，是不可能事件.

显然，必然事件、不可能事件都是确定性事件，为了今后讨论问题的方便，也可将它们看作是两个特殊的随机事件. 再者，事件都是相对于一定的试验而言的，如果试验的条件变化了，事件的性质也可能发生变化. 例如，掷 m 颗骰子的

试验,观察它们出现的点数之和,事件"点数之和小于 15",当 $m=2$ 时为必然事件,当 $m=3$ 时是随机事件,而在 $m=20$ 时则是不可能事件.

三、样本空间

随机试验的一切可能的基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果,又称为**样本点**.

每一个基本事件用由这个基本事件所对应的样本点所构成的单点集表示.由于任何一次试验必然出现全部基本事件之一,也就是一定有样本空间中的一个样本点出现,因此样本空间作为一个事件是必然事件.由一些基本事件复合而成的随机事件用由这些基本事件对应的样本点所构成的集合表示,它是样本空间的一个子集.

例 1.3 写出例 1.1 中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 Ω_k.

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_3=\{0,1,2,3\}$;

$\Omega_4=\{$红,黄,白$\}$;

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

$$\Omega_6=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),\\(T,T,H),(T,T,T)\}.$$

我们称在一次试验中某随机事件发生,当且仅当该随机事件所包含的某个样本点在试验中出现.例如,在例 1.1 的试验 E_2 中,随机事件 $A=\{1,3,5\}$ 是含三个样本点的集合,所谓事件 A 发生,即 1,3,5 这三个样本点中有一个出现.空集 $\varnothing$ 作为一个事件,不包含任何样本点,它在每次试验中都不会出现,因此空集 $\varnothing$ 表示不可能事件.

§1.2 事件间的关系与事件的运算

在研究随机现象时,我们看到同一个试验可以有很多随机事件,其中有些比较简单,有些相当复杂.为了从较简单的事件出现的规律中寻求比较复杂的事件出现的规律.我们需要研究同一试验的各种事件之间的关系和运算.

下面的讨论总是假设在同一个样本空间 Ω(即同一个随机试验)中进行,事件间的关系和运算与集合间的关系和运算一样,主要有以下几种:

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，或事件 A 包含于事件 B，也称事件 A 是事件 B 的子事件. 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 显然，对于任何事件 A，有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega.$$

2. 相等关系

若事件 A 与事件 B 互为包含，即

$$A \subset B \text{ 且 } B \subset A,$$

则称**事件 A 与事件 B 相等**，记作 $A = B$.

3. 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，即“A 或 B”也是一个事件，这一事件称为**事件 A 与事件 B 的和(并)**，记作 $A + B$ 或 $A \cup B$.

类似地，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记作

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \text{ 或 } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{，简记为 } \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和，记作

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \text{ 或 } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \text{，简记为 } \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

显然有：

(1) $A \subset (A + B)$，$B \subset (A + B)$.

(2) 若 $A + B = A$，则 $B \subset A$.

(3) $A + \varnothing = A$，$A + \Omega = \Omega$.

(4) $A + A = A$.

4. 事件的积(交)

事件 A 与事件 B 同时发生，即“A 且 B”，也是一个事件，这一事件称为**事件 A 与事件 B 的积(交)**，记作 AB 或 $A \cap B$.

类似地，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记作

$$A_1 A_2 \cdots A_n \text{ 或 } A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{，简记为 } \prod_{i=1}^{n} A_i \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积，

记作

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots \text{ 或 } A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots,\text{简记为}\prod_{i=1}^{\infty}A_i\text{ 或 }\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

显然有:

(1) $AB\subset A, AB\subset B$.

(2) 若 $AB=A$,则 $A\subset B$.

(3) $A\varnothing=\varnothing A=\varnothing, A\Omega=A$.

(4) $AA=A$.

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生,这一事件称为**事件 A 与事件 B 的差**,记作 $A-B$.

显然有:

(1) $A-B\subset A$.

(2) 若 $A-B=A$,则 $AB=\varnothing$.

(3) $A-\varnothing=A, A-\Omega=\varnothing$.

(4) $A-A=\varnothing$.

6. 互不相容事件(互斥事件)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称**事件 A 与事件 B 是互不相容(或互斥)事件**.类似地,称 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的**,如果它们中任何两个事件 A_i 与 $A_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 都互不相容;称**可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容**,如果它们中任何两个事件 A_i 与 $A_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$ 都互不相容.

7. 对立事件(互逆事件)

若事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,即

$$A+B=\Omega \text{ 且 } AB=\varnothing$$

则称**事件 A 与事件 B 为对立事件(互逆事件)**,事件 A 与 B 互逆,也常常说**事件 A 是事件 B 的逆事件**,当然事件 B 也是事件 A 的逆事件. A 的逆事件记作 $\overline{A}$. 由定义可知两个对立事件一定是互不相容事件;反之,两个互不相容的事件不一定为对立事件. 对立事件满足下面关系式:

(1) $\overline{\overline{A}}=A$.

(2) $A\overline{A}=\varnothing$.

(3) $A+\overline{A}=\Omega$.

8. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,并且它们的和是必然事件,则称这 $\boldsymbol{n}$

个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组. 它的实际意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的一个事件. 当 $n=2$ 时, A_1 与 A_2 就是对立事件. 类似地, 称**可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个完备事件组**. 如果 $\sum_i A_i = \Omega$, 并且对于任何 $i \neq j(i, j = 1, 2, \cdots)$, 有 $A_iA_j = \varnothing$.

各事件间的关系和运算如图 1.1 所示.

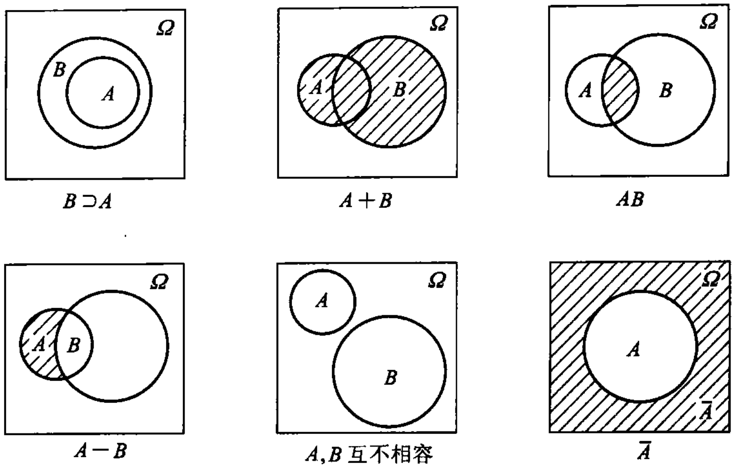

图 1.1

概率论中事件之间的关系与运算同集合之间的关系与运算是完全一致的. 为方便对照, 列表如下:

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 的和事件	A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 的积事件	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 与事件 B 的差事件	A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 无相同元素
$\bar{A}$	事件 A 的逆事件	A 的余集

事件的运算满足如下运算律：

1. 交换律 $A+B=B+A$；$AB=BA$.

2. 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$；

$A(BC)=(AB)C$.

3. 分配律 $(A+B)C=AC+BC$；

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$.

4. 对偶律(德摩根公式)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B};$$

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$$

例 1.4 设 E 仍为例 1.2 中掷骰子的随机试验，已定义的事件 A,B 不变，再令 $C=$"出现点数小于 2"，$D=$"出现偶数点"，$F=$"出现点数不超过 4"，写出各事件间的关系.

解 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$， $A=\{1,3,5\}$，

$B=\{3,6\}$， $C=\{1\}$，

$D=\{2,4,6\}$， $F=\{1,2,3,4\}$，

$C\subset A$，$C\subset F$；B 与 C，D 与 C，A 与 D 都是不相容事件，其中 A 与 D 是对立事件.

例 1.5 设 A,B,C 为三个事件，试用事件的运算关系表示下列事件：

A,B,C(1) 均发生；(2) 均不发生；(3) 至少有一个发生；(4) 恰有一个发生；(5) 最多有一个发生；(6) 至少有两个发生；(7) 最多有两个发生.

解 (1) ABC； (2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$；

(3) $A+B+C$； (4) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(6) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC=AB+AC+BC$；

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$

$=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}$.

例 1.6 某人向目标射击 3 次，设 A_k 表示第 k 次命中目标($k=1,2,3$)，指出下列运算关系表示什么事件：

(1) A_1+A_2； (2) $\overline{A}_3$； (3) $A_1A_2\overline{A}_3$； (4) $A_1+A_2+A_3$；

(5) $A_1A_2A_3$； (6) $A_2-A_1A_3$；(7) $\overline{A_1+A_2}$； (8) $\overline{A_1A_2A_3}$；

(9) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$； (10) $A_1A_2-A_3$.

解 (1) 前两次至少有 1 次命中目标；

(2) 第三次没命中目标；

(3) 前两次命中目标而第三次没命中；

(4) 三次射击至少有一次命中目标；

(5) 三次均命中目标;

(6) 第二次命中目标而第一次和第三次没同时命中,即第二次命中,而第一次和第三次最多命中 1 次;

(7) 前两次均没命中目标;

(8) 三次没同时命中目标,即最多命中两次;

(9) 三次至少有一次没命中目标,与(8)同;

(10) 同(3).

§1.3 频率与概率

一、随机事件的频率与概率

我们知道,在一次随机试验中,随机事件可能出现,也可能不出现,但大量重复试验,却有统计规律性. 例如,我们考虑抛硬币的试验,设进行了 n 次试验,正面(H)出现了 k 次,k 称为出现正面的**频数**,而$\frac{k}{n}$称为出现正面的**频率**. 设出现 H 为事件 A,k 是 A 发生的频数,$\frac{k}{n}$是 A 发生的频率. 当试验次数 n 不大时,A 发生的频率可能变化很大,无规律可循,比如做 10 次试验,A 发生的频率可能是$\frac{8}{10}$,作 20 次试验,A 发生的频率可能是$\frac{8}{20}$. 但是如果 n 充分大,A 发生的频率$\frac{k}{n}$就会稳定在一个常数 $0\leqslant p\leqslant 1$ 左右,称为**频率稳定性**. 表 1.2 是前人作抛均匀硬币试验的数据,可以看出,出现正面(A)的频率稳定在 0.5.

表 1.2

试验者	试验次数(n)	出现正面频数(k)	出现正面频率$\left(\frac{k}{n}\right)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8